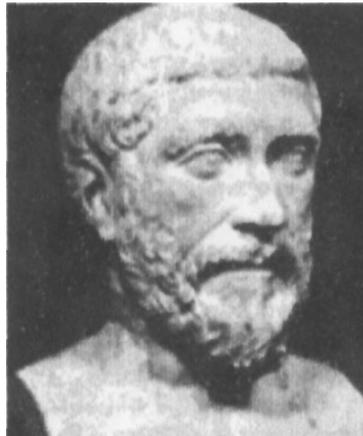


# Параметры

Электронное пособие-тренажер

Чистякова Н.П.

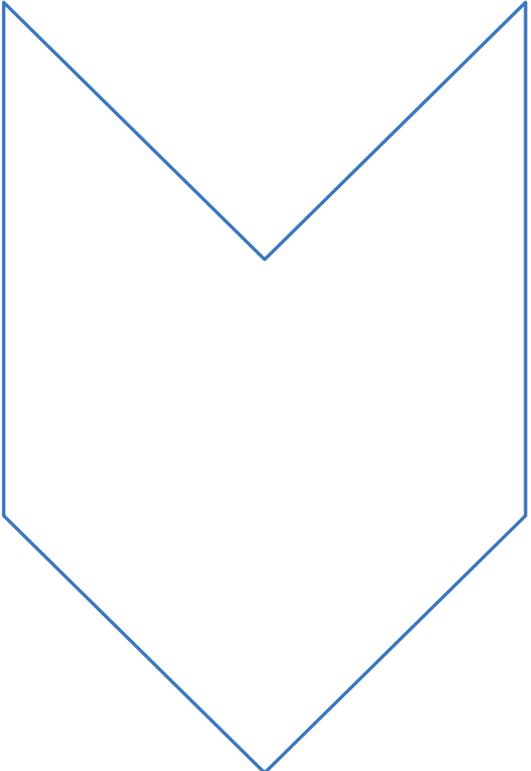
Не делай никогда того,  
чего ты не знаешь,  
но научись тому, что следует знать,  
и тогда ты будешь вести спокойную жизнь;  
переноси кротко свой жребий,  
каков он есть, и не ропщи на него;  
приучайся жить без роскоши.



Пифагор

# Программа

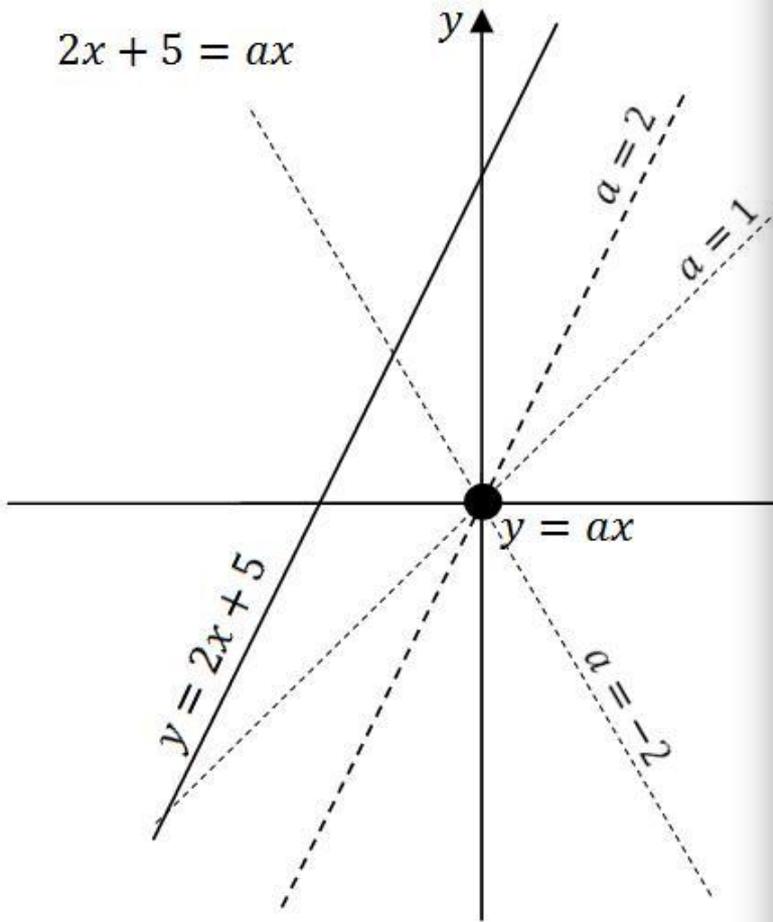
ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СВОЙСТВ  
КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ  
ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ,  
НЕРАВЕНСТВ И СИСТЕМ С  
ПАРАМЕТРАМИ

- 
- формирование представлений об идеях и методах решения уравнений, неравенств и систем с параметром;
  - овладение «языком параметра» в устной и письменной форме;
  - развитие алгоритмической культуры, логического мышления, интуиции и творческих способностей.

