# Лекция 2. Формулы алгебры высказываний.

**Простые высказывания:**

A2: «Уфа находится на берегу Волги»

A3: «Все люди смертны»

A7: «А.С.Пушкин – великий русский математик»

Конструируем **составное высказывание**:

«Если Уфа находится на берегу Волги и все люди смертны, то А.С. Пушкин – великий русский математик».

$$\left(A_2 \wedge A_3\right) \to A_7$$

$\lambda(A_2) = 0,\ \lambda(A_3) = 1,\ \lambda(A_7) = 0$

по соотношениям (1.4), (1.2) и определениям 1.7,1.3

$$\lambda\left(\left(A_2 \wedge A_3\right) \to A_7\right) = \lambda\left(A_2 \wedge A_3\right) \to \lambda\left(A_7\right) = \left(\lambda\left(A_2\right) \wedge \lambda\left(A_3\right)\right) \to \lambda\left(A_7\right) =$$

$$= \left(0 \wedge 1\right) \to 0 = 0 \to 0 = 1$$

$$(X \wedge Y) \rightarrow Z$$

$A_1$: «Москва – столица России»
$A_3$: «Все люди смертны»
$A_6$: «7<4»

$$\lambda((A_1 \wedge A_3) \rightarrow A_6)$$

$$\lambda((A_1 \wedge A_3) \rightarrow A_6) = \lambda(A_1 \wedge A_3) \rightarrow \lambda(A_6) = (\lambda(A_1) \wedge \lambda(A_3)) \rightarrow \lambda(A_6) =$$
$$= (1 \wedge 1) \rightarrow 0 = 1 \rightarrow 0 = 0$$

$(X \wedge Y) \rightarrow Z$ - Формула конструирования сложного высказывания

# Формула АВ

P,Q,R,S,X,Y,Z – пропозициональные переменные. Принимают значения из множества всех высказываний .

Формула АВ или п.п.ф. (правильно построенная формула):

Опр. 2.1

1. Каждая отдельно взятая пропозициональная переменная есть формула АВ.
2. Если $F_1$ и $F_2$ - формулы АВ, то выражения

$\neg F_1$, $(F_1 \wedge F_2)$, $(F_1 \vee F_2)$, $(F_1 \rightarrow F_2)$, $(F_1 \leftrightarrow F_2)$ также являются формулами АВ.

3. Никаких других формул АВ, кроме получающихся согласно п.1 и п.2, нет.

# Примеры формул

$P, Q, R, X, Y, Z$ - формулы по п.1

по п.2 можно построить:

$\neg P, \neg Q, \neg X, \neg Y, \neg Z, (P \vee R), (X \wedge Y), (X \to Z), (Q \leftrightarrow R)$

из построенных снова по п.2 строим дальше:

$(\neg P \wedge \neg Q), (P \wedge \neg P), ((X \wedge Y) \to Z), ((X \to Z) \wedge (Q \vee R))$

# Выражения, не являющиеся формулами

$((XY) \to Z)$

$((P \neg Q) \wedge (P \to \neg R))$, $(P \wedge Q \vee R)$, $((X \to) \wedge Z)$,

$(X \vee \neg Y) \to (\neg X \wedge \neg Y)$

Внешние скобки можно опускать, но если формула входит в более сложную, то внешние скобки обязательны!

# Логическое значение составного высказывания

$F(X_1, X_2, ..., X_n)$ - формула АВ

$X_1, X_2, ..., X_n$ - пропозициональные переменные

$A_1, A_2, ..., A_n$ - конкретные высказывания

$F(A_1, A_2, ..., A_n)$ - конкретизация формулы $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ на наборе высказываний $A_1, A_2, ..., A_n$.

