

Алгебра высказываний

Лекция 3

Цель: ознакомить с понятиями ДНФ, СДНФ, сформировать навыки приведения высказываний к ДНФ и СДНФ, показать возможности применения алгебры высказываний при решении логических задач, упрощении переключательных схем

Дизъюнктивные нормальные формы (ДНФ)

Определение 1

Утверждение 2

Доказательство

A	a	A^a
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Определение 3

Конъюнкция логических переменных или их отрицаний называется *элементарной конъюнкцией (ЭК)*.

Общий вид элементарной конъюнкции:

Пример

Определение 4

Высказывание называется *дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ)*, если оно представляет собою дизъюнкцию элементарных конъюнкций.

Общий вид ДНФ:

Примеры

Теорема

Любое высказывание приводимо к ДНФ.

Схема приведения высказывания к ДНФ

- 1) Избавиться от импликации и эквивалентности, используя законы 16), 17)
- 2) Донести отрицания до переменных, используя законы Моргана.
- 3) Раскрыть скобки, используя дистрибутивные законы.
- 4) Упростить полученное высказывание.

Пример

Привести высказывание к ДНФ

Построение высказываний по таблице истинности. Совершенные дизъюнктивные нормальные формы (СДНФ)

Определение 1

Пусть X – некоторое множество логических переменных. Элементарная конъюнкция, в которую входят все логические переменные, называется *полной элементарной конъюнкцией* относительно множества X .

Пример

СДНФ

Определение 2

- Дизъюнктивная нормальная форма называется *совершенной* (СДНФ), если все составляющие ее элементарные конъюнкции являются полными.

Примеры

Приведение высказывания к СДНФ

Теорема

Высказывание, не являющееся тождественно ложным, приводимо к СДНФ.

Правило приведения высказывания к СДНФ

- СДНФ содержит столько полных элементарных конъюнкций, сколько единиц в последнем столбце таблицы истинности.
- Вид каждой полной элементарной конъюнкции определяется соответствующим набором значений переменных, а именно, если переменная принимает значение 0, то над ней в полной элементарной конъюнкции ставится отрицание, иначе – отрицание не ставится.

Пример

- Построить по таблице истинности СДНФ

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

— — — — —

Задача

- «Вернувшись домой, Мегрэ позвонил на набережную Орфевр.
- - Говорит Мегрэ. Есть новости?
- - Да, шеф. Поступили сообщения от инспекторов.
- Торранс установил, что если Франсуа был пьян, то либо Этьен убийца, либо Франсуа лжет.
- Жуссье считает, что или Этьен убийца, или Франсуа не был пьян и убийство произошло после полуночи.
- Инспектор Люка просил передать Вам, что если убийство произошло после полуночи, то либо Этьен убийца, либо Франсуа лжет.
- Затем звонила ...
- - Все. Спасибо. Этого достаточно. – Комиссар положил трубку. Он знал, что трезвый Франсуа никогда не лжет. Теперь он знал все.»
- Что знал Мегрэ?

Решение задачи

- Пусть
- $R = \langle \text{Франсуа был пьян} \rangle$
- $L = \langle \text{Франсуа лжет} \rangle$
- $I = \langle \text{Этьен убийца} \rangle$
- $U = \langle \text{Убийство произошло после полуночи} \rangle$
- Тогда получим высказывание

• Так как $R \wedge L \wedge I \wedge U$, то Этьен - убийца

Приложения алгебры высказываний.

Исследование переключательных схем

Переключательная схема — это схематическое изображение некоторого устройства, состоящего из переключателей и соединяющих их проводников, а также из входов и выходов, на которые подаётся и с которых снимается электрический сигнал.

Каждый переключатель X имеет только два состояния: замкнутое ($X=1$) и разомкнутое ($X=0$). .

Переключательные схемы



$$F=A$$

$$F=AB$$

Переключательные схемы

Пример 1

Переключательные схемы.

Пример 1

Переключательные схемы.

Пример 2

Переключательные схемы.

Пример 2

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>F</i>
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

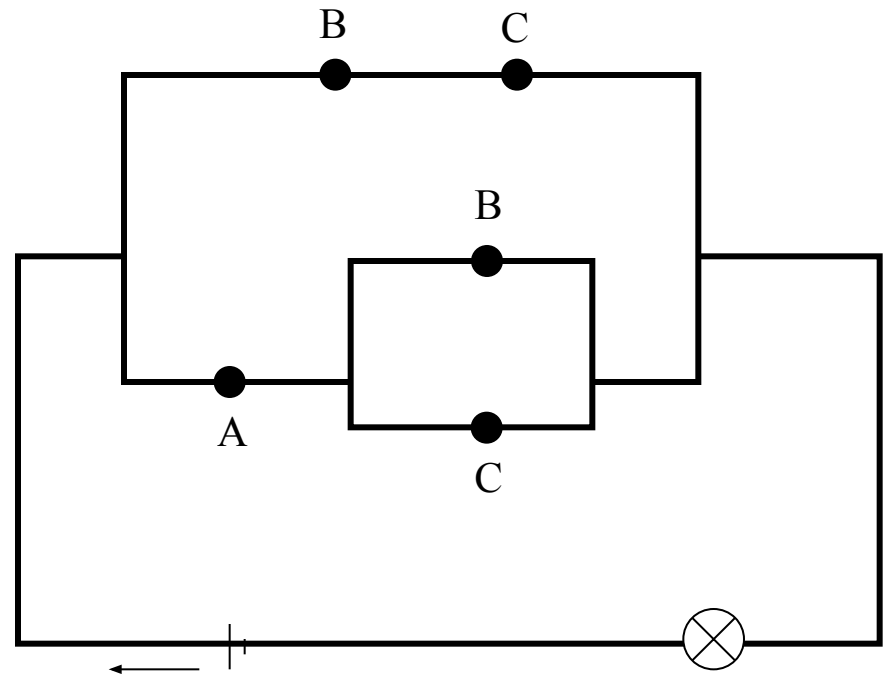
Задача на голосование

Построить контактную схему для оценки результатов спортивного соревнования тремя судьями при условиях: судья засчитавший результат, нажимает имеющуюся в его распоряжении кнопку, а судья, не засчитывающий результат, кнопки не нажимает. В случае, если кнопки нажали не менее двух судей, загорается лампочка (положительное решение судей принятое большинством голосов).

Задача на голосование

- Решение

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>F</i>
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



Задачи

2. Голосуют три человека А, В, С. Предложение принимается большинством голосов, причём С - председатель, обладающий правом вето, т. е. если он голосует "против", то предложение не принимается

Задачи

- 3. Голосуют три человека А, В, С. Предложение принимается большинством голосов, причём выполняются следующие условия:
- а) если С голосует "за", то В голосует "против";
- б) С голосует "против" тогда и только тогда, когда В голосует "за";
- в) если С голосует "за" или В голосует "за", то А голосует "против";
- г) А и В- коалиция, т. е. голосуют одинаково, а С им противоречит;
- д) С подозревает А и В в коалиции, т. е. если А и В голосуют одинаково, то С им противоречит;
- е) если С голосует "за", то А голосует "за" тогда и только тогда, когда В голосует "против";
- ж) если В голосует "за", то С голосует "против" тогда и только тогда, когда А голосует "против";
- з) если А голосует "за" или В голосует "против", то С голосует "за".