ИНТЕГРАЛ

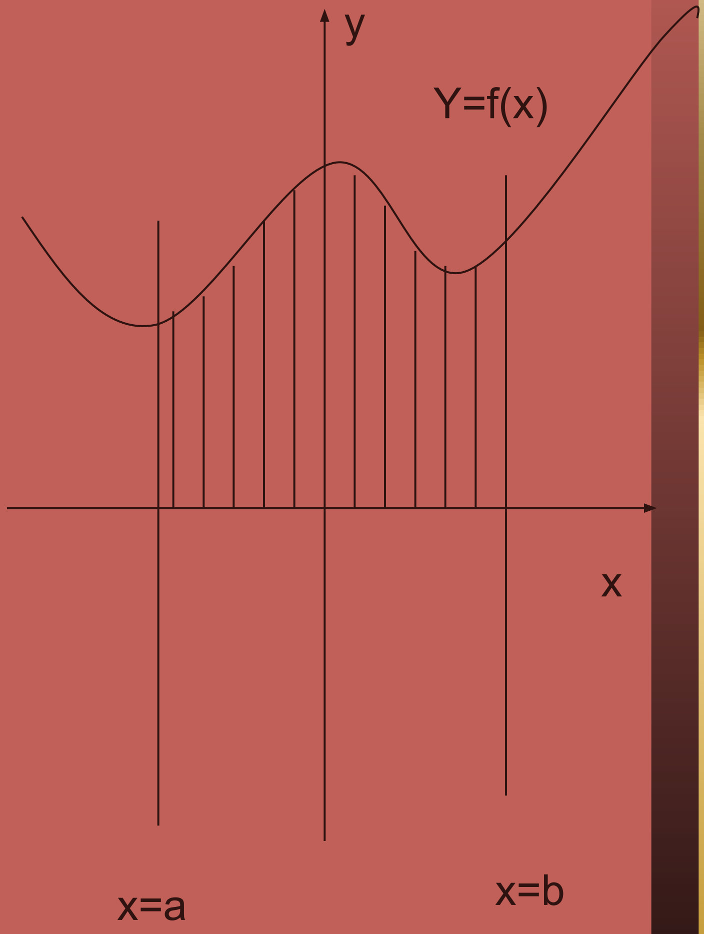
Площадь
криволинейной
трапеции

Содержание

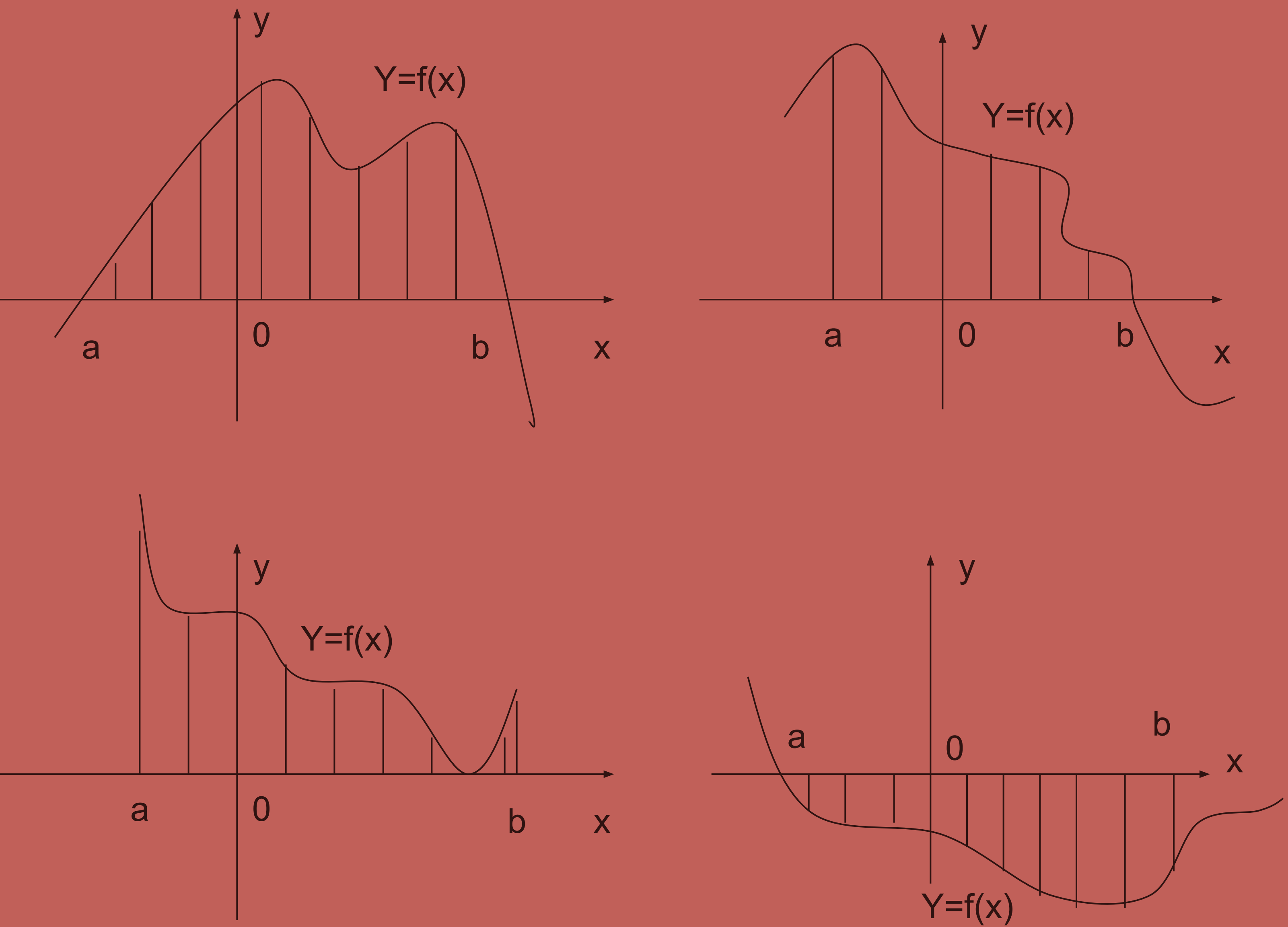
- Определение криволинейной трапеции
- Примеры криволинейных трапеций
- Простейшие свойства определенного интеграла
- Алгоритм нахождения площади фигуры ограниченной линиями
- Формулы для нахождения площади различных фигур
- Пример вычисления площади фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 4 \cdot x + 5, y = 5$
- Дифференцированные задания для самоконтроля

Определение