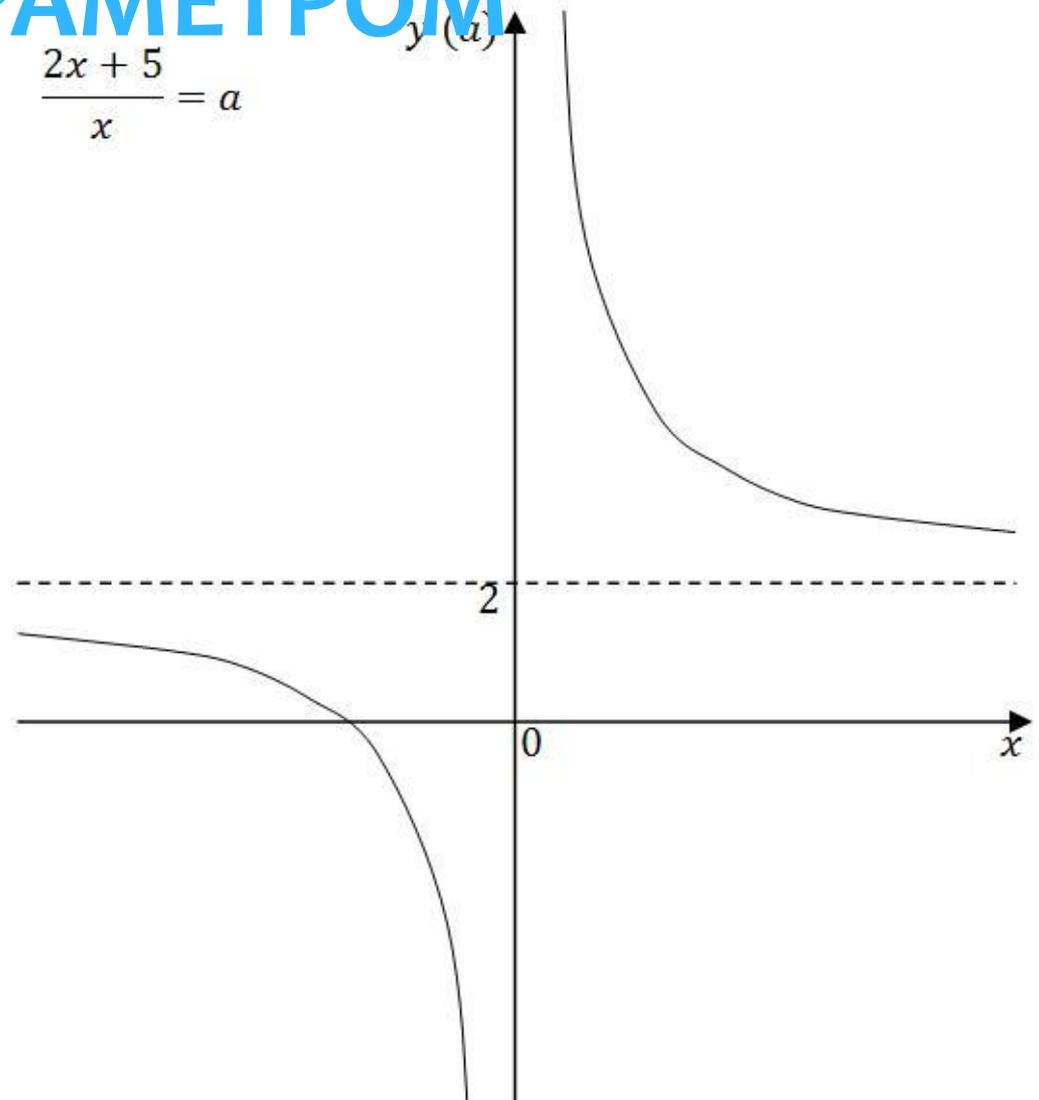
# УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ

## С ПАРАМЕТРОМ

$$2x + 5 = ax$$



$$\frac{2x + 5}{x} = a$$



## Определение

Решить уравнение вида  $f(x, a) = 0$  параметром – это значит, для каждого значения параметра найти значение неизвестной, удовлетворяющей уравнению, или сказать, что уравнение с параметром не имеет решений.

$$x - a = 0 \quad \frac{x}{7} = a \quad 0x = a \quad |x| = a \quad x = \sqrt{a}$$



