Логическое следование формул

Определение. Формула Φ называется *логическим следствием формул* $\Phi_1,\ldots,\Phi_m$, если при любой подстановке в эти формулы вместо их переменных $X_1,\ldots,X_n$ конкретных высказываний $A_1,\ldots,A_n$ из истинности высказываний $\Phi_1(A_1,\ldots,A_n),\ldots,\Phi_m(A_1,\ldots,A_n)$ следует истинность высказывания $\Phi(A_1,\ldots,A_n)$.

Символическое обозначение $\Phi_1,\ldots,\Phi_m \models \Phi$ - называется *логическим следованием*.

Формулы $\Phi_1,\ldots,\Phi_m$ называются *посылками* и формула Φ – *следствием* логического следования $\Phi_1,\ldots,\Phi_m \models \Phi$.

Определение. Множество формул $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ называется *противоречивым*, если из него логически следует любая (в том числе и тождественно ложная) формула Φ. Символически это записывается $\Phi_1, \ldots, \Phi_m \models$.

В противном случае множество формул $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ называется *выполнимым*.

Лемма (Транзитивность логического следования). Если $\Phi_1,\ldots,\Phi_m \models \Phi$ и для любого значения $1 \le i \le m$ выполняется $\Psi_1,\ldots,\Psi_k \models \Phi_i$, то $\Psi_1,\ldots,\Psi_k \models \Phi$.

Лемма (Критерии логического следования). Условие $\Phi_1,\ldots,\Phi_m \models \Phi$ равносильно каждому из следующих условий:

a) $\Phi_1 \wedge \ldots \wedge \Phi_m \models \Phi$,

b) $\models \Phi_1 \wedge \ldots \wedge \Phi_m \Rightarrow \Phi$,

c) $\Phi_1, \ldots, \Phi_m, \neg\Phi \models$.

В частности, $\Phi \models \Psi$ равносильно $\models \Phi \Rightarrow \Psi$. Отсюда также следует, что $\Phi = \Psi$ равносильно тому, что $\Phi \models \Psi$ и $\Psi \models \Phi$.

Основные правила логического следования:

1) *правило отделения* (или правило *модус понененс* – от латинского modus ponens)

$$\Phi, \Phi \Rightarrow \Psi \models \Psi;$$

2) *правило контрапозиции*

$$\Phi \Rightarrow \Psi \models \neg\Psi \Rightarrow \neg\Phi;$$

3) *правило цепного заключения*

$$\Phi_1 \Rightarrow \Phi_2, \Phi_2 \Rightarrow \Phi_3 \models \Phi_1 \Rightarrow \Phi_3;$$

4) *правило перестановки посылок*

$$\Phi_1 \Rightarrow (\Phi_2 \Rightarrow \Phi_3) \models \Phi_2 \Rightarrow (\Phi_1 \Rightarrow \Phi_3).$$

Вывод: Следующие задачи равносильны:

а) проверка тождественной истинности формул;

б) проверка логического следования формул;

в) проверка тождественной ложности формул;

г) проверка противоречивости множества формул.

Методы проверки тождественной истинности формул

Основные методы проверки тождественной истинности формул:

1. Прямой метод.
2. Алгебраический метод.
3. Алгоритм Квайна.
4. Алгоритм редукции.
5. Метод семантических таблиц.
6. Метод резолюций.

Метод резолюций в алгебре высказываний

Следующие задачи равносильны:

а) проверка тождественной истинности формул;

б) проверка логического следования формул;

в) проверка тождественной ложности формул;

г) проверка противоречивости множества формул;

д) **проверка противоречивости множества дизъюнктов**.

Определение. Пусть для некоторой переменной X дизъюнкты D_1, D_2 представимы в виде $D_1 = D_1' \vee X$, $D_2 = D_2' \vee \neg X$. Тогда дизъюнкт $D_1' \vee D_2'$ называется *резольвентой дизъюнктов* D_1, D_2 по переменной X и обозначается $\mathrm{Res}_X(D_1, D_2)$.

Резольвента дизъюнктов D_1, D_2 по некоторой переменной X называется *резольвентой дизъюнктов* D_1, D_2 и обозначается $\mathrm{Res}(D_1, D_2)$. По определению $\mathrm{Res}(X, \neg X) = 0$.

Свойство. Если $D_1 = D_1' \vee X$, $D_2 = D_2' \vee \neg X$. выполнимы, то выполнима $\mathrm{Res}_X(D_1, D_2)$.