- Пусть на отрезке **[a;b]** оси **Ox** задана непрерывная функция **f(x)**, не имеющая на нем знака. Фигуру, ограниченную графиком этой функции, отрезком **[a;b]** и прямыми **x = a** и **x=b**, называют к р и в о л и н е й н о й т р а п е ц и е й.

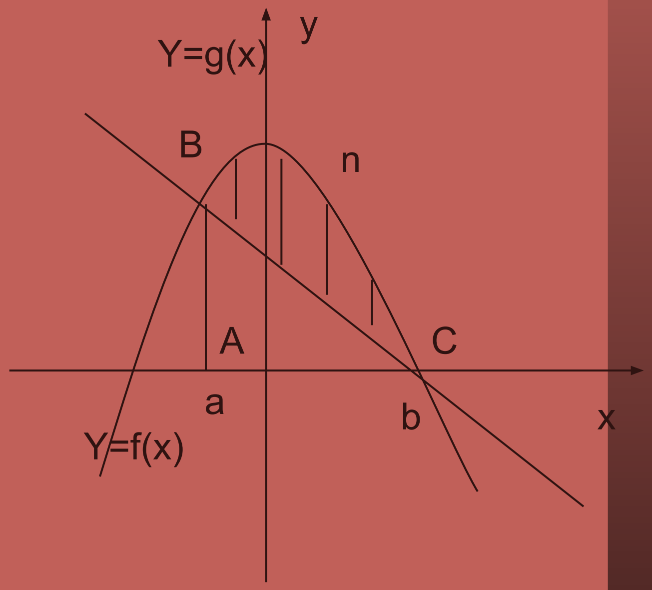


Примеры



Алгоритм нахождения площади фигуры

Задача: **Вычислить площадь фигуры ограниченной линиями y=f(x) и y=g(x).**



1. Строим (точно) график данных функций.
2. Найдём абсциссы точек их пересечения (границы интегрирования) из уравнения: **f(x)=g(x).**

Решаем его, находим **x1=a,x2=b**.