**Теорема 2.2.** *Логическое значение составного высказывания $F(A_1, A_2, ..., A_n)$ равно значению формулы $F(X_1, X_2, ... X_n)$ на наборе $\lambda(A_1)$, $\lambda(A_2)$, ..., $\lambda(A_n)$ логических значений составляющих высказываний $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$, т.е.*

$$\lambda(F(A_1, A_2, ..., A_n)) = F(\lambda(A_1), \lambda(A_2), ..., \lambda(A_n)).$$

**БИ.** Пусть в формуле $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ 0 логических операций, k=0

$$F(X_1, X_2, ..., X_n) \equiv F(X_1)$$

$$\lambda(A_1) = \lambda(A_1)$$

Если k=1, то $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ имеет вид

$$\neg X_1, (X_1 \wedge X_2), (X_1 \vee X_2), (X_1 \rightarrow X_2), (X_1 \leftrightarrow X_2)$$

тогда утверждение теоремы – равенство (1.1)-(1.5)

**ПИ.** Предположим, что $\lambda(F(A_1, A_2, ..., A_n)) = F(\lambda(A_1), \lambda(A_2), ..., \lambda(A_1))$ для всех формул, содержащих не более k логических операций.

**ШИ**. Пусть $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ содержит k+1 символов операций. Тогда (п.2) оно имеет вид

$\neg F_1, (F_1 \wedge F_2), (F_1 \vee F_2), (F_1 \rightarrow F_2), (F_1 \leftrightarrow F_2)$, где $F_1, F_2$ содержат не более k операций

для случая $F = (F_1 \wedge F_2)$:

$$\lambda(F(A_1, A_2, ..., A_n)) = \lambda(F_1(A_1, A_2, ..., A_n) \wedge F_2(A_1, A_2, ..., A_n)) = (onp.1.3)$$

$$= \lambda(F_1(A_1, A_2, ..., A_n) \wedge \lambda(F_2(A_1, A_2, ..., A_n) = \text{по ПИ}$$

$$= F_1(\lambda(A_1), \lambda(A_2), ..., \lambda(A_1)) \wedge F_2(\lambda(A_1), \lambda(A_2), ..., \lambda(A_1)) = \text{т.к.} F = (F_1 \wedge F_2)$$

$$= F(\lambda(A_1), \lambda(A_2), ..., \lambda(A_1))$$

ч.т.д.

Доказать для остальных случаев (1 балл за случай)

# Составление таблиц истинности

Пример 2.3 $F(X,Y)=(X\rightarrow Y)\vee(Y\rightarrow X)$

| $\lambda(X)$ | $\lambda(Y)$ | $\lambda(X\rightarrow Y)$ | $\lambda(Y\rightarrow X)$ | $\lambda((X\rightarrow Y)\vee(Y\rightarrow X))$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

# Пример 2.4 $F(P,Q,R)=(P\wedge Q)\to(P\leftrightarrow\neg R)$

| $\lambda(P)$ | $\lambda(Q)$ | $\lambda(R)$ | $\lambda(P\wedge Q)$ | $\lambda(\neg R)$ | $\lambda(P\leftrightarrow\neg R)$ | $\lambda(F)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

# Классификация формул АВ

Формула $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется **выполнимой**, если некоторая её конкретизация является истинным высказыванием, т.е. сущест $A_1, A_2, \ldots, A_n$ такие, что $\lambda(F(A_1, A_2, \ldots, A_n)) = 1$ .

Формула $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется **тавтологией** или **тождественно истинной**, если любая её конкретизация является истинным высказы $A_1, A_2, \ldots, A_n$ . $\lambda(F(A_1, A_2, \ldots, A_n)) = 1$

для люб $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ .

Формула называется **опровержимой**, если некотор $A_1, A_2, \ldots, A_n$ конкрет $\lambda(F(A_1, A_2, \ldots, A_n)) = 0$ ложным высказыванием, т.е. существуют

такие, чт $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ . .

Формула называется тождественно ложной или противо $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $\lambda(F(A_1, A_2, \ldots, A_n)) = 0$ нкретизация является ложным высказыванием, т.е. для любых . .