# Решение заданий В10 ЕГЭ (теория вероятностей)

ЧАСТЬ III По материалам ЕГЭ 2012г. Учитель математики г. Новочеркасска Черникова Людмила Антоновна

- Справочный материал

- # Решение задач с монетами

*Однотипные задачи под номерами одного цвета.*

*Чтобы увидеть решение задачи, кликните по тексту.*

*Чтобы увидеть ответ к задаче, кликните по кнопке:*

# • Справочный материал

## Классическое определение вероятности

**Вероятностью события А** называется отношение числа благоприятных для него исходов испытания к числу всех равновозможных исходов.

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где **m** - число исходов, благоприятствующих осуществлению события,

а **n** - число всех возможных исходов.

# Некоторые свойства и формулы

1. Вероятность достоверного события равна единице.
2. Вероятность невозможного события равна нулю.
3. Сумма вероятностей противоположных событий равна 1.
4. Формула сложения вероятностей совместных событий:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

5. Вероятность появления одного из двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

6. Вероятность произведения независимых событий A и B (наступают одновременно)вычисляется по формуле:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

7. Формула умножения вероятностей:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A),$$

где $P(B/A)$ – условная вероятность события B, при условии, что событие A наступило.

**8. Формула Бернулли – формула вероятности k успехов в серии из n испытаний**

$$P(A) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

**где $C_n^k$ – число сочетаний,**

**p – вероятность успеха,**

**q = 1 – p – вероятность неудачи.**

**При подбрасывании симметричной монеты, когда p = q = ½ , формула Бернулли принимает вид:**

$$P(A) = \frac{C_n^k}{2^n}.$$

**Например, вероятность выпадения орла дважды в трех испытаниях:**

$$P(A) = \frac{C_3^2}{2^3} = \frac{3}{8}.$$

# Некоторые методы решения задач

1. Большинство задач можно решить с помощью классической формулы вероятности:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

2. Задачи с монетами ( и игральной костью) при небольшом количестве подбрасываний удобно решать методом перебора комбинаций.

## Метод перебора комбинаций:

– выписываем все возможные комбинации орлов и решек. Например, ОО,ОР,РО, РР. Число таких комбинаций – $n$;

– среди полученных комбинаций выделяем те, которые требуются по условию задачи (благоприятные исходы),– $m$;

– вероятность находим по формуле:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

3. При решении задач <u>с монетами</u> число всех возможных исходов можно посчитать по формуле $n = 2^N$,

где N – количество бросков, 2 – число исходов в одном испытании (орел или решка). Например, монету подбросили 3 раза, тогда число всех исходов $2^3 = 8$; четыре раза - $2^4 = 16$.

Аналогично при бросании кубика $n = 6^N$,

где N – количество бросков, 6 – число исходов в одном испытании (1, 2, 3, 4, 5 или 6). Например, кубик подбросили 3 раза, тогда число всех исходов - $6^3 = 216$.

4. Комбинаторный метод решения можно применять при подсчете количества исходов с помощью формул комбинаторики.

# •Решение задач с монетами

**21.** *В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно один раз.*

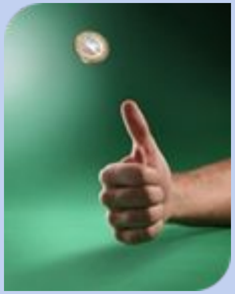
**Решение**

**Ответ:**

***I способ*** ***(метод перебора комбинаций)***

*Монету бросают 2 раза.*

***Обозначения:*** *О – выпадение орла, Р – выпадение решки, {О Р}- выпадение орла в первом броске, решки – во втором.*

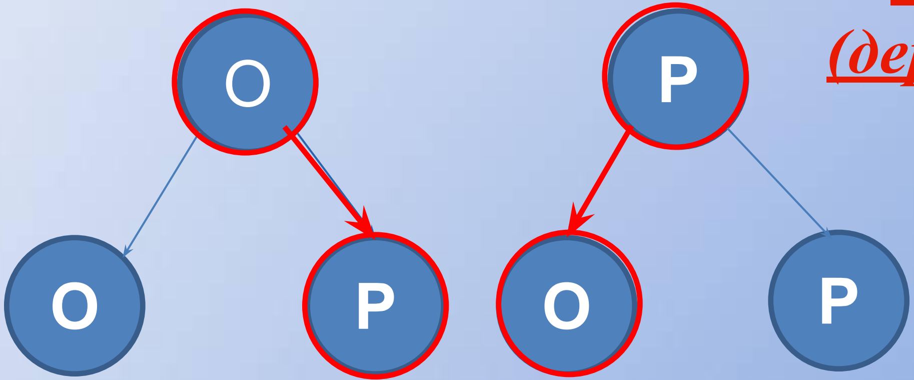


$n = 4$ – *число всех возможных исходов:*

$m = 2$ – *число благоприятных исходов (выпадение орла ровно один раз)*

{О О}
{О Р}
{Р О}
{Р Р}

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{4} = 0{,}5$$




## II способ

## (дерево возможных вариантов)

$m = 4$ $\quad$ $n = 2$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{4} = 0,5$$

