

ИНТЕГРАЛ

Площадь
криволинейной
трапеции



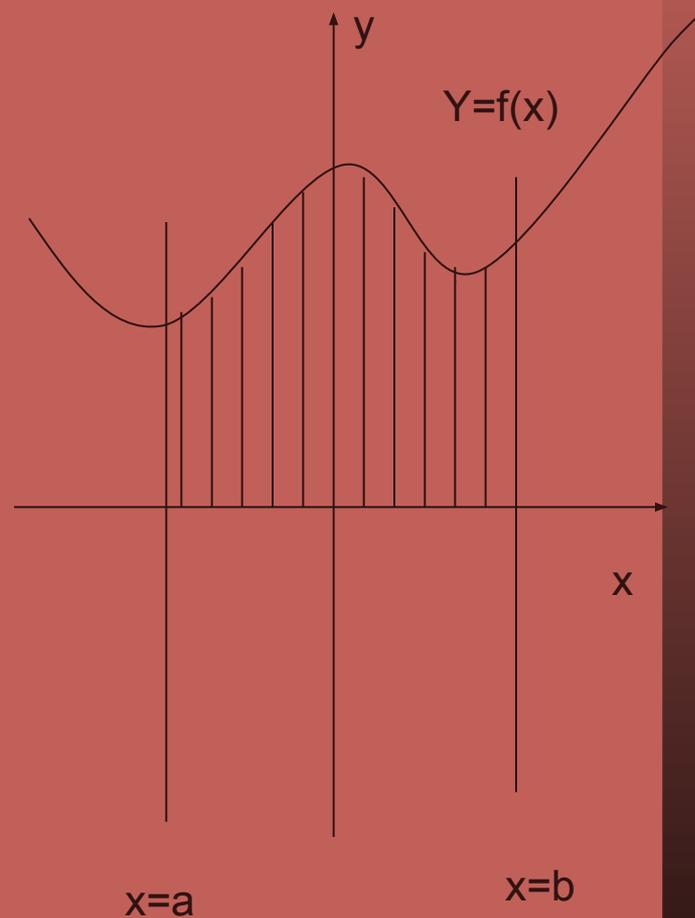
Содержание

- Определение криволинейной трапеции
- Примеры криволинейных трапеций
- Простейшие свойства определенного интеграла
- Алгоритм нахождения площади фигуры ограниченной линиями
- Формулы для нахождения площади различных фигур
- Пример вычисления площади фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 4 \cdot x + 5, y = 5$
- Дифференцированные задания для самоконтроля