3. Выделяем свою фигуру. Выясняем, является ли данная фигура криволинейной трапецией.
4. Ищем площадь данной фигуры:

$$S_{фиг.} = S_{кр.трап.ABnC} - S_{ABC}$$

Площадь криволинейной трапеции находим по формуле Ньютона-Лейбница:

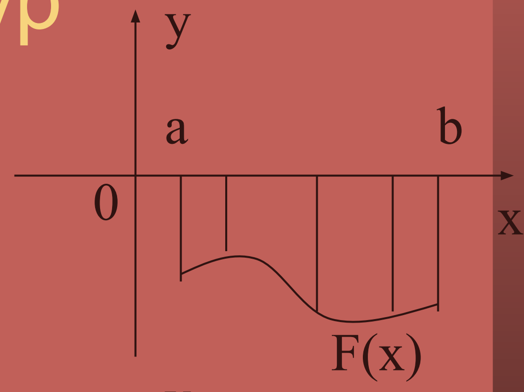
$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

где F(x) – первообразная для f(x).

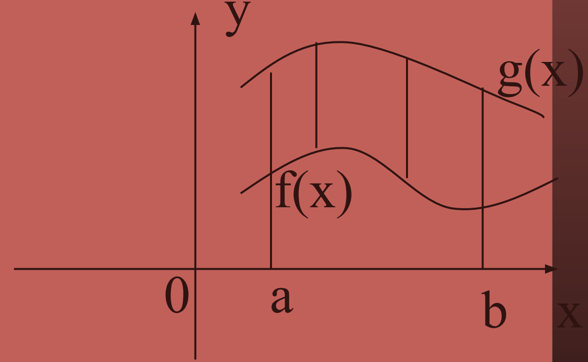
Формулы для нахождения площади различных фигур

1. Если криволинейная трапеция расположена ниже оси Ox (f(x)<0), то её площадь можно найти по формуле :

$$S=-\int_a^b f(x)dx$$



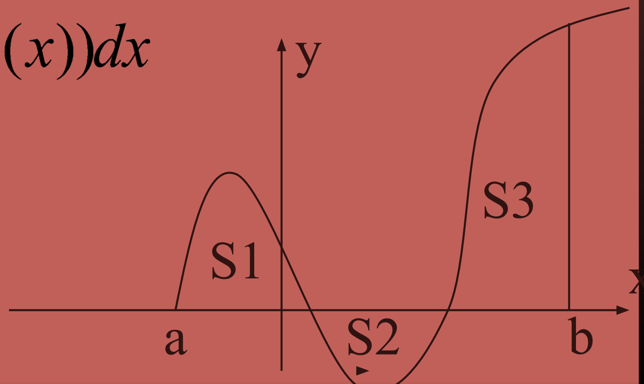
2. Если фигура ограничена кривыми y=f(x) и y=g(x), прямыми x=a, x=b (при условии $f(x)\geq g(x)$), то её площадь можно вычислить по формуле:



$$S=\int_a^b g(x)dx-\int_a^b f(x)dx=\int_a^b (g(x)-f(x))dx$$

3.