## IIIспособ

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B),$$

где событие $C$ – орел выпал в двух испытаниях ровно 1 раз; событие $A$ – орел выпал в первом испытании и не выпал во втором; событие $B$ – орел выпал во втором испытании и не выпал в первом;

$p = ½$– вероятность выпадения орла в одном испытании,

$q = 1 – ½ = ½$ – вероятность не выпадения орла (выпадения решки).

$$P(A) = p \cdot q = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = q \cdot p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(C) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = 0,5$$

## IVспособ

***По формуле Бернулли***

$$P(A)=C_n^k p^k q^{n-k}$$

$$P(A)=\frac{C_n^k}{2^n}$$

***вероятность одного успеха (к=1)***
***в двух испытаниях (n=2), если***
***p = ½ – вероятность выпадения орла в одном испытании,***
***q =1 – ½ = ½ – вероятность не выпадения орла (выпадения решки).***

$$P(A)=C_2^1 p^1 q^{2-1}=\frac{2!}{1!(2-1)!}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=0{,}5.$$

***Или по второй формуле:***

$$P(A)=\frac{C_2^1}{2^2}=\frac{2}{4}=0{,}5.$$

***Ответ: 0,5***

**22.** Перед началом матча по футболу судья бросает монету, чтобы определить, какая из команд будет первой владеть мячом. Команда «Меркурий» играет по очереди с командами «Марс», «Юпитер», «Уран». Найти вероятность того, что во всех матчах право владеть мячом получит команда «Меркурий».

## Решение

Ответ:

### I способ (перебора комбинаций)

Монету бросают 3 раза.

Для команды «Меркурий» возможные исходы в трех бросках →

$n = 8$ – число всех возможных исходов;

$m = 1$ – число благоприятных исходов (выпадение орла в трех бросках).

{О О О}
{Р О О}
{О Р О}
{О О Р}
{Р Р О}
{Р О Р}
{О Р Р}
{Р Р Р}

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{8} = 0,125$$

## II способ

**По формуле Бернулли вероятность трех успехов (к = 3) в трех испытаниях (n = 3):**

$$P(A) = C_n^k p^k q^{n-k} = C_3^3 p^3 q^{3-3} = \frac{3!}{3!(3-3)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

## III способ

**Применим правило умножения вероятностей независимых событий.**

**Вероятность выпадения орла в каждом случае равна ½. Значит, вероятность того, что орел выпадет все три раза, равна:**

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

**Ответ: 0,125**

**23.** ***Перед началом матча по футболу судья бросает монету, чтобы определить, какая из команд будет первой владеть мячом. Команда «Байкал» играет по очереди с командами «Амур», «Енисей», «Иртыш». Найти вероятность того, что команда «Байкал» будет первой владеть мячом только в игре с «Амуром».***

***Ответ:***

***Решение***

***Монету бросают 3 раза.***
***Для команды «Байкал»***
***возможные исходы в трех бросках →***

{О О О}
{Р О О}
{О Р О}
{О О Р}
{Р Р О}
{Р О Р}
{О Р Р}
{Р Р Р}

$n = 8$ – *число всех возможных исходов;*

$m = 1$ – *число благоприятных исходов (выпадение орла в первой игре).*

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

***Ответ: 0,125***

**24. У Пети в кармане лежат шесть монет: четыре монеты по рублю и две монеты по два рубля. Петя, не глядя, переложил какие-то три монеты в другой карман. Найдите вероятность того, что теперь две двухрублевые монеты лежат в одном кармане.**

**Ответ:**

## Решение

### Iспособ (метод перебора вариантов):

Пронумеруем монеты: рублевые – 1, 2, 3, 4;
двухрублевые – 5, 6.

$n = 20$ – число всех исходов

Взять три монеты можно так:
(числа в порядке возрастания, чтобы не пропустить комбинацию) →

$m = 8$ – число благоприятных исходов
(комбинации, в которых монеты 5 и 6 (двухрублевые) не взяты или взяты обе)

| | |
|---|---|
| {123} | {234} |
| {124} | {235} |
| {125} | {236} |
| {126} | {245} |
| {134} | {246} |
| {135} | {256} |
| {136} | {345} |
| {145} | {346} |
| {146} | {356} |
| {156} | {456} |

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{8}{20} = 0{,}4$$

## IIспособ (комбинаторный):

**P(C) = P(A) + P(B)**, где событие **C** – двухрублевые монеты лежат в одном кармане;

событие **A** – двухрублевые монеты остались в кармане, а переложил рублевые;

событие **B** – переложил обе двухрублевые монеты и одну рублевую;

события A и B несовместные.

$$P(A) = \frac{C_4^3}{C_6^3} = 0{,}2$$

$$P(B) = \frac{C_4^1 C_2^2}{C_6^3} = 0{,}2$$

$$P(C) = 0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}4$$

## III способ (непосредственного вычисления вероятности):

Монеты окажутся в одном кармане, если переложены три рублевые или две рублевые и одна двухрублевая монета. Переложить их **последовательно** можно четырьмя способами (обозначения: рублевая – 1, двухрублевая – 2) :

