Решение тригонометрических уравнений

Хараск Наталия Эдуардовна
учитель математики
МБУ СОШ № 94

Устная рабаота

- Что такое уравнение?
- Что называется корнем уравнения
- Какие уравнения называются равносильными?
- Что значит решить уравнение?

Формулы решения уравнений $\sin x = a$, $\cos x = a$, $tg\, x = a$.

- $\sin x = a$

  $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in Z$

- $\cos x = a$

  $x = \pm \arccos a + 2\pi k,\ k \in Z$

- $tg\, x = a$

  $x = arctg\, a + \pi k,\ k \in Z$

Вычислить:

- Вариант 1.

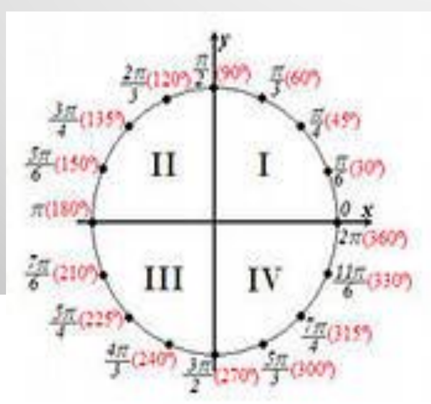
1. $\sin x = 0$
2. $\cos x = -\sqrt{3}$
3. $\cos 3x = -1/2$
4. $\sin 0{,}5x = 1$
5. $\operatorname{tg} 4x = \sqrt{3}$
6. $\operatorname{tg} (x + п/2) = 0$
7. $2\operatorname{tg} x = 3$

- Вариант 2.

1. $\sin x = 1$
2. $\cos x = 0$
3. $\cos 1/3x = 1$
4. $\sin 2x = 1/2$
5. $\operatorname{tg} 4x = -1$
6. $\operatorname{tg} (2п - x) = \sqrt{3}$
7. $\operatorname{tg} x = 1{,}35$

Ответы:

1. x =пк, кЄZ
2. x =п + 2пк, кЄZ
3. x = $\underline{+}$п/4+2пк/3,кЄZ
4. x = п + 4пк, кЄZ
5. x = п/12 + пк/4, кЄZ
6. x = -п/3 + пк, кЄZ
7. x = arctg3/2 +пк, кЄZ



1. x = п/2 +2пк,кЄZ
2. x =п/2 + пк, кЄZ
3. x = 6пк, кЄZ
4. x =$(-1)^k$п/12+пk/2, кЄZ
5. x =п/16 + пк/4, кЄZ
6. x = п/2 + пк, кЄZ
7. x =-arctg1,35+пк, кЄZ

Методы решения тригонометрических уравнений

- Алгебраический метод. Приведение данного уравнения к квадратному относительно одной тригонометрической функции с последующей заменой переменной и подстановкой.
- Решение уравнений методом разложения на множители.
- Решение однородных уравнений первой и второй степени. Уравнение называется однородным относительно sin и cos, если все его члены одной и той же степени относительно sin и cos одного и того же угла.
- Введение вспомогательного аргумента.

Алгебраический метод.

- 1) Решить уравнение: $2\cos^2 x + 3\sin x = 0$.

  Решение:

  т. к. $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$,

  $2(1 - \sin^2 x) - 3\sin x = 0$,

  $2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$.

  Пусть $\sin x = t$, тогда

  $2t^2 - 3t - 2 = 0$,

  $t = -1/2$, $t = 2$

  $\sin x = -1/2$ или $\sin x = 2$-решений не имеет

  $x = (-1)^k \arcsin(-1/2) + \pi k$

  $x = (-1)^{k+1}\pi/6 + \pi k$, $k \in Z$.

  Ответ: $(-1)^{k+1}\pi/6 + \pi k$, $k \in Z$.

- 2) Решить уравнение: $3\sin^2 2x + 10\sin 2x + 3 = 0$.

  Решение: $\sin 2x = t$, $3t^2 + 10t + 3 = 0$.

  Ответ: $(-1)^{k+1}\ 1/2 \arcsin 1/3 + \pi k/2$, $k \in Z$.

Метод разложения на множители.

- 1) Решить уравнение: $2 \sin x \cdot \cos 5x - \cos 5x = 0.$
  Решение:
  $\cos 5x\,(2\sin x - 1) = 0$,
  $\sin x = 1/2$ или $\cos 5x = 0$,
  $x=(-1)^k п/6+пk,\ k \in Z.$ $x=п/10+пn/5,\ n \in Z$

- 2) Решить уравнение: $\cos 2x - \cos 8x + \cos 6x = 1.$
  Решение:
  $\cos 2x + \cos 6x = 1 + \cos 8x$, используя формулы сумма косинусов и косинус двойного аргумента, получаем $2 \cos 4x \cos 2x = 2 \cos^2 4x$,
  $\cos 4x \cdot (\cos 2x - \cos 4x) = 0$,
  $\cos 4x \cdot 2 \sin 3x \cdot \sin x = 0$,
  1) $\cos 4x = 0$, 2) $\sin 3x = 0$, 3) $\sin x = 0$,
  $x=п/8+пк/4,\ к \in Z$ $x=пn/3,\ n \in Z.$ $x=пm,\ m \in Z.$

Однородные уравнения первой и второй степени.