$$S=\int_a^b f(x)dx=S_1-S_2+S_3$$

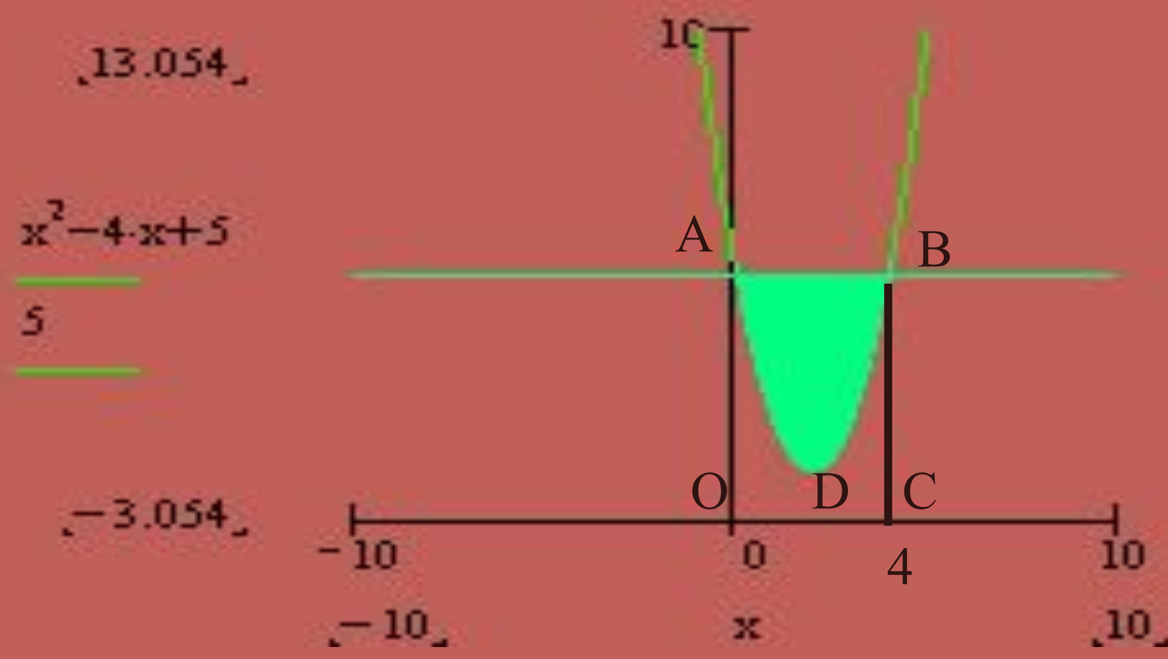


Пример

Задача: Вычислить площадь фигуры , ограниченной линиями

$$y = x^2 - 4 \cdot x + 5, y = 5$$

- Строим графики данных функций.



2. Найдём пределы интегрирования:

$$x^2 - 4 \cdot x + 5 = 5$$

$$x^2 - 4 \cdot x = 0$$

$$x = 0 \quad x = 4$$

3. Данная фигура не является криволинейной трапецией, следовательно, искомую площадь можно получить как разность площадей прямоугольника АВСО и криволинейной трапеции АОСВD.

$$S_{ABD} = S_{ABCD} - S_{AOCBD}$$

$$S_{ABCD} = AO \cdot OC = 5 \cdot 4 = 20$$

$$S_{AOCBD} = \int_0^4 (x^2 - 4 \cdot x + 5)dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2 \cdot x^2 + 5 \cdot x\right)\Bigg|_0^4 = \frac{64}{3} - 32 + 20 = 9\frac{1}{3}$$

$$S_{ABD} = 20 - 9\frac{1}{3} = 10\frac{2}{3}$$

ЗАДАНИЯ НА "3"

- Вычислите площадь фигуры ограниченной линиями:

1. y=4, x=-2, x=2, $y = x^2$

   Варианты ответа: а) 2; б) 4; в) 3,1; г) 6,5.

2. y=5, $y = x^2 + 5$

   Варианты ответа: а) $5\frac{1}{3}$; б) 6; в) 8,4; г) 6.

3. y=0, y=3, $y = x^2$

   Варианты ответа: а)2 ; б) 0,5; в) 3; г) 6,1.

ЗАДАНИЯ НА "4"

- Вычислите площадь фигуры ограниченной линиями:

1. Осью Ох и $y = 1 - x^2$

Варианты ответа: а)2/3 ,б)8/3 ,в)4/3 ,г)4/3.

2. у=0, х= π/2 , $y = \sin 2 \cdot x$

Варианты ответа: а) 2 ,б) 1 ,в) 1/2 ,г)3/2.

3. у=0, х=2, $y = x^2$

Варианты ответа: а) 4 ,б) 8 ,в) 8/3 ,г)2.

ЗАДАНИЯ НА "5"

- Вычислите площадь фигуры ограниченной линиями:

1. x=0, x=π/2, y=sin x, y=cos x

   Варианты ответа: а) $2\sqrt{2}-2$,б) 3/7, в)0,2, г)6.

2. $y=\sqrt{x}$, $y=x^3$

   Варианты ответа: а)-5/2, б) 3/8, в) 0,4, г) 3.

3. $y=\dfrac{x}{2\cdot x-1}$ в точке с абсциссой x0=1.

   Варианты ответа: а)2 ,б) 8, в)0,6, г)37.

4. Осью Ох и $y=-x^2+7\cdot|x|-10$

   Варианты ответа: а)2 ,б) 6, в)0,5, г)50.