

Основы гидродинамического подобия

- *Гидромеханически подобными* считаются явления, если в них одинаковы отношения всех геометрических элементов, плотностей и сил, действующих в соответствующих точках и направлениях, т. е. их
 - *геометрическое,*
 - *кинематическое*
 - *и динамическое подобие.*

- **Геометрически подобными** называются потоки (в натуре и на модели), у которых линейные размеры l_n и l_m , площади w_n и w_m и объемы W_n и W_m находятся в соотношении:

$$\frac{l_n}{l_m} = M_l$$

$$\frac{\omega_n}{\omega_m} = M_\omega = M_l^2$$

$$\frac{W_n}{W_m} = M_w = M_l^3$$

- где M_L – линейный масштаб моделирования, показывающий во сколько раз геометрические линейные размеры изменены по сравнению с натурой.
- Индексами «н» и «м» обозначены величины, относящиеся соответственно к натуре и модели.

- ***Кинематически подобными*** называются потоки, у которых частицы жидкости совершают геометрически подобные перемещения и выполняются соотношения:

$$t_n / t_m = M_t,$$

$$v_n / v_m = M_v,$$

$$a_n / a_m = M_a,$$

- где M_t , M_v , M_a – масштабы моделирования соответственно времени, скорости и ускорения.

- *Динамически подобными* будут потоки, для которых соотношения между соответствующими силами, действующими в натуре и на модели, одинаковы, т. е.
- $$F_H / F_M = G_H / G_M = T_H / T_M = M_F,$$
- где F , G и T – соответственно силы инерции, тяжести и трения.

- Для движущихся потоков одной из основных сил является сила инерции, которую можно выразить в виде произведения массы на ускорение:

- $$F_n / F_m = m_n a_n / m_m a_m = (\rho_n l_n^2 v_n^2) / (\rho_m l_m^2 v_m^2),$$

- $$F_n / (\rho_n l_n^2 v_n^2) = F_m / (\rho_m l_m^2 v_m^2) = Ne.$$

- Это выражение – общий закон гидромеханического подобия, установленный в 1686 г. И. Ньютоном, который можно сформулировать так:

- в динамически подобных потоках между двумя соответственными силами F_n и F_m , должно существовать постоянное соотношение Ne , называемое критерием Ньютона.

Критерии подобия

- **Критерии подобия** безразмерные (отвлечённые) числа, составленные из размерных физических параметров, определяющих рассматриваемые физические явления.
- Равенство всех однотипных критериев подобия для двух физических явлений и систем – необходимое и достаточное условие физического подобия этих систем.

Критерий Фруда.

- При моделировании истечения из отверстий, насадков, через водосливы преобладают силы тяжести при пренебрежимо малом влиянии сил поверхностного натяжения и вязкости.
- Из отношения сил инерции и тяжести можно получить Критерий Фруда, или закон гравитационного подобия:

- $F / G = l^2 v^2 / l^3 = v^2 / gl = Fr.$

- Следовательно, при преобладании сил тяжести потоки будут подобными, если будут равны числа Фруда для натуре и для модели $Fr_n = Fr_m$. Так как обычно в подобных потоках ускорения силы тяжести $g_n = g_m$, критерий Фруда несколько упростится:

- $v_n^2 / l_n = v_m^2 / l_m = Fr.$

- Переход от модели к натуре в этом случае может быть выполнен по следующим зависимостям

- *для скорости*

- $v_H^2/v_M^2 = l_H/l_M = M_L$

- или $v_H = v_M \sqrt{M_L}$

- *для расхода*

- $Q_H/Q_M = v_H w_H / v_M w_M = M_L^2 \sqrt{M_L}$

- или $Q_H = Q_M M_L^2 \sqrt{M_L}$

- *для времени*

- $v_H = l_H / t_H$ и $v_M = l_M / t_M$,

- $v_H / v_M = l_H t_M / l_M t_H$ и $l_M t_H / l_H t_M = v_M / v_H$

- $t_H / t_M = v_M l_H / v_H l_M$,

- $t_H = t_M$.

Критерий Рейнольдса.

- При моделировании движения жидкости в трубах, реках и каналах преобладают силы трения (вязкости), поэтому закон гидромеханического подобия будет представлен в ином виде:
- $F/G = \rho l^2 v^2 / \mu l \mathbf{v} = \mathbf{vl}/\nu = Re.$
- Следовательно, при преобладании силы трения потоки будут подобными, если критерий Рейнольдса для обоих потоков одинаков, т.е.
- и $Re_H = Re_M$ или $v_H l_H / \nu_H = v_M l_M / \nu_M.$
- Переход от модели к натуре в этом случае может быть выполнен по следующим формулам при
 - $v_H = v_M:$
 - $v_H = v_M / M_l$
 - $Q_H = Q_M M_l$
 - $t_H = t_M M_l^2.$

Приведем также названия и обозначения некоторых безразмерных комплексов отражающих:

- силы поверхностного натяжения – **число Вебера** $We = v^2 l \rho / \sigma$;
- силы давления – **число Эйлера** $Eu = P / \rho v^2$;
- силы упругих деформаций – **число Коши** $Ca = v^2 \rho / E_{ж}$ (представляет собой отношение скорости потока к скорости звука в данной жидкости и имеет значение если они сопоставимы);
- силы сжимаемости – **число Маха** $Ma = v / a$ (a – скорость звука в той же точке газа);
- турбулентность (связь между размахами пульсаций в потоке) – **число Кармана** $Ka = v' / \nu$;
- силы инерции при неустановившемся движении – **число Струхала** $St = vt / l$ и др.

π-теорема

- Движение жидкости характеризуется уравнением из пяти параметров ($K=5$), выбранных на основе логических рассуждений о главных факторах влияющих на процесс движения в определенных условиях:

$$K=5$$

- $f(l, t, \rho, g, v) = 0$.

- Рассмотрим размерности этих параметров, выбрав за основные

- длину (L),
- время (T)
- и массу (M), т.е. всего три величины ($m=3$):

- $l [L], t [T], \rho [M/L^3], g [L/T^2], v [L^2/T]$.

- В соответствии π-теоремой функциональную зависимость можно выразить безразмерными комплексами в количестве ($K-3$), где K – число параметров

уравнения □ □, самих величин должно быть ($m+1$).

- Для рассматриваемого случая $(K-3) = (5-3) = 2$, т. е. получается два π-□ комплекса, имеющих следующую структуру:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= l^{X1} t^{Y1} \rho^{Z1} g, \\ \pi_2 &= l^{X2} t^{Y2} \rho^{Z2} v. \end{aligned}$$

$$\pi_1 = l^{X1} t^{Y1} \rho^{Z1} g,$$

$$\pi_2 = l^{X2} t^{Y2} \rho^{Z2} v.$$

- С учетом размерностей для каждого π можем записать:

- $\pi_1 = [L]^{X1} [T]^{Y1} [M/L^3]^{Z1} [L/T^2],$

- $\pi_2 = [L]^{X2} [T]^{Y2} [M/L^3]^{Z2} [L^2/T].$

- После компоновки уравнения преобразуются к виду

- $\pi_1 = L^{X1-3Z+1} T^{Y1-2} M^{Z1},$

- $\pi_2 = L^{X1-3Z+2} T^{Y2-1} M^{Z2},$

- чтобы обеспечить нулевую размерность для двух π -комплексов, приравниваем показатели степени при каждой величине L, T, M к нулю и получаем системы уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} X_1 - 3Z_1 + 1 = 0 \\ Y_1 - 2 = 0 \\ Z_1 = 0 \end{array} \right\} \text{ для } \pi_1$$

$$\left. \begin{array}{l} X_2 - 3Z_2 + 2 = 0 \\ Y_2 - 1 = 0 \\ Z_2 = 0 \end{array} \right\} \text{ для } \pi_2$$

- Решая каждую из двух систем, находим значения степени для параметров
- π_1 -комплекса: $x = -1, y = 2, z = 0$;
- π_2 -комплекса: $x = -2, y = 1, z = 0$.
- Далее определяем структуру комплексов:

$$\pi_1 = g t^2 / l = g l / v^2 = 1 / Fr,$$

$$\pi_2 = t v / l^2 = v / \nu l = 1 / Re,$$

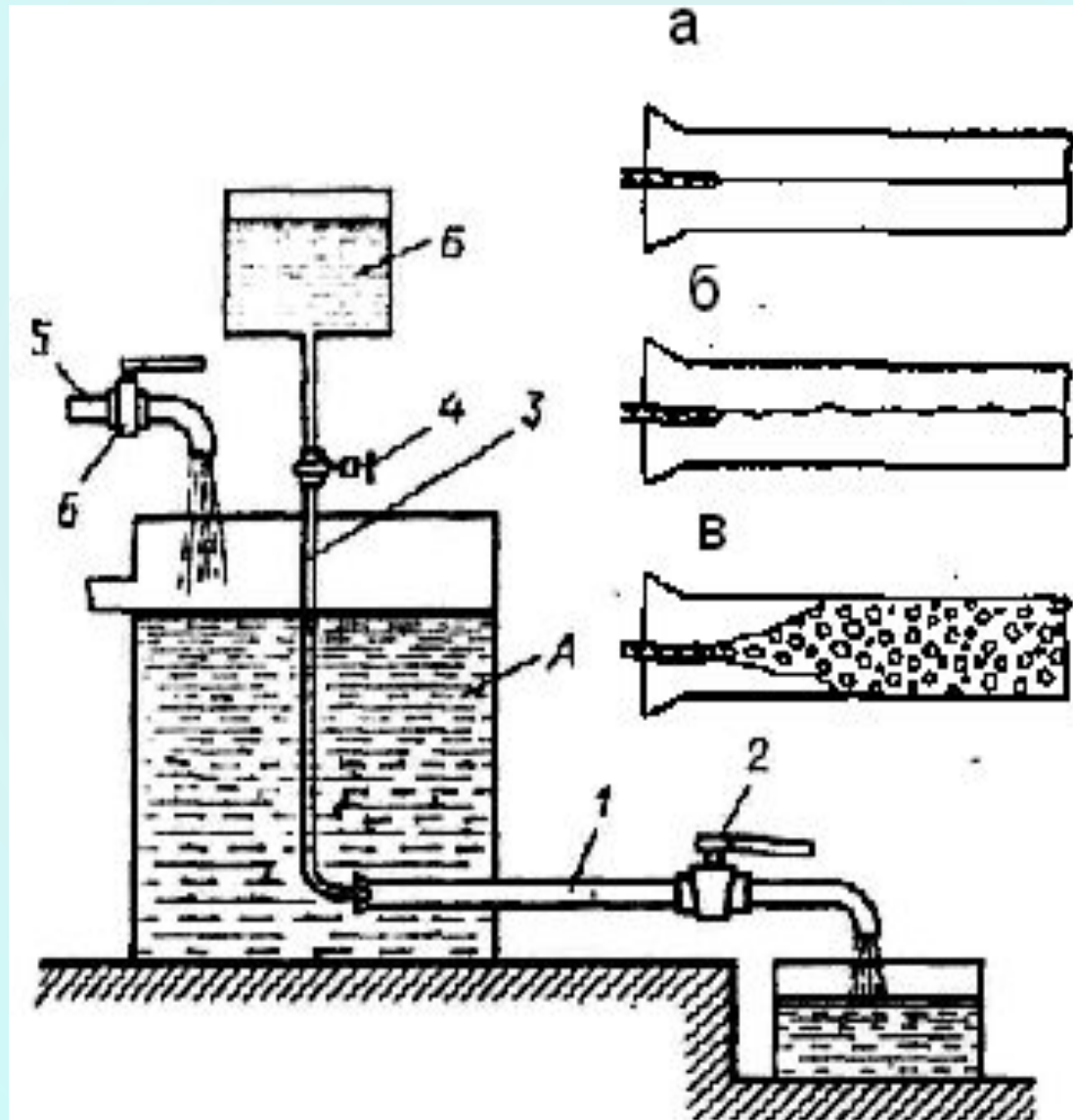
Записываем общий вид критериального уравнения движения вязкой жидкости

$$f(Fr, Re) = 0.$$

Режимы движения жидкости

- Существует два режима движения жидкости: **ламинарный и турбулентный.**
- **Ламинарное движение** (от лат. *lamina* – пластинка), упорядоченное течение жидкости или газа, при котором жидкость (газ) перемещается слоями, параллельными направлению течения.
- **Турбулентное движение** (от лат. *turbulentus* – бурный, беспорядочный), форма течения жидкости или газа, при которой их элементы совершают неупорядоченные, неустановившиеся движения по сложным траекториям, что приводит к интенсивному перемешиванию между слоями движущихся жидкости или газа.

Опыты Рейнольдса



- Опыты Рейнольдса показали, что переход от ламинарного типа движения жидкости к турбулентному происходит при определенной скорости, которую называют *критической*.

- $v_{кр} = Re_{кр} \nu / d.$

- Чаще всего это выражение записывают следующим образом:

- $Re_{кр} = d v_{кр} / \nu,$

- где $Re_{кр}$ – безразмерное число Рейнольдса
- Число Рейнольдса, при котором ламинарный режим движения жидкости переходит в турбулентный, называют **критическим** и обозначают $Re_{кр}$.

- Опытами установлено, что переход ламинарного режима в турбулентный происходит при $Re_{кр} = 2320$.

- Следовательно, движение в трубах при $Re < 2320$ будет ламинарным, а при $Re > 2320$ – турбулентным.

- При безнапорном движении жидкости и для труб некруглого поперечного сечения число Рейнольдса определяют не через диаметр трубы, а через гидравлический радиус по формуле:

- $Re = vR/\nu$

- где $R = d_g/4$, т. е. критическое число Рейнольдса будет в 4 раза меньше, чем при движении в трубах.

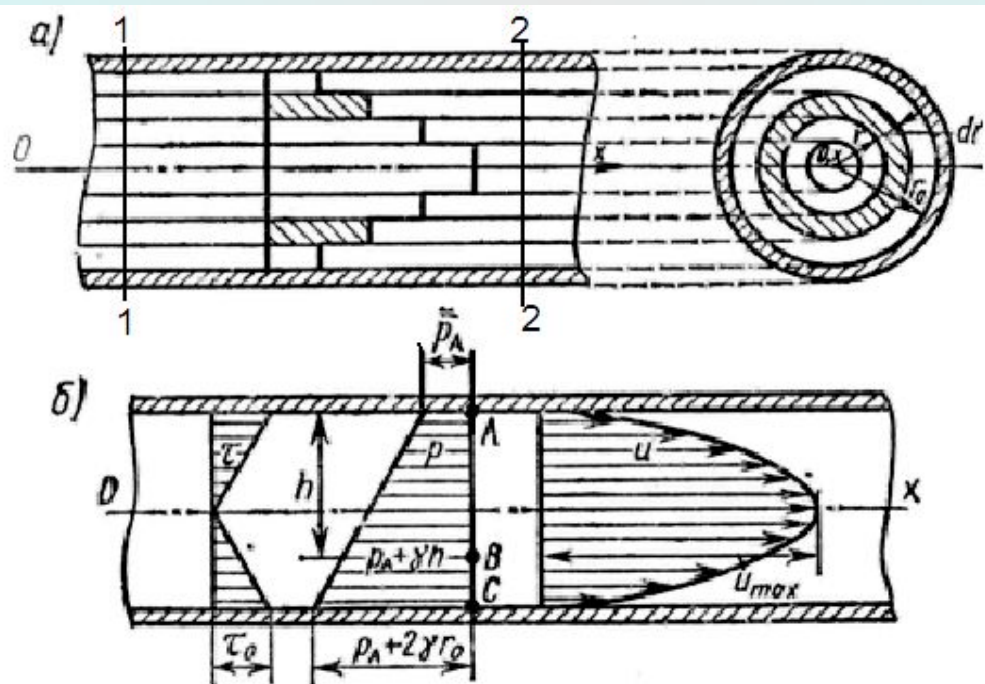
- Следовательно, при безнапорном движении жидкости при $Re_{кр} < 580$ будет иметь место ламинарный режим, а при $Re_{кр} > 580$ – турбулентный.

Скорости течения жидкости при ламинарном и турбулентном движении

Определим закон распределения скоростей в живом сечении потока при ламинарном режиме. Выделим объем жидкости в виде цилиндра радиусом r и длиной l и составим уравнение равновесия всех действующих сил:

$$\pi r^2 (P_1 - P_2) = - 2 \pi r l \tau = - 2 \pi r l \mu du/dr,$$

где $\pi r^2 (P_1 - P_2)$ – разность сил давления в сечениях 1 и 2; $- 2 \pi r l \mu du/dr$ – сила трения на боковой поверхности цилиндра.



■ При равномерном движении жидкости все живые сечения по длине потока одинаковы как по форме, так и по размерам, и скорости в соответственных точках живых сечений также одинаковы. Таким образом, **скорость является функцией исключительно одного радиуса:**

$$\blacksquare du = - (P_1 - P_2) r dr / 2l\mu$$

■ Т.к. $I = (P_1 - P_2) / \gamma l = h_w / l$ получим

$$\blacksquare du = - \gamma I r dr / 2 \mu.$$

■ Интегрируя по сечению трубы от $r=r$ до $r=r_0$ получим:

$$\blacksquare u = - \gamma I r^2 / 4 \mu + C,$$

■ учитывая, что при $r=r_0$ скорость $u=0$, тогда

$$\blacksquare C = \gamma I r_0^2 / 4 \mu, ,$$

■ получим закон распределения скоростей в живом сечении потока:

$$\blacksquare u = \gamma I (r_0^2 - r^2) / 4 \mu.$$

- Для центральной струйки при $r = 0$:

- $u_{max} = \gamma I r_0^2 / 4\mu = \gamma I d^2 / 16\mu$.

- Расход жидкости через трубу при ламинарном движении численно равен объему параболоида скорости ($W = 1/2 * \pi r_0^2 h$) и определяется из выражения

- $Q = 1/2 \pi r_0^2 h (P_1 - P_2) r_0^2 / 4\mu l = (P_1 - P_2) \pi r_0^4 / 8\mu l$,

- отсюда средняя скорость

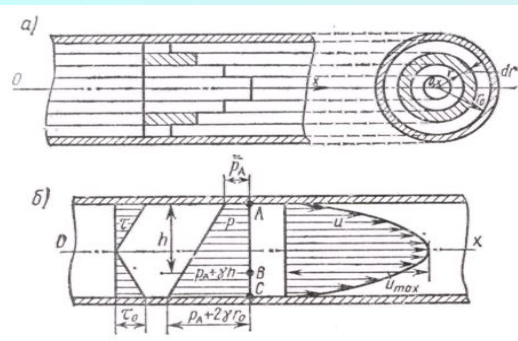
- $v = Q / (\pi r_0^2) = \gamma I r_0^2 / 8\mu$,

- а соотношение между максимальной и средней скоростью

- $u_{max} / v = 2$.

- Отсюда закон распределения скоростей может быть записан таким образом:

- $u = 2v(1 - (r/r_0)^2)$.



■ Турбулентный режим движения жидкости характеризуется беспорядочным движением частиц по произвольным траекториям и с различной скоростью, причем скорость в любой точке потока непрерывно изменяется как по величине, так и по направлению около некоторого среднего значения. Изменение во времени **мгновенной местной скорости** (u') называется пульсацией скорости.

■ Среднюю по времени скорость называют **осредненной местной скоростью**, или **осредненной скоростью** (\bar{u}).

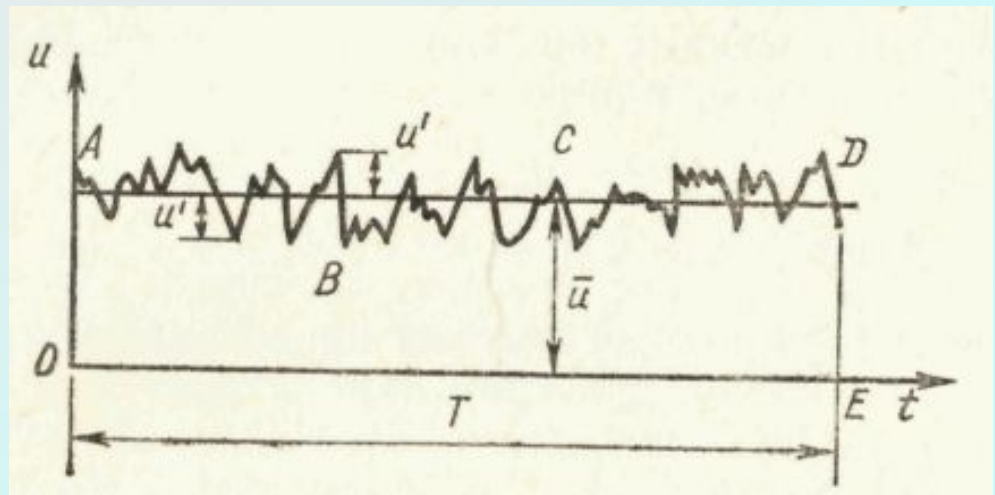
■ Аналитически связь между осредненной скоростью и мгновенной скоростью может быть выражена зависимостью

$$T$$

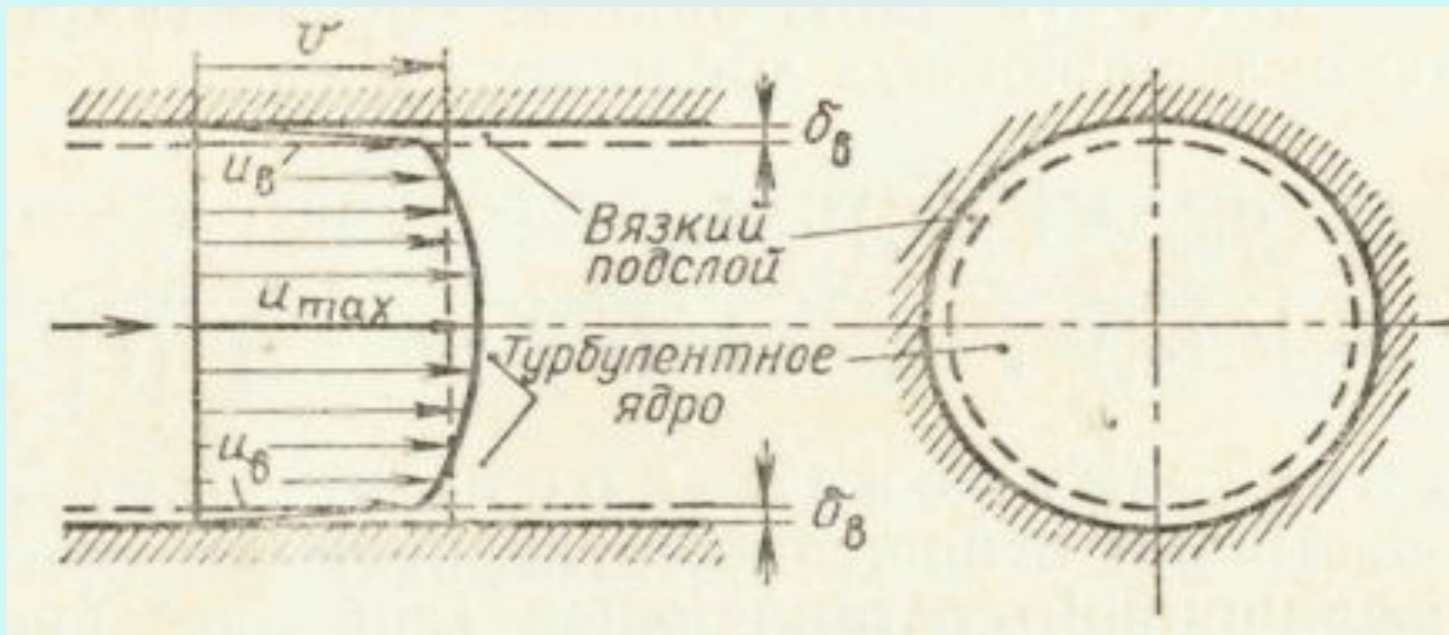
$$\bar{u} = 1/T \int_0^T u' dt$$

$$0$$

■ где T – период наблюдений.



Распределение скоростей течения при турбулентном режиме



Гидравлические сопротивления и потери напора при движении жидкости

- Сопротивления, возникающие при движении жидкости, называются *гидравлическими сопротивлениями*. На их преодоление тратится некоторая часть удельной энергии движущейся жидкости, которую называют потерей удельной энергии, или потерей напора.
- Все гидравлические сопротивления разделяются на два вида: *сопротивления по длине потока (h_L)* или *линейные*, и *местные сопротивления (h_M)*.

- *Гидравлические линейные сопротивления* обуславливаются действием сил трения.
- В чистом виде эти потери возникают в прямых трубах постоянного сечения, т.е. при равномерном движении, и возрастают пропорционально длине трубы. Этот вид трения имеет место не только в шероховатых, но и в гладких трубах.

- *Местные гидравлические сопротивления* обуславливаются местными препятствиями потоку жидкости – в виде изгиба трубы, внезапного сужения или расширения русла, при обтекании клапанов, решеток, диафрагм, кранов, которые деформируют обтекающий их поток. При протекании жидкости через местные сопротивления ее скорость изменяется и обычно возникают вихри, т.е. движение неравномерное.

- Общие потери напора при движении жидкости будут равны сумме потерь напора на трение (h_l), вызванных гидравлическими сопротивлениями по длине потока и потерь напора на местные сопротивления (h_m), т. е.

- $h_w = h_l + h_m, (м)$

- Все потери напора (и местные, и линейные) выражаются в общем виде формулой **Вейсбаха**:

- $h_w = \xi v^2 / 2g$

- Величина *коэффициента сопротивления по длине* выражается в виде

- $\xi_l = \lambda l / 4R,$

где λ – коэффициент сопротивления трению по длине ■
, (*коэффициент Дарси*)

, l – длина рассматриваемого участка ■

. R – гидравлический радиус ■

- Если рассматривать напорное движение в трубах круглого поперечного сечения диаметром d , то так как $4R=d$:

- $\xi_l = \lambda l / d.$

- *Окончательно формула для линейных потерь напора, имеет вид:*

- $h_l = \lambda \cdot l / 4R \cdot v^2 / 2g .$

- Эта **формула Дарси-Вейбаха** действительна как для ламинарного, так и для турбулентного режима, но расчетные выражения для коэффициента Дарси (λ) будут различными.

- *И в общем виде потери напора выражаются следующей формулой:*

- $$h_w = h_l + h_m = \lambda \cdot l/4R \cdot v^2/2g + \Sigma \xi_m v^2/2g.$$

Формулы для определения коэффициента Дарси при ламинарном движении жидкости

- Запишем формулу $v = \gamma I r_0^2 / 8\mu$ в несколько ином виде, т. е. подставим значения $\gamma = \rho g$, $r_0 = d/2$ и $I = h_l / l$, умножим числитель и знаменатель на $v/2$ и решим ее относительно h_l :

$$\blacksquare h_l = 32\mu v l / (g d^2),$$

- выполнив замену $\mu/\rho = \nu$ получим:

$$\blacksquare h_l = 32\nu v l / (g d^2).$$

- Это формула **Пуазейля**, в соответствии с ней линейные потери напора прямо пропорциональны скорости в первой степени и не зависят от состояния стенок труб.
- Заменив в формуле Пуазейля $\nu / v d = 1/Re$ получим:

$$\blacksquare h_l = 64/Re * l/d * v^2/2g .$$

- Эта формула применяется для определения потерь напора при ламинарном движении жидкости в трубах круглого сечения.
- Обозначив $64/Re$ через λ получим формулу Дарси-Вейсбаха в окончательном виде

$$\blacksquare h_l = \lambda * l/d * v^2/2g.$$

- Если трубы имеют некруглое поперечное сечение, то зависимость λ только от числа Рейнольдса сохраняется, но изменяются числовые коэффициенты в числителе. Число Re определяется по формуле

$$\blacksquare Re = v d_g / \nu,$$

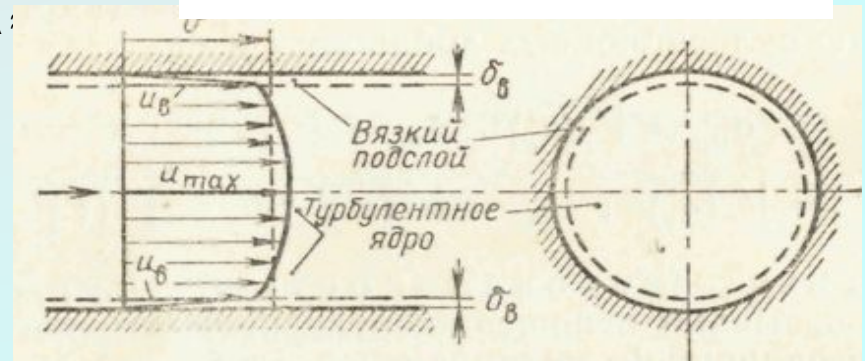
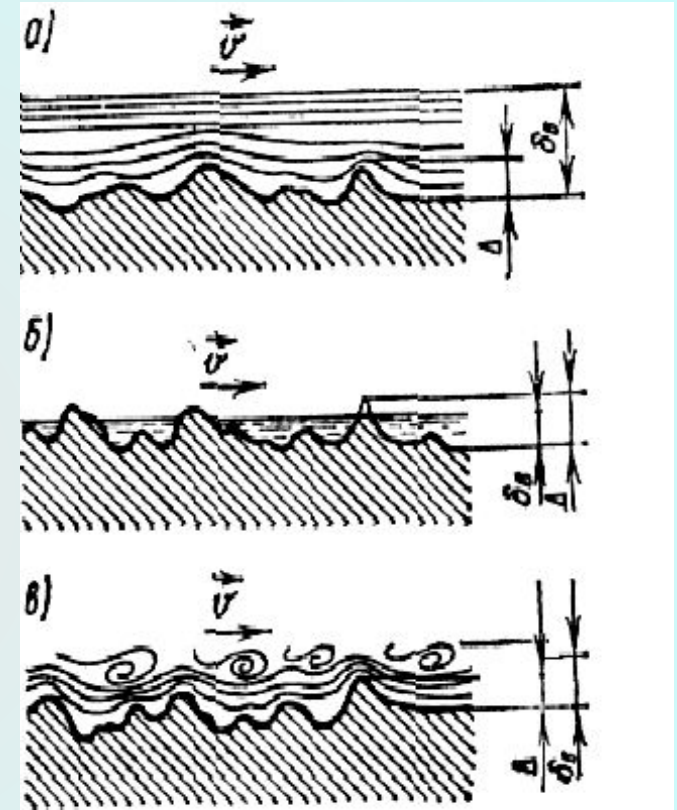
- где $d_g = 4R = 4w/\chi$.

Соотношение толщины ламинарной пленки и выступов шероховатости

- **Гидравлически гладкими** называются стенки труб если высота выступов шероховатости Δ меньше, чем толщина ламинарной пленки ($\Delta < \delta_v$, рис. а). В этом случае все неровности полностью погружены в ламинарной пленке, жидкость в пределах этой пленки ламинарно обтекает выступы шероховатости. Шероховатость стенок не влияет на характер движения, и соответственно потери напора не зависят от шероховатости.
- **Гидравлически шероховатыми** называются стенки когда высота выступов шероховатости превышает толщину ламинарной пленки ($\Delta > \delta_v$, рис. в), неровности стенок выходят в пределы турбулентного ядра, поток обтекает выступы с отрывом, сопровождающимся интенсивным перемешиванием частиц. В этом случае потери напора зависят от шероховатости
- В третьем случае, являющемся промежуточным между двумя выше указанными (рис. б) абсолютная высота выступов шероховатости примерно равна толщине ламинарной пленки ($\Delta \approx \delta_v$, рис. б). В этом случае трубы относятся к **переходной области сопротивления**.

Толщина ламинарной пленки определяется по формуле:

- $\delta_v \approx 30d/(Re\sqrt{\lambda})$.



- При движении жидкости вдоль одной и той же поверхности с неизменной высотой выступа шероховатости, **в зависимости от средней скорости (числа Рейнольдса)** толщина ламинарной пленки может изменяться.
- При увеличении числа Рейнольдса толщина ламинарной пленки уменьшается и **стенка, бывшая гидравлически гладкой, сможет стать шероховатой**, так как высота выступов шероховатости окажется больше толщины ламинарной пленки и шероховатость станет влиять на характер движения и, следовательно, на потери напора.
- ***Влияние выступов с одинаковой высотой Δ будет больше в потоках с меньшими размерами поперечного сечения, чем в потоках с большими размерами.***
- В связи с этим при рассмотрении гидравлических сопротивлений вводится безразмерная величина – **относительная шероховатость** – отношение абсолютного размера высоты выступа шероховатости к какому-либо характерному поперечному размеру живого сечения (радиусу трубы, гидравлическому радиусу, глубине потока) – Δ/r_o , Δ/R , Δ/h .
- Иногда используется обратная величина относительной шероховатости, называемая **относительной гладкостью**, – r_o/Δ , R/Δ , h/Δ .

Экспериментальные исследования коэффициента Дарси при турбулентном движении жидкости и основные формулы для его определения

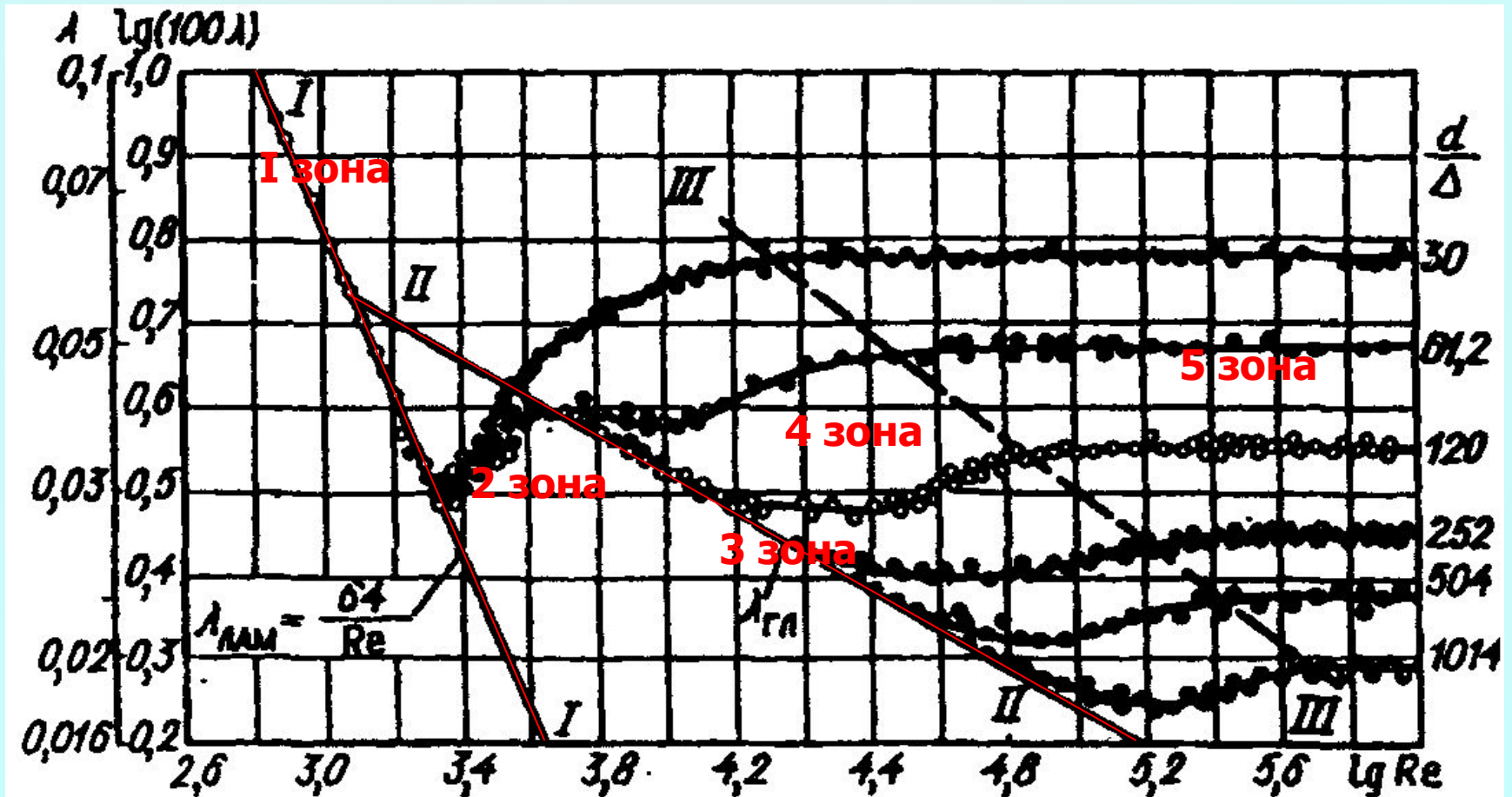
- **Важные исследования в этой области были проведены И. Никурадзе в шероховатых трубах и А.П. Зегжда в прямоугольных лотках (открытые потоки).**
- Стенки труб и лотков имели специально созданную равномерную шероховатость.
- В результате были получены различные значения относительной шероховатости Δ/r_0 для труб и Δ/R для лотков (или относительной гладкости r_0/Δ и R/Δ).
- В опытах определялись *потери напора, измерялся расход, вычислялись средние скорости и коэффициенты λ .*

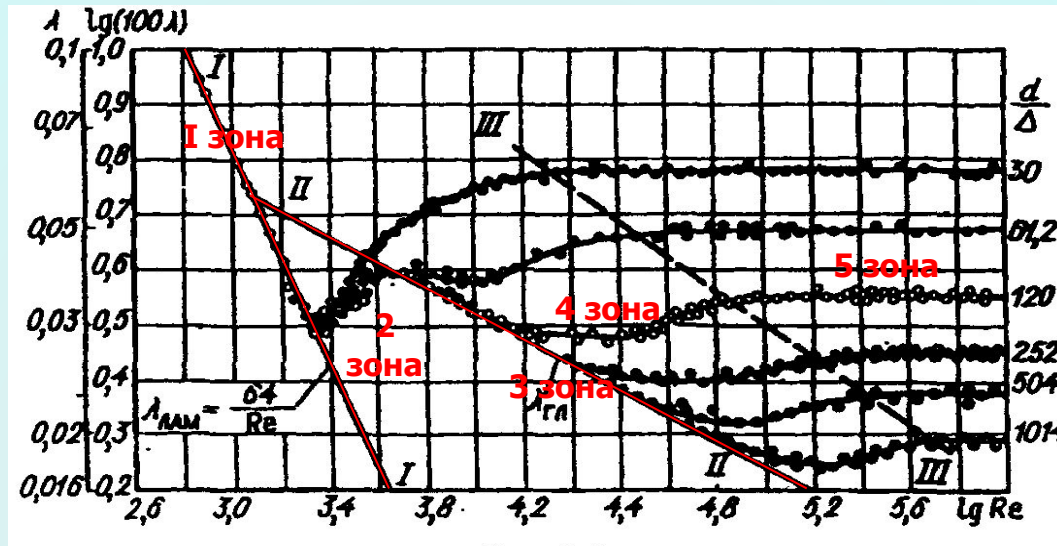
Результаты опытов Никурадзе показаны на рис.

По оси абсцисс отложены значения $-\lg Re$ и по оси ординат $-\lg (100 \lambda)$.

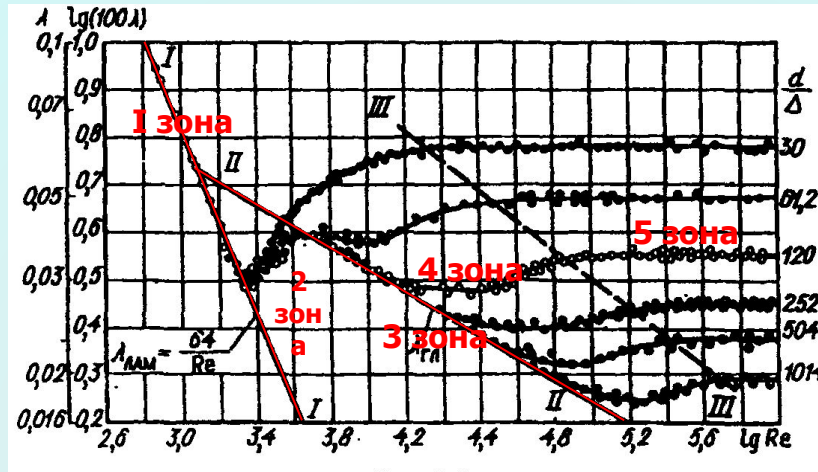
Представление опытных данных в таких координатах позволяет получать по углу наклона прямых (в частности, I и II) показатель степени в зависимости λ от Re .

Исследования, выполненные Никурадзе, достаточно наглядно свидетельствуют о наличии различных зон (областей) сопротивления при напорном движении в трубах:





- **I зона** – ламинарный режим движения – прямая I $\lambda_{\text{лам}}=f(Re)$. Все опытные точки, независимо от шероховатости стенок труб располагаются на прямой, дающей значения $\lambda = 64/Re$, т. е. соответствуют ламинарному режиму движения $Re < Re_{\text{кр.н}} = 2300$.



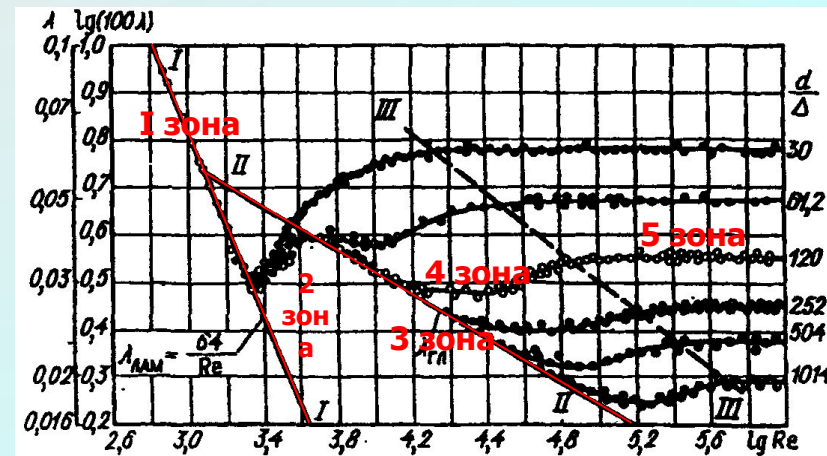
- 2 зона – весьма небольшой диапазон чисел между I и II прямыми при $Re_{кр.н} < Re < Re_{кр.в}$, т.е. от ~ 2300 до $\sim 3000-4000$ ($\lg Re = 3,3-3,6$). Зона является переходом от ламинарного режима к турбулентному, коэффициент λ резко возрастает с увеличением Re , но также не зависит от шероховатости $\lambda_{лам-турб} = f(Re)$.

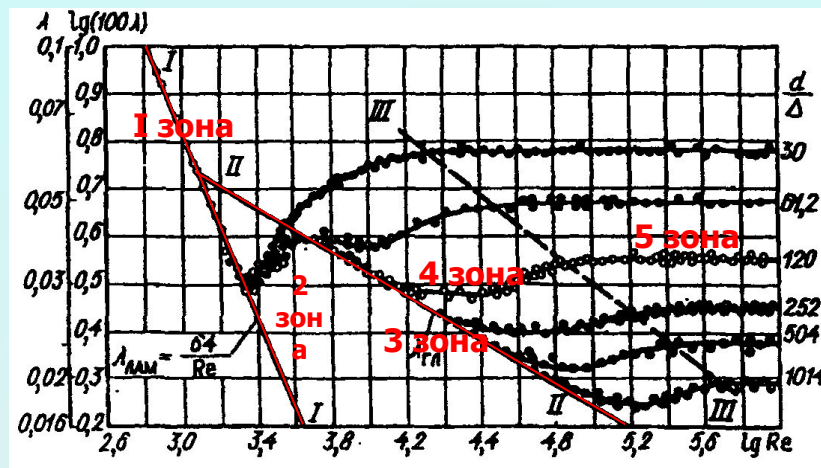
3 зона – прямая II, турбулентный режим движения, *область гидравлически гладких труб*, $\lambda_{zn} = f(Re)$. После завершения перехода к турбулентному режиму движения характер кривых различен в зависимости от значения r_0/Δ .

При больших относительных шероховатостях $r_0/\Delta = 15 \dots 36$ кривые зависимости от значения λ от Re сразу же пересекают прямую II, соответствующую значениям λ по формуле Блазиуса (приведенной ниже) для гидравлически гладких труб, так как высота выступа шероховатости Δ в этих случаях оказывается больше, чем толщина ламинарной пленки d .

Для труб с меньшими значениями Δ/r_0 в некотором интервале чисел Re значения λ расположены вдоль прямой II, причем этот интервал Re тем больше, чем меньше относительная шероховатость (или чем больше относительная гладкость).

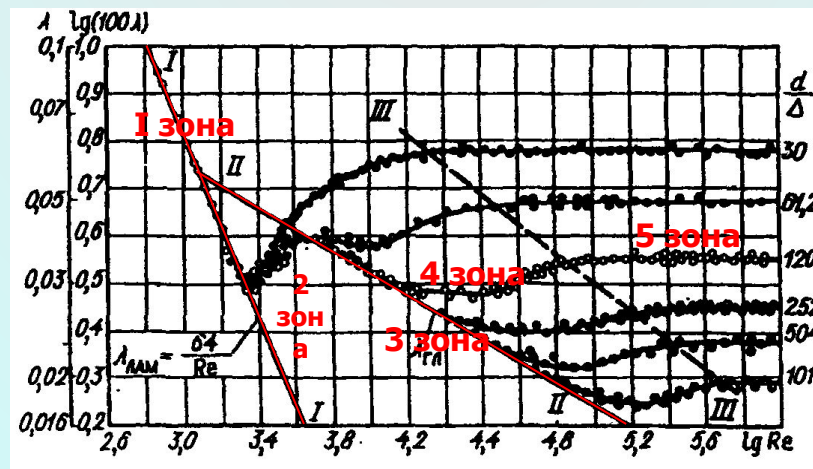
При дальнейшем увеличении Re кривые $\lambda = f(Re)$ удаляются от прямой II. Ориентировочно можно считать что условия существования гладких труб определяются неравенством $Re_{кр.в} \leq Re \leq 10d/\Delta$.



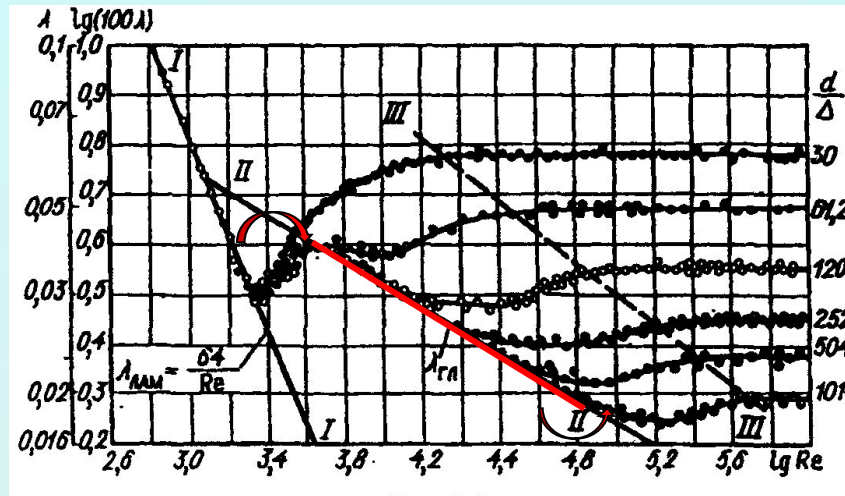


- **4 зона** – *переходная область сопротивления* между областью гидравлически гладких труб и квадратичной, между прямыми II и III, турбулентный режим движения, $\lambda_n = f(Re, \Delta/r_\rho)$.
- Наклон кривых свидетельствует о связи коэффициента Дарси с числом Re и относительной шероховатостью.
- Вблизи прямой II наибольшее влияние оказывает число Re , а ближе к прямой III увеличиваются выступы шероховатости, уменьшается толщина вязкого подслоя и возрастает роль турбулентного режима движения.
- Границами переходной области можно считать приблизительно $10d/\Delta \leq Re \leq 500d/\Delta$.

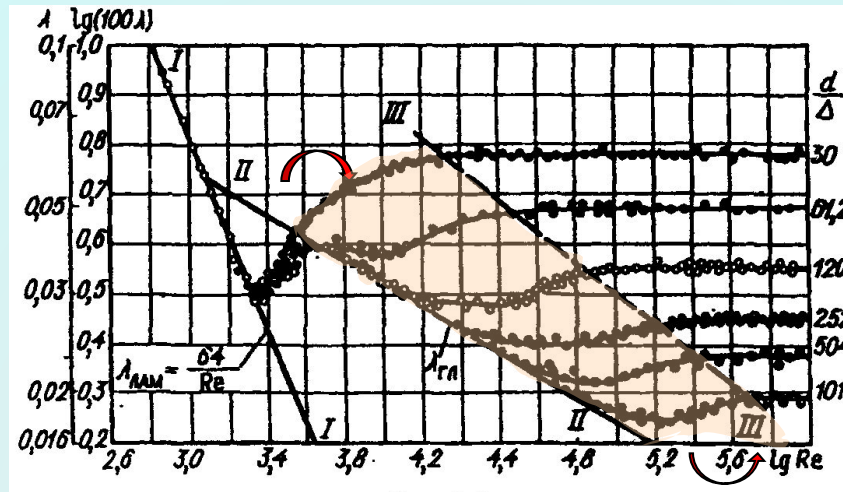
- **5 зона** – *квадратичная область сопротивления* – линии правее прямой III (т. е. при числах $Re > 500 d/\Delta$) турбулентный режим движения $\lambda_{кв} = f(\Delta/r_0)$.
- При некотором значении Re , тем меньшем, чем больше относительная шероховатость, коэффициент λ перестает зависеть от чисел Рейнольдса (правее прямой III, обозначающей начало квадратичной области), и начинается квадратичная область сопротивления, в которой потери напора по длине пропорциональны квадрату средней скорости.
- Все прямые линии, соответствующие различной относительной шероховатости, параллельны оси абсцисс, что подтверждает отсутствие связи с числом Re .



Режим движения		Число Рейнольдса	Определение λ
Ламинарный 1 зона		$Re < 2300$	$\lambda = \frac{64}{Re}$ или $\lambda = \frac{75}{Re}$
Переходный 2 зона		$2300 < Re < 4000$	<i>Проектирование трубопроводов не рекомендуется</i>
Турбулентный	1-я область 3 зона	$4000 < Re < 10 \frac{d}{\Delta_3}$	$\lambda_r = \frac{0,3164}{Re^{0,25}}$ (ф-ла Блазиуса) $\lambda_r = \frac{1}{(1,8 \lg Re - 1,5)^2}$ (ф-ла Конакова)
	2-я область 4 зона	$10 \frac{d}{\Delta_3} < Re < 560 \frac{d}{\Delta_3}$	$\lambda_r = 0,11 \left(\frac{\Delta_3}{d} + \frac{68}{Re} \right)^{0,25}$ (ф-ла Альтшуля)
	3-я область 5 зона	$Re > 560 \frac{d}{\Delta_3}$	$\lambda_r = 0,11 \left(\frac{\Delta_3}{d} \right)^{0,25}$ (ф-ла Альтшуля) $\frac{1}{\sqrt{\lambda_r}} = -2 \lg \left(\frac{\Delta_3}{3,71d} \right)$ (ф-ла Никурадзе)



- **Формулы для гидравлически гладких труб.** Одной из первых по времени появления является формула Г. Блазиуса дающая достоверные результаты при $4000 < Re < 10^5$:
 - $\lambda_{кв} = 0,3164/Re^{0,25}$.
- Для более широкого диапазона чисел Рейнольдса (от $Re_{кр}$ до нескольких миллионов) применяется формула П.К. Конакова:
 - $\lambda_{гл} = 1/(1,8 \lg Re - 1,52)^2$.



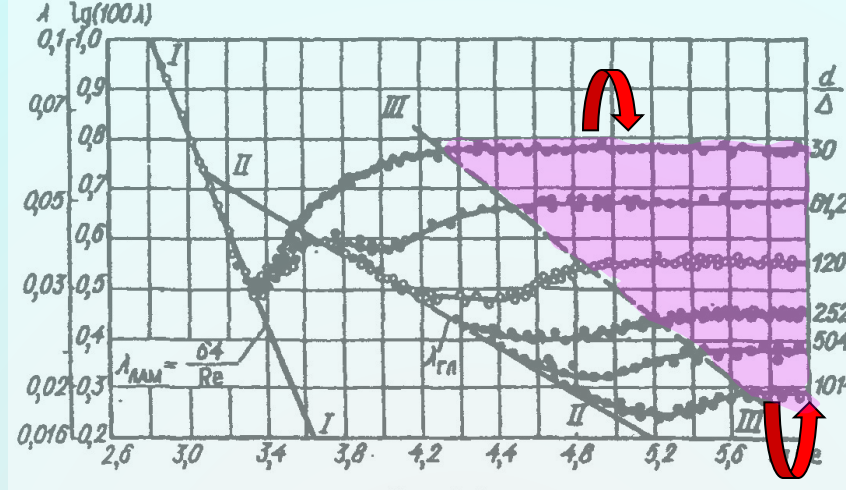
- Из универсальных формул, учитывающих влияние на λ числа Рейнольдса и относительной шероховатости, приведем формулу Кольбука-Уайта:

- $$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left(2,51 / \left(\text{Re} \sqrt{\lambda} \right) + 0,27 d / \Delta \right),$$

- и формулу, предложенную А. Д. Альтшулем:

- $$\lambda_{ун} = 0,11 \left(\Delta / d + 68 / \text{Re} \right)^{0,25}.$$

- Эти формулы действительны для всех однородных ньютоновских жидкостей для любых поверхностей, а не только для выделенной области



В квадратичной области сопротивления (при $Re > 500d/\Delta$) формула для λ_{KB} в общем виде представлена следующим образом:

$$\lambda_{KB} = 1/(a \lg AR/\Delta)^2.$$

Величина $a = 2,3/\sqrt{\delta x}$ в формуле не зависит от шероховатости стенок, постоянная A зависит от вида шероховатости. По данным опытов Никурадзе для равнозернистой шероховатости $A = 14,8$, $x = 0,4$ тогда $a = 2$.

Формула Прандтля – Никурадзе имеет вид:

$$\lambda_{KB} = 0,25/(\lg 3,7d/\Delta)^2.$$

Вполне удовлетворительные результаты получаются также при использовании для гидравлически шероховатых труб формулы Б.Л. Шифринсона:

$$\lambda_{KB} = 0,11(\Delta/d)^{0,25}.$$

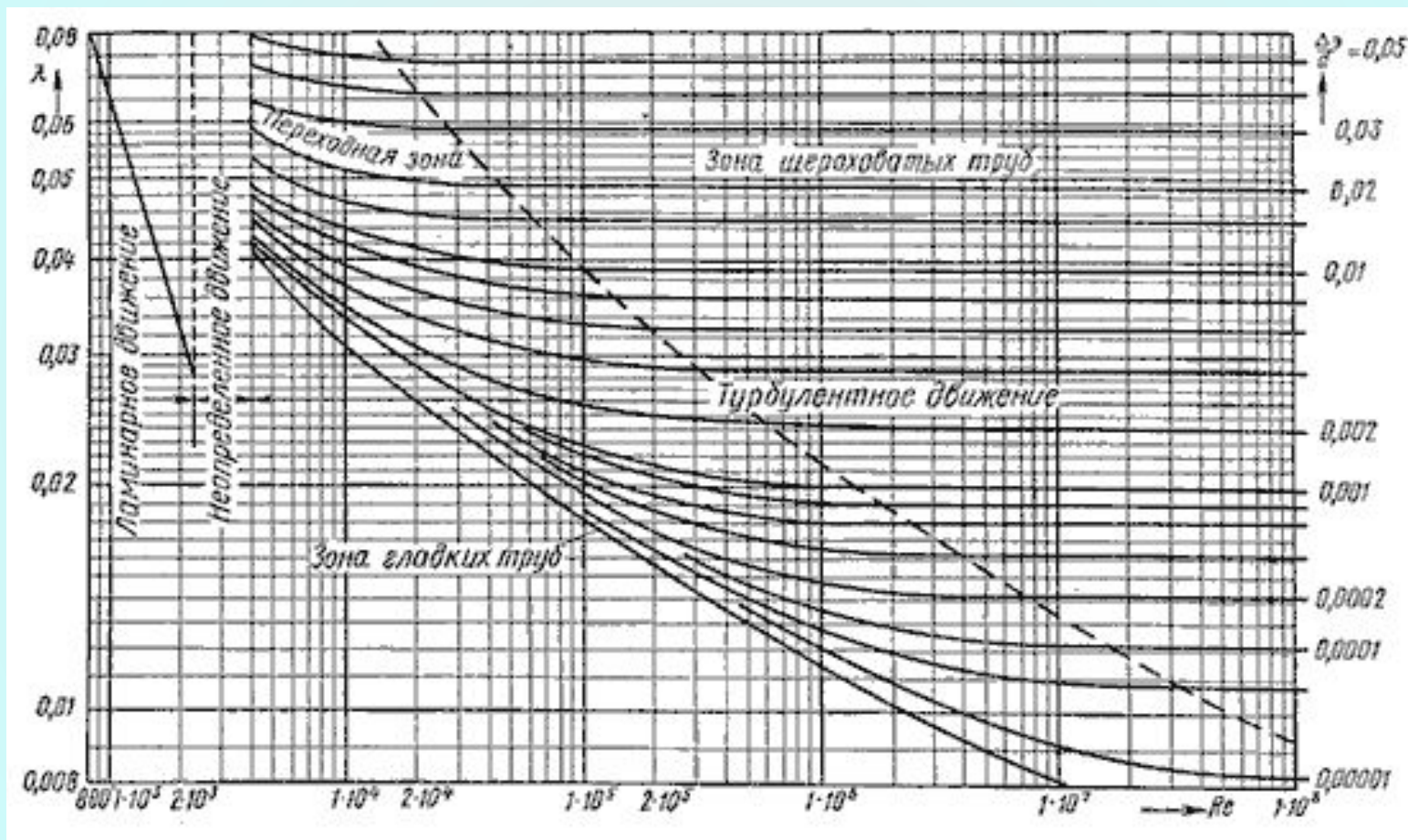
По данным Зегжда, для квадратичной области сопротивления и равнозернистой шероховатости:

$$\lambda_{KB} = 1/(2 \lg(11,55R/\Delta))^2.$$

Для гидравлически шероховатых стальных, чугунных труб больших диаметров 600÷1200мм ($Re > 920\,000$) с учетом их сопротивления в процессе эксплуатации применяются также формулы Ф. А. Шевелева:

- $\lambda_{KB} = 0,021/Re^{0,3}$ при $v \geq 1,2$ м/с .
- $\lambda_{KB} = (1,5 \cdot 10^{-4}/d + 1/Re)^{0,3}$ при $v < 1,2$ м/с.

Номограмма Колбрука-Уайта для определения коэффициента гидравлического трения



Местные потери

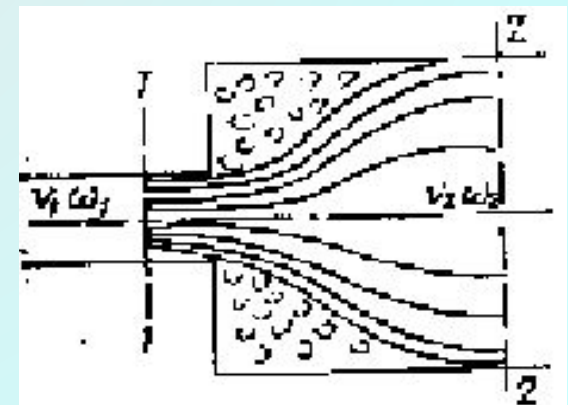
■ **Внезапное расширение трубопровода.** Обозначим давление, скорость и площадь сечения потока в сечении 1–1 соответственно через p_1 , v_1 и w_1 .

■ Сделаем 3 следующих допущения:

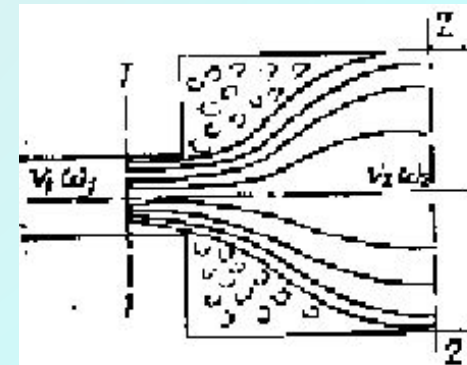
- распределение скоростей в сечениях 1–1 и 2–2 равномерное, т.е. $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$;
- касательное напряжение на стенке трубы между сечениями 1–1 и 2–2 равно нулю ($\tau_0 = 0$);
- давление p_1 в сечении 1–1 действует по всей площади w_2 .

■ Запишем для сечений 1–1 и 2–2 уравнение Бернулли с учетом потери напора на внезапное расширение ($h_{\text{вн.р}}$) и, принимая $z_1 = z_2$, получим

$$P_1/\gamma + v_1^2/2g = p_2/\gamma + v_2^2/2g + h_{\text{вн.р}}$$



- Затем применим теорему механики об изменении количества движения к цилиндрическому объему, заключенному между сечениями 1–1 и 2–2 и стенкой трубы. Для этого определим импульс внешних сил, действующих на рассматриваемый объем в направлении движения, т.е. сил давления. Учитывая, что площади оснований цилиндра слева и справа одинаковы и равны w_2 , а также считая, что в сечении 1–1 давление p_1 равномерно распределено по всей площади w_2 , получим секундный импульс сил в виде – $(p_1 - p_2) w_2$.
- Соответствующее этому импульсу изменение количества движения определится как разность между секундным количеством движения, выносимым из рассматриваемого объема и вносимым в него; при равномерном распределении скоростей по сечениям эта разность равна – $Q\rho(v_2 - v_1)$.
- Приравнявая одно к другому и заменяя ρ через γ/g , получим
 - $(p_1 - p_2) w_2 = Q (v_2 - v_1) \gamma/g$.
- Разделим уравнение на $w_2\gamma$, учитывая, что $Q = v_2 w_2$, и преобразуем правую часть уравнения:
 - $(p_1 - p_2) w_2 = Q (v_2 - v_1) \gamma/g$,
 - $(p_1 - p_2) / \gamma = v_2 (v_2 - v_1) / g$.
- Сгруппировав члены и подставив в уравнение Бернулли, получим:
- $h_{вн.р} = v_1^2/2g - v_2^2/2g + v_2(v_2 - v_1)/g$.



- Сравнение полученного уравнения с ранее записанным уравнением Бернулли показывает полную их аналогию, откуда делаем вывод:

- $h_{\text{вн.р}} = (v_2 - v_1)^2 / 2g,$

- т.е. что потеря напора (удельной энергии) при внезапном расширении русла равна скоростному напору, подсчитанному по разности скоростей. Это положение называют **теоремой Борда-Карно** в честь французских ученых.

- Учитывая уравнение расхода

- $v_1 w_1 = v_2 w_2,$

- полученный результат можно записать еще в следующем виде, соответствующем общему способу выражения местных потерь:

- $h_{\text{вн.р}} = (v_1 - v_2)^2 / 2g = (1 - w_1 / w_2)^2 v^2 / 2g = (1 - d_1 / d_2)^2 v^2 / 2g = \xi_{\text{вн.р}} v^2 / 2g.$

- Следовательно, для случая внезапного расширения коэффициент местного сопротивления в формуле Вейсбаха определяется выражениями:

- $\xi_{\text{вн.р}1} = (1 - w_1 / w_2)^2$ или

- $\xi_{\text{вн.р}2} = (w_2 / w_1 - 1)^2,$

- где w_1 и w_2 – площади сечений трубопровода соответственно до и после расширения.

- Когда площадь w_2 весьма велика по сравнению с площадью w_1 (а также на выходе из трубы в резервуар, в реку и т. д.), скоростью v_2 можно пренебречь.
- Коэффициент сопротивления $\xi_{\text{вых}} = 1$, тогда
 - $h_{\text{вн.р}} = v_1^2/2g$
- где v_1 – средняя скорость течения воды в трубе.

- **Внезапное сужение трубопровода** Внезапное сужение трубы, русла всегда вызывает меньшую потерю энергии, чем внезапное расширение с таким же соотношением площадей.

- Коэффициент местного сопротивления при внезапном сужении равен:

$$\xi_{\text{вн.с}} = (1/\varepsilon - 1)^2,$$

- где ε – коэффициент сжатия струи, представляющий собой отношение площади сечения сжатой струи в узком трубопроводе $w_{\text{сж}}$, к площади сечения узкой трубы w_2 :

$$\varepsilon = w_{\text{сж}} / w_2^2.$$

- Коэффициент сжатия струи зависит от степени сжатия потока и может быть найден по формуле Альштуля

$$\varepsilon = 0,57 + 0,043 / (1,1 - n),$$

- где $n = w_2 / w_1$.

- Для практических расчетов можно пользоваться формулой

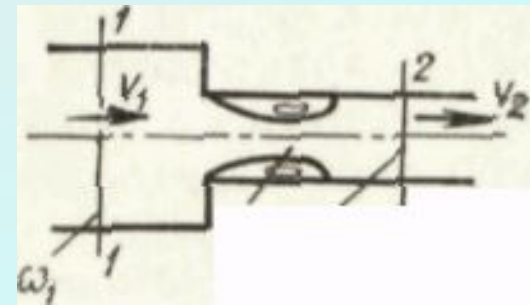
$$\xi_{\text{вн.с}} = 0,5(1 - w_2 / w_1).$$

- Если площадь w_1 намного больше площади w_2 , можно считать, что $w_2 / w_1 = 0$ потери на сужение можно найти по формуле:

$$h_{\text{вн.с}} = 0,5 v_2^2 / 2g,$$

- т.е. потери энергии значительно меньше, чем при внезапном расширении трубопровода. При входе в трубу из резервуара следует принимать также следующие значения коэффициента сопротивления:

- при острых кромках $\xi_{\text{вх}} = 0,4 - 0,5$,
- при закругленных $\xi_{\text{вх}} = 0,2$,
- при весьма плавном входе $\xi_{\text{вх}} = 0,05$.



- **Постепенное расширение трубопровода.** Течение жидкости в расходящихся переходных конусах (диффузорах) сопровождается уменьшением скорости и увеличением давления. Коэффициент сопротивления для диффузоров зависит от угла конусности и соотношения диаметров.

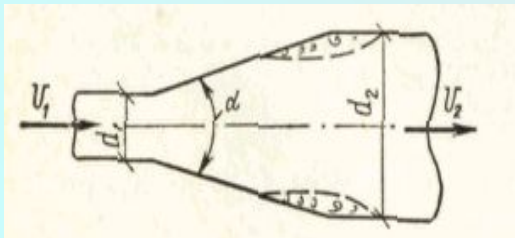
- Для *коротких конусов* коэффициент сопротивления, отнесенный к более широкому сечению, можно найти по формуле:

- $$\xi_{n.p.} = K_{n.p.} (w_2/w_1 - 1)^2,$$

- где $K_{n.p.}$ – коэффициент смягчения при постепенном расширении, зависящий от угла конусности α (значения по данным А.Д. Альштуля и В.И. Калицуна приведены в табл.).

- $$\xi_{n.p.} = \lambda (w_2/w_1 - 1)^2 8 \sin \alpha/2 + K_{n.p.} (w_2/w_1 - 1)^2,$$

- где λ – среднее для сечений w_2 и w_1 .



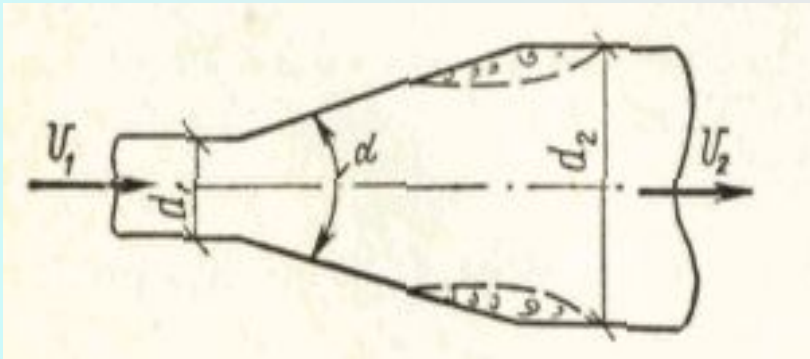
α , град	4	8	15	30	60	>60
$K_{n.p.}$	0,08	0,16	0,35	0,80	0,95	1,0

- **Постепенное сужение трубопровода.** Коэффициент сопротивления для сходящихся переходных конусов (конфузоров) зависит от угла конусности и соотношения диаметров. Для коротких конусов коэффициент сопротивления может быть найден по формуле

- $\xi_{п.с.} = K_{п.с.} (1/\epsilon - 1)^2,$

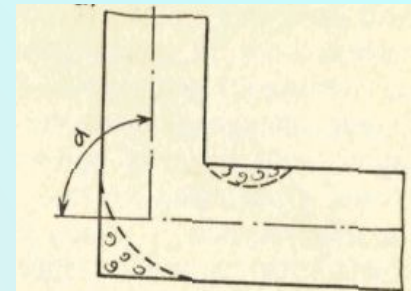
- где $K_{п.с.}$ – коэффициент смягчения при постепенном сужении, зависящий от угла конусности α ; значения $K_{п.с.}$ приведены в табл.. (по данным А. Д. Альтшуля и В. И. Калицуна).

- $\xi_{п.р.} = K_{п.с.} (1/\epsilon - 1)^2 + \lambda (1 - (w_2/w_1)^2) 8 \sin(\alpha/2).$



$\alpha,$ град	10	20	40	60	80	100	140
$K_{п.с.}$	0,50	0,30	0,15	0,15	0,25	0,55	0.60

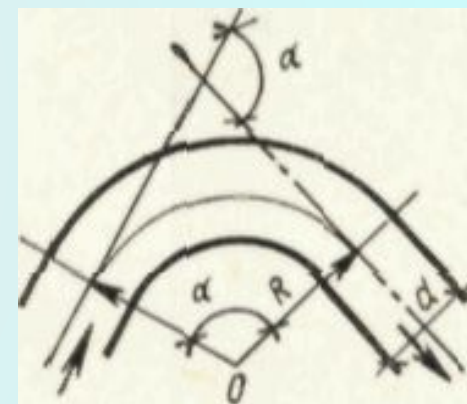
- **Резкий поворот трубы круглого поперечного сечения на угол α .** Внезапный поворот трубы, или колено без закругления обычно вызывает значительные потери энергии, т.к. в нем происходит отрыв потока и вихреобразование.
- причем эти потери тем больше, чем больше угол.



- Коэффициент сопротивления можно найти по формуле

- $\xi_{\alpha} = \xi_{90} (1 - \cos \alpha),$

- где ξ_{90} – значение коэффициента сопротивления для угла 90° ; приведены в табл. для ориентировочных расчетов следует принимать $\xi_{90} = 1.$

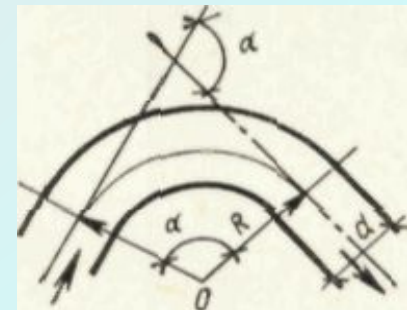


d, мм	20	25	34	39	49
ξ_{90}	1,7	1,3	1,1	1,0	0,83

- **Плавный поворот трубы круглого поперечного сечения** (закругленное колено, отвод,). Плавность поворота значительно уменьшает интенсивность вихреобразования, следовательно, и сопротивление отвода по сравнению с коленом. Это уменьшение тем больше, чем больше относительный радиус кривизны отвода . Коэффициент сопротивления рекомендуется находить из формулы

$$\xi_a = \xi_{90} a.$$

- Коэффициент ξ_{90} – определяется по формуле А. Д. Альтшуля:
- $\xi_{90} = (0,2 + 0,001(100\lambda)^8 \sqrt{d/R})$,
- где d – диаметр трубопровода; R – радиус закругления.
-
- Величина коэффициента a определяется по формуле Б.Б. Некрасова
- при $a < 90^\circ$ $a = \sin \alpha \cdot 0,90$;
- при $\alpha = 90^\circ$ $a = 1$;
- при $\alpha > 90^\circ$ по формуле $a = 0,7 + 0,35\alpha/90^\circ$



- **Диафрагма на трубопроводе.** Коэффициент местного сопротивления диафрагмы, расположенной внутри трубы постоянного сечения (отнесенный к сечению трубопровода):

- $\xi_{\text{диафр}} = (1/(n_{\text{диафр}} \varepsilon) - 1)^2,$

- где $n_{\text{диафр}} = w_{\sigma} / w$ – отношение площади отверстия диафрагмы w_{σ} к площади сечения трубы w .

- Для диафрагмы, расположенной на выходе в трубопровод другого диаметра

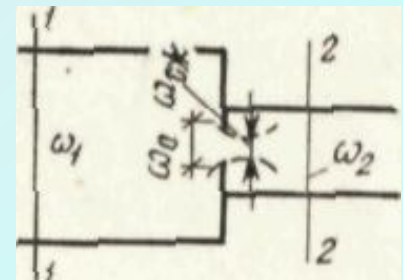
- $\xi_{\text{диафр}} = (1/(n_{\text{диафр}} \varepsilon) - 1/m)^2$

- где $m = w_2 / w_1,$

- $n_{\text{диафр}} = w_{\sigma} / w_1.$

- При выходе из трубы через диафрагму в конце трубопровода

- $\xi_{\text{вых}} = 1/(n_{\text{диафр}} \varepsilon)^2.$



Местные потери в трубах при малых и больших числах Рейнольдса и взаимное влияние местных сопротивлений

- При движении жидкости с малыми числами Рейнольдса коэффициенты местных сопротивлений зависят не только от геометрических характеристик сопротивления, но и от числа Рейнольдса и могут быть при ориентировочных расчетах найдены по формуле А. Д. Альтшуля:

- $$\xi = A/Re + \xi_{кв},$$

- где $\xi_{кв}$ – значение коэффициента местного сопротивления в квадратичной области;

- Re – число Рейнольдса, отнесенное к нестесненному сечению трубопровода.

- Для арматуры, полностью открытой, и при отсутствии необходимых данных о значении A можно принимать

- $A = 500 \xi_{кв}.$

- В табл. приведены значения коэффициентов A для некоторых местных сопротивлений.

Устройство	A
Пробочный кран	150
Вентиль:	
обыкновенный	3000
«Косва»	900
угловой	400
шаровой клапан	5000
Угольник:	
90°	400
135°	600
Колено 90°	130
Выход из трубы в бак	30
Вход из бака в трубу	30
Тройник	150
Задвижка полностью открытая	75

- Местные потери напора часто суммируют в соответствии с **принципом наложения потерь, согласно которому полная потеря напора представляет собой арифметическую сумму потерь, вызываемых отдельными сопротивлениями.**
- Принцип наложения потерь дает надежные результаты лишь в случае, если расстояние между отдельными местными сопротивлениями достаточно велико для того, чтобы искажение эпюры скоростей, вызванное одним из них, не сказывалось на сопротивлении, лежащем ниже по сечению.
- Для этого необходимо (по А.Д. Альштулю), чтобы местные сопротивления отстояли друг от друга не ближе чем:

$$L_{вл} = 0,5d \frac{\xi_m}{\lambda},$$

- где d – диаметр трубопровода, ξ_m - коэффициент потерь для данного сопротивления, λ – коэффициент гидравлического трения трубы, на которой расположено местное сопротивление.
- Формула действительна для турбулентного движения.

- Иногда местные потери напора выражают в виде *эквивалентной длины* ($l_{\text{э}}$) прямого участка трубопровода, гидравлическое сопротивление которого равно местному сопротивлению:

- $$h_m = h_l = \xi_m \frac{v^2}{2g} = \lambda \frac{l_{\text{э}}}{d} \frac{v^2}{2g}$$

- откуда

- $$l_{\text{э}}/d = \xi_m / \lambda.$$

- Поскольку коэффициент гидравлического трения λ зависит от числа Рейнольдса и относительной шероховатости, эквивалентная длина при одном и том же значении коэффициента ξ может иметь различные значения в зависимости от величины λ .

- *При больших числах* Рейнольдса в первом приближении:

- $L_{вл} / d \geq (30 \dots 40)d.$

- *При малых числах* Рейнольдса (большие значения λ) взаимное влияние местных сопротивлений проявляется слабее, длина влияния местного сопротивления имеет меньшую величину и приближенно может быть оценена по формуле:

- $L_{вл} / d = 1,25.$

- Формулы получены из обработки опытов Р.Е. Везиряна.