**1 1 1** $$P_1 = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{5}$$

**1 2 2** $$P_2 = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{15}$$

**2 2 1** $$P_3 = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{4} = \frac{1}{15}$$

**2 1 2** $$P_4 = \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{15}$$

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} = \frac{6}{15} = 0{,}4$$

**Ответ: 0,4**

**25.** ***У Пети в кармане лежат шесть монет: четыре монеты по рублю и две монеты по два рубля. Петя, не глядя, переложил какие-то три монеты в другой карман. Найдите вероятность того, что теперь две двухрублевые монеты лежат в разных карманах.***

***Ответ:***

## Решение

### Iспособ (метод перебора вариантов):

*Пронумеруем монеты: рублевые – 1, 2, 3, 4;*

*двухрублевые – 5, 6.*

$n = 20$ *– число всех исходов*

*Взять три монеты можно так:*
*(числа в порядке возрастания, чтобы не пропустить комбинацию) →*

| | |
|---|---|
| {123} | {234} |
| {124} | {235} |
| {125} | {236} |
| {126} | {245} |
| {134} | {246} |
| {135} | {256} |
| {136} | {345} |
| {145} | {346} |
| {146} | {356} |
| {156} | {456} |

$m = 12$ *– число благоприятных исходов (комбинации, в которых монеты 5 и 6 (двухрублевые) взяты по одной)*

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{12}{20}=0,6$$

## IIспособ (комбинаторный)

**Событие А - переложили две рублевые монеты и одну двухрублевую.**

$$P(A) = \frac{C_4^2 C_2^1}{C_6^3} = 0,6$$

## III способ

**Монеты окажутся в разных карманах, если переложены две рублевые и одна двухрублевая монета.**
**Переложить их последовательно можно тремя способами:,**

**1 1 2**

$$P_1 = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{5} = 0,2$$

**1 2 1**

$$P_2 = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{5} = 0,2$$

**2 1 1**

$$P_3 = \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{5} = 0,2$$

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = 0,2 + 0,2 + 0,2 = 0,6$$

**Ответ: 0,6**

**26.** ***Найти вероятность того, что произведение трех последних цифр случайно выбранного телефонного номера четно .***

***Решение*** ***Ответ:***

***I способ***

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

## II способ

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

*m* = (5 · 5 · 5)· 3 + (5 · 5 · 5)· 3 + (5 · 5 · 5) = 875

(5 · 5 · 5)· 3 – количество исходов, когда одна цифра четная, а две другие нечетные (для каждой цифры исходов – 5, вариантов расположения – 3).

(5 · 5 · 5)· 3 – количество исходов, когда две цифры четные, а одна – нечетная,

5 · 5 · 5 – количество исходов, когда все три цифры – четные.

*n* = 10 · 10 · 10 = 1000 – количество всех исходов ( для каждой цифры – 10)

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

## III способ

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

$$P(A) = \frac{m}{n},$$


## IV способ

***Выбор четной или нечетной цифры можно сравнить с выпадением орла или решки при подбрасывании монеты несколько раз с такой же вероятностью. Тогда выбор трех нечетных цифр аналогичен выпадению трех решек в трех испытаниях***

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

***Ответ: 0,875***

# Задачи с монетами

21. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно один раз.

22. Перед началом матча по футболу судья бросает монету, чтобы определить, какая из команд будет первой владеть мячом. Команда «Меркурий» играет по очереди с командами «Марс», «Юпитер», «Уран». Найти вероятность того, что во всех матчах право владеть мячом получит команда «Меркурий».

23. Перед началом матча по футболу судья бросает монету, чтобы определить, какая из команд будет первой владеть мячом. Команда «Байкал» играет по очереди с командами «Амур», «Енисей», «Иртыш». Найти вероятность того, что команда «Байкал» будет первой владеть мячом только в игре с «Амуром».

24. У Пети в кармане лежат шесть монет: четыре монеты по рублю и две монеты по два рубля. Петя, не глядя, переложил какие-то три монеты в другой карман. Найдите вероятность того, что теперь две двухрублевые монеты лежат в одном кармане.

25. У Пети в кармане лежат шесть монет: четыре монеты по рублю и две монеты по два рубля. Петя, не глядя, переложил какие-то три монеты в другой карман. Найдите вероятность того, что теперь две двухрублевые монеты лежат в разных карманах.

26. Найти вероятность того, что произведение трех последних цифр случайно выбранного телефонного номера четно.

# Источники: :


1. И.Р. Высоцкий, И.В. Ященко Рабочая тетрадь ЕГЭ 2012 Математика .Задача В10
2. Первое сентября. Математика, январь, март 2012
3. ЕГЭ 3000 задач с ответами. Математика. Все задания группы В. Закрытый сегмент / А.Л. Семенов, И.В. Ященко, и др. /– Издательство «Экзамен», 2012.
4. http://mathege.ru Открытый банк заданий по математике
5. http://www.postupivuz.ru
6. http://alexlarin.com
7. http://www.berdov.com
8. http://www.youtube.com