Определение. *Резолютивным выводом формулы* Ф из множества дизъюнктов $S = \{D_1, \ldots, D_m\}$ называется такая последовательность формул $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$, что:

1) $\Phi_n = \Phi$;
2) каждая из формул Φ_i $(i=1,\ldots,n)$ либо принадлежит множеству S, либо является резольвентой $\Phi_i = \mathrm{Res}(\Phi_j, \Phi_k)$ предыдущих формул Φ_j, Φ_k при некоторых $1 \le j,k \le i$.

Теорема. Множество дизъюнктов $S = \{D_1, \dots, D_m\}$ противоречиво в том и только том случае, если существует резолютивный вывод значения 0 из множества S.

Так как по критерию логического следования соотношение

$$\Phi_1, \dots, \Phi_m \models \Phi$$

равносильно условию

$$\Phi_1, \dots, \Phi_m, \neg\Phi \models,$$

то справедлив следующий результат.

Следствие (Проверка логического следования формул).

Пусть для формул $\Phi_1, \dots, \Phi_n, \Phi$ формула $\Psi = \Phi_1 \wedge \dots \wedge \Phi_n \wedge \neg\Phi$ имеет КНФ $\Psi = D_1 \wedge \dots \wedge D_m$.

Тогда логическое следование $\Phi_1, \dots, \Phi_n \vDash \Phi$ равносильно существованию резолютивного вывода значения 0 из множества дизъюнктов $S = \{D_1, \dots, D_m\}$..

Алгоритм проверки логического следования формул $\Phi_1, \dots, \Phi_n \models \Phi$:

1. Составить формулу

$$\Psi = \Phi_1 \wedge \dots \wedge \Phi_n \wedge \neg\Phi$$

и найти ее КНФ

$$\Psi = D_1 \wedge \dots \wedge D_m.$$

2. Найти резолютивный вывод значения 0 из множества $S = \{D_1, \dots, D_m\}$.

3. Если такой вывод существует, то выполняется $\Phi_1, \dots, \Phi_n \models \Phi$.

Пример. Методом резолюций проверим логическое следование:

$$(\neg X \Rightarrow Z),(Y \Rightarrow W),((W \wedge Z) \Rightarrow V),\neg V \quad \models X \vee \neg Y.$$

Данное соотношение равносильно условию

$$(\neg X \Rightarrow Z),(Y \Rightarrow W),((W \wedge Z) \Rightarrow V),\neg V, \neg(X \vee \neg Y) \models,$$

т.е. условию противоречивости формулы

$$\Psi = (\neg X \Rightarrow Z) \wedge (Y \Rightarrow W) \wedge ((W \wedge Z) \Rightarrow V) \wedge \neg V \wedge \neg(X \vee \neg Y).$$

Найдем КНФ этой формулы:

$$\Psi = (X \vee Z) \wedge (\neg Y \vee W) \wedge (\neg(W \wedge Z) \vee V) \wedge \neg V \wedge (\neg X \wedge Y) =$$
$$= (X \vee Z) \wedge (\neg Y \vee W) \wedge (\neg W \vee \neg Z \vee V) \wedge \neg V \wedge \neg X \wedge Y \, .$$

Рассмотрим множество дизъюнктов

$$S = \{X \vee Z, \neg Y \vee W, \neg W \vee \neg Z \vee V, \neg V, \neg X, Y\} \, .$$

Построим резолютивный вывод значения 0 из этого множества S:

$$\Phi_1 = \mathrm{Res}_X(X \vee Z, \neg X) = Z,$$

$$\Phi_2 = \mathrm{Res}_Y(\neg Y \vee W, Y) = W,$$

$$\Phi_3 = \mathrm{Res}_Z(\neg W \vee \neg Z \vee V, Z) = \neg W \vee V,$$

$$\Phi_4 = \mathrm{Res}_W(\Phi_2, \Phi_3) = V,$$

$$\Phi_5 = \mathrm{Res}(\Phi_4, \neg V) = 0.$$

Таким образом, множество дизъюнктов формулы Ψ противоречиво и, значит, выполняется исходное логическое следование.

Алгоритм проверки тождественной истинности формулы Φ :

1. Рассмотреть формулу

$$\Psi = \neg\Phi$$

и найти ее КНФ

$$\Psi = D_1 \wedge \ldots \wedge D_m.$$

2. Найти резолютивный вывод значения 0 из множества $S = \{D_1, \ldots, D_m\}$.

3. Если такой вывод существует, то выполняется $\models \Phi$.