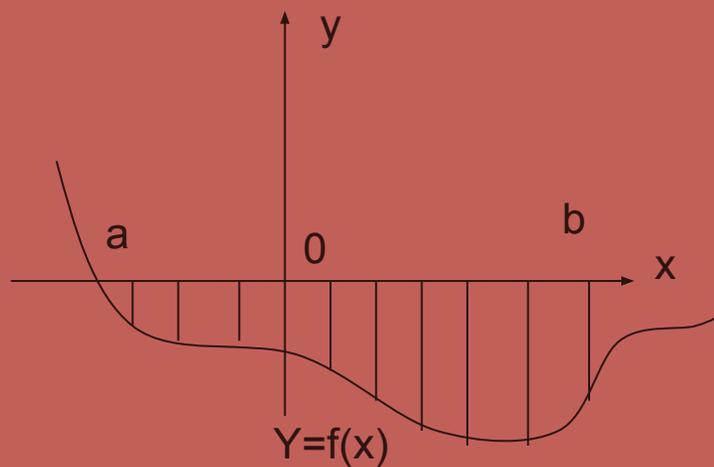
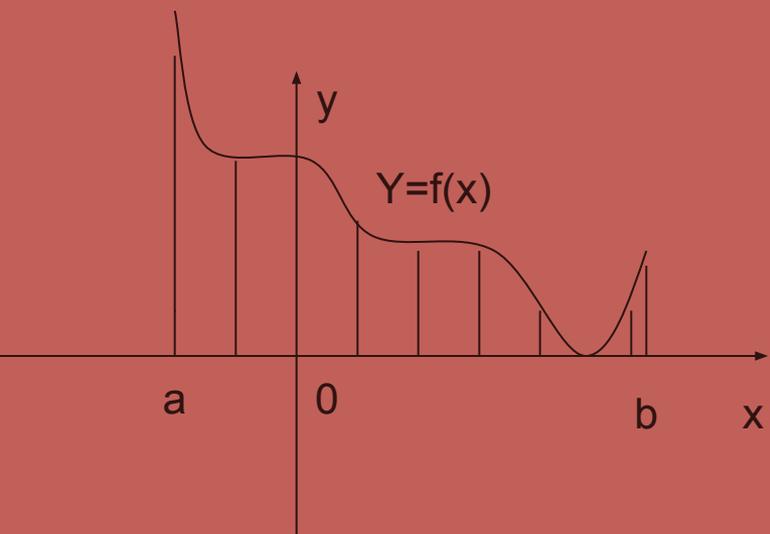
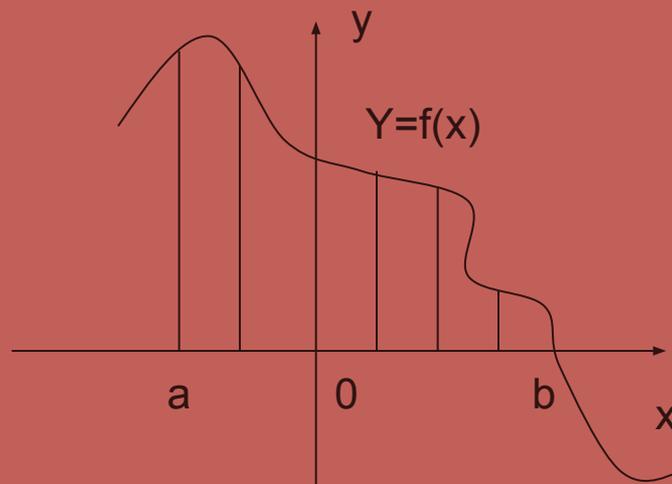
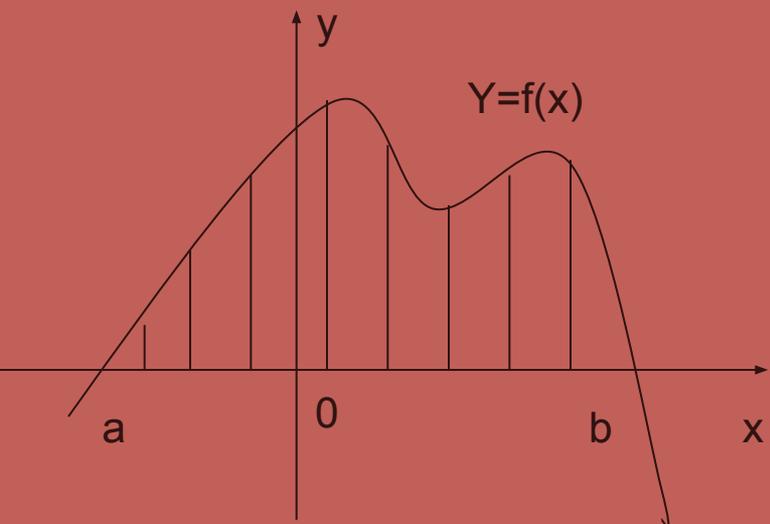


Определение

- Пусть на отрезке $[a;b]$ оси Ox задана непрерывная функция $f(x)$, не имеющая на нем знака. Фигуру, ограниченную графиком этой функции, отрезком $[a;b]$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, называют **криволинейной трапецией**.



Примеры



Алгоритм нахождения площади фигуры

Задача: Вычислить площадь фигуры ограниченной линиями $y=f(x)$ и $y=g(x)$.

1. Строим (точно) график данных функций.
2. Найдём абсциссы точек их пересечения (границы интегрирования) из уравнения: $f(x)=g(x)$.

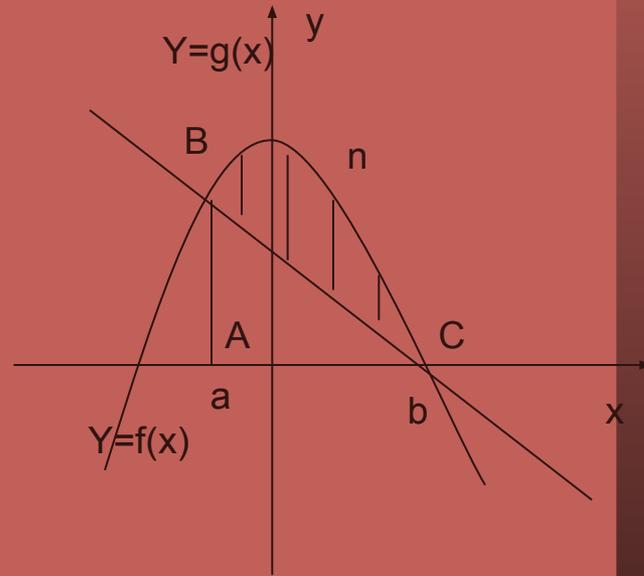
Решаем его, находим $x_1=a, x_2=b$.

3. Выделяем свою фигуру. Выясняем, является ли данная фигура криволинейной трапецией.

4. Ищем площадь данной фигуры: $S_{\text{фиг.}} = S_{\text{кр.трап.}ABnC} - S_{ABC}$

Площадь криволинейной трапеции находим $\int_a^b f(x)dx$ по формуле Ньютона-Лейбница: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

где $F(x)$ – первообразная для $f(x)$.



Формулы для нахождения площади различных фигур

1. Если криволинейная трапеция расположена ниже оси Ox ($f(x) < 0$), то её площадь можно найти по формуле :

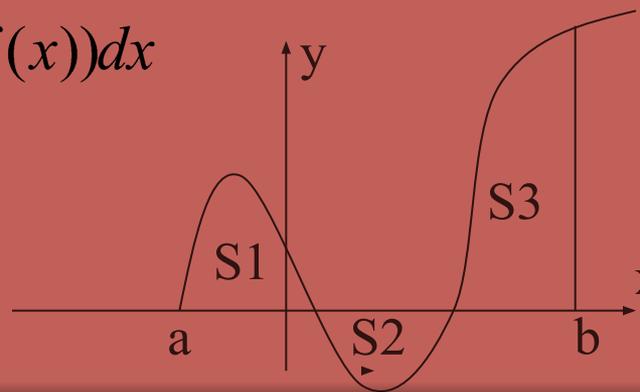
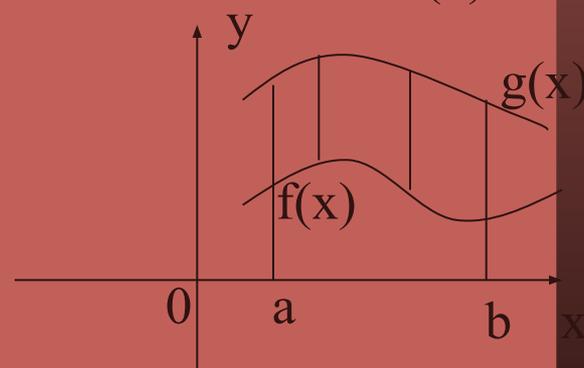
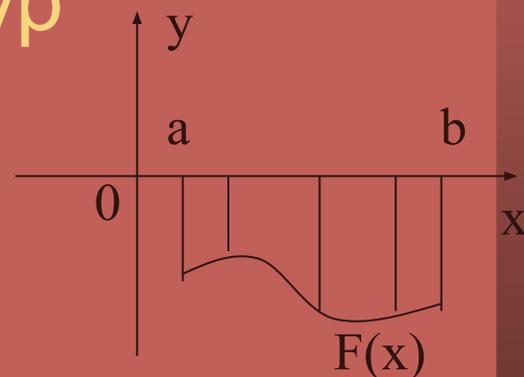
$$S = -\int_a^b f(x) dx$$

2. Если фигура ограничена кривыми $y=f(x)$ и $y=g(x)$, прямыми $x=a$, $x=b$ (при условии $f(x) \geq g(x)$), то её площадь можно вычислить по формуле:

$$S = \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx$$

3.

$$S = \int_a^b f(x) dx = S_1 - S_2 + S_3$$

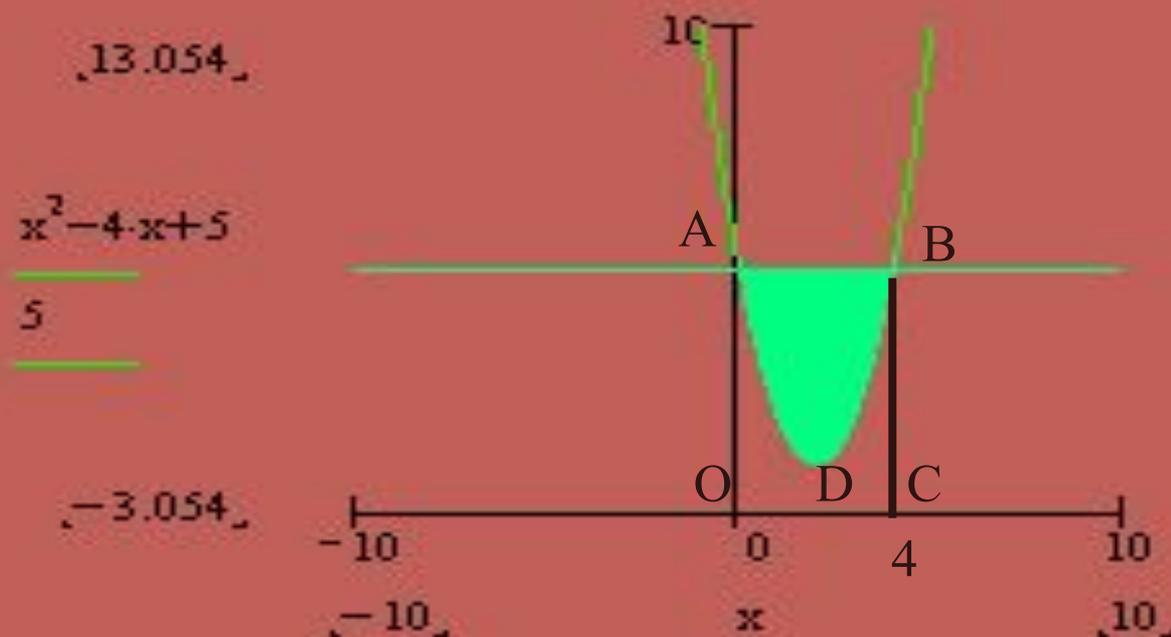


Пример

Задача: Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^2 - 4 \cdot x + 5, y = 5$$

- Строим графики данных функций.



2. Найдём пределы интегрирования:

$$x^2 - 4 \cdot x + 5 = 5$$
$$x^2 - 4 \cdot x = 0$$
$$x = 0 \quad x = 4$$

3. Данная фигура не является криволинейной трапецией, следовательно, искомую площадь можно получить как разность площадей прямоугольника $ABCO$ и криволинейной трапеции $AOCBD$.

$$S_{ABD} = S_{ABCD} - S_{AOCBD}$$

$$S_{ABCD} = AO \cdot OC = 5 \cdot 4 = 20$$

$$S_{AOCBD} = \int_0^4 (x^2 - 4 \cdot x + 5) dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2 \cdot x^2 + 5 \cdot x \right) \Big|_0^4 = \frac{64}{3} - 32 + 20 = 9 \frac{1}{3}$$

$$S_{ABD} = 20 - 9 \frac{1}{3} = 10 \frac{2}{3}$$



ЗАДАНИЯ НА "3"

- Вычислите площадь фигуры ограниченной линиями:

1. $y=4$, $x=-2$, $x=2$, $y = x^2$

Варианты ответа: а) 2; б) 4; в) 3,1; г) 6,5.

2. $y=5$, $y = x^2 + 5$

Варианты ответа: а) $5\frac{1}{3}$; б) 6; в) 8,4; г) 6.

3. $y=0$, $y=3$, $y = x^2$

Варианты ответа: а) 2 ; б) 0,5; в) 3; г) 6,1.



ЗАДАНИЯ НА "4"

- Вычислите площадь фигуры ограниченной линиями:

1. Осью Ox и $y = 1 - x^2$

Варианты ответа: а) $2/3$,б) $8/3$,в) $4/3$,г) $4/3$.

2. $y=0$, $x= \pi/2$, $y = \sin 2 \cdot x$

Варианты ответа: а) 2 ,б) 1 ,в) $1/2$,г) $3/2$.

3. $y=0$, $x=2$, $y = x^2$

Варианты ответа: а) 4 ,б) 8 ,в) $8/3$,г) 2.



ЗАДАНИЯ НА "5"

- Вычислите площадь фигуры ограниченной линиями:

1. $x=0$, $x=\pi/2$, $y=\sin x$, $y=\cos x$

Варианты ответа: а) $2\sqrt{2}-2$, б) $3/7$, в) $0,2$, г) 6 .

2. $y = \sqrt{x}$, $y = x^3$

Варианты ответа: а) $-5/2$, б) $3/8$, в) $0,4$, г) 3 .

3. $y = \frac{x}{2 \cdot x - 1}$ в точке с абсциссой $x_0=1$.

Варианты ответа: а) 2 , б) 8 , в) $0,6$, г) 37 .

4. Осью Ox и $y = -x^2 + 7 \cdot |x| - 10$

Варианты ответа: а) 2 , б) 6 , в) $0,5$, г) 50 .