Уравнение вида  $ax = b$  можно записать:  $f(x, a, b) = 0$ , где  $a$  и  $b$  – параметры

Уравнение вида  $ax^2 + bx + c = 0$  можно записать:  $f(x, a, b, c) = 0$  где  $a, b$  и  $c$  – параметры

## Определение

Решить уравнение с параметром – это значит, для каждого значения параметра найти значение неизвестной, удовлетворяющее этому уравнению, или сказать, что решений нет.

$$x - a = 0 \quad \frac{x}{7} = a \quad 0x = a \quad |x| = a \quad x = \sqrt{a}$$

**$x = a$  - единственное  
решение для каждого  $a$**

$$x = a$$



Ответ: при  $a \in (-\infty; \infty)$ ;  $x = a$

## Определение

Решить уравнение с параметром – это значит, для каждого значения параметра найти значение неизвестной, удовлетворяющее этому уравнению, или сказать, что решений нет.

$a$

$$\frac{x}{7} = a$$

$x = 7a$  - единственное  
решение для каждого  $a$

$$x = 7a$$



Ответ: при  $a \in (-\infty; \infty)$ ;  $x = 7a$

## Определение

Решить уравнение с параметром – это значит, для контрольным значением параметра  $a$  называется каждого значения параметра, найти значение такое его значение, при переходе через которое, неизвестной, удовлетворяющее этому уравнению, меняется количество корней уравнения или сказать, что решений нет.

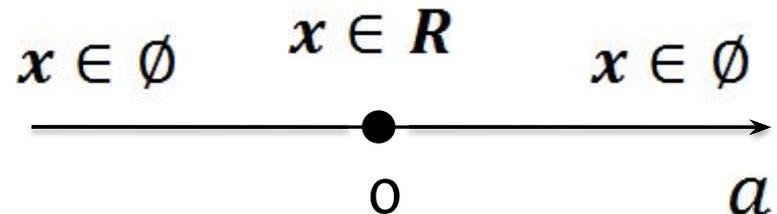
$$|x| = a$$

$a = 0$ ;  $0x = 0$ ;  $x \in R$  - бесконечно

много решений

$a \neq 0$ ;  $0x = a$ ;  $x \in \emptyset$  - нет

решений



Ответ: при  $a \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$   $x \in \emptyset$

при  $a = 0$   $x \in R$

## Определение

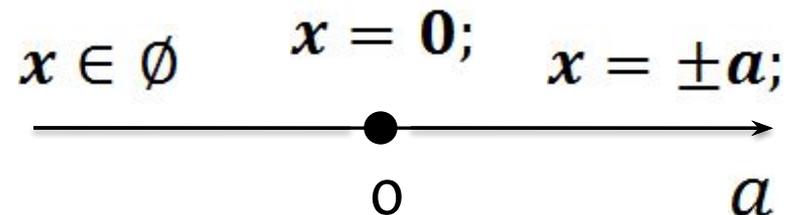
Контрольным значением параметра  $a$  называется такое его значение, при переходе через которое, меняется количество корней уравнения

$$|xx = \sqrt{a}|$$

$a = 0$ ;  $x = 0$ ; - 1 решение

$a > 0$ ;  $x = \pm a$ ; - 2 решения

$a < 0$ ;  $x \in \emptyset$  - нет решений



Ответ: при  $a \in (-\infty; 0)$ ;  $x \in \emptyset$   
при  $a = 0$ ;  $x = 0$ ;  
при  $a \in (0; \infty)$ ;  $x = \pm a$ ;

## Определение

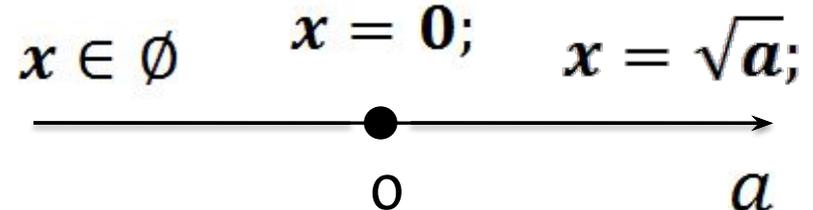
Контрольным значением параметра  $a$  называется такое его значение, при переходе через которое, меняется количество корней уравнения

$$x = \sqrt{a}$$

$a = 0$ ;  $x = 0$ ; - 1 решение

$a > 0$ ;  $x = \sqrt{a}$ ; - 1 решение

$a < 0$ ;  $x \in \emptyset$  - нет решений



Ответ: при  $a \in (-\infty; 0)$ ;  $x \in \emptyset$   
при  $a \in [0; \infty)$ ;  $x = \sqrt{a}$ ;

## Алгоритм решения задач с параметром

Найти контрольные