- 1) Решить уравнение: $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$.
  Решение:
  $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$, разделим обе части уравнения на $\cos x$
  $\operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0$, $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$
  $x = п/3 + пn, n \in Z$

- 2) Решить уравнение: $3\sin^2 x + 4\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x = 2$.
  Решение:
  $3\sin^2 x + 4\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x = 2\sin^2 x + 2\cos^2 x$,
  $\sin^2 x + 4\sin x \cdot \cos x + 3\cos^2 x = 0$, разделим обе части уравнения на $\cos^2 x$
  $\operatorname{tg}^2 x + 4\operatorname{tg} x + 3 = 0$, отсюда $y^2 + 4y + 3 = 0$,
  $y_1 = -1$, $y_2 = -3$, значит
  $\operatorname{tg} x = -1$, $\operatorname{tg} x = -3$,
  $x = -п/4 + пn, n \in Z$ $x = -\operatorname{arctg} 3 + пк, к \in Z$

Введение вспомогательного аргумента.

- 1).Решить уравнение: $2\sin 3x + 2\cos 3x = \sqrt{2}$.

Решение: разделим обе части на $2\sqrt{2}$

$1/\sqrt{2}\sin 3x + 1/\sqrt{2}\cos 3x = 1/2$.

$\sqrt{2}/2\sin 3x + \sqrt{2}/2\cos 3x = 1/2$. Заметим, что

$\sqrt{2}/2 = \cos(п/4)$, $\sqrt{2}/2 = \sin(п/4)$, получаем

$\cos(п/4)\cdot\cos 3x + \sin(п/4)\cdot\sin 3x = 1/2$.

Используя формулу косинуса разности, получим:

$\cos(3x - п/4) = 1/2$.

$3x - п/4 = \pm п/3 + 2пn$, $n \in Z$

$x = 7п/36 + 2пn/3, n \in Z$ $\quad x = -п/36 + 2пn/3$, $n \in Z$

Введение вспомогательного аргумента.

- 2).Решить уравнение: $\sqrt{3}\sin 3x$ - cos 3x = 1.

Решение: здесь a = $\sqrt{3}$, b = - 1, поэтому разделим обе части на $\sqrt{3+1} = 2$

$\sqrt{3}/2$ sin 3x - 1/2cos 3x = 1/2. Заметим, что

$\sqrt{3}/2$ = cos (п/6), 1/2 = sin (п/6), получаем cos(п/6)·sin 3x- sin(п/6)·cos3x=1/2.

Используя формулу синуса разности, получим: sin (3x - п/6) = 1/2.

X = $(-1)^k$ п/18+ п/18 +пk/3, k Є Z.

Самостоятельная работа .

- 1 уровень.

Решить уравнения:

1. $8\cos^2 x - 6\cos x - 5 = 0$.
2. $\sin^2 x + \sin x = 0$.
3. $\sin x - \cos x = 0$.
4. $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$.

2 уровень.

Решить уравнения:

1. $2\cos^2 x - 5\sin x + 1 = 0$.
2. $5\sin x - 2\sin x = 0$.
3. $5\sin x + 6\cos x = 0$.
4. $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2$.

3 уровень.

Решить уравнения:

1. $(1 - \cos 2x)/2 - 3\sin x = 4$.
2. $3\sin 2x - \cos x = 0$.
3. $3\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x - 5\cos^2 x = 0$.
4. $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$.

Домашнее задание:

1. Решите уравнения:
2. $4\sin x + 11\sin x - 3 = 0$
3. $5\sin^2 x + 6\cos x - 6 = 0$
4. $8\sin^2 x + \cos x + 1 = 0$
5. $2tg^2 x + 3tgx - 2 = 0$
6. $4\sin^2 x - 1 = 0$
7. $\cos 3x \cdot \cos 6x = \cos 4x \cdot \cos 7x$
8. $\cos^2 x + \cos x \cdot \sin x = 0$
9. $1 - 2\cos x \cdot \sin x + \sin x + \cos x = 0$
10. $\sqrt{3}tg\, x + 3 = 3/\cos^2 x$
11. $\sin x - \cos x = \sqrt{2}/2$
12. $3\sin x - 4\cos x = \sqrt{26}$
13. $\sin 2x + \sin^2 x = 4\cos^2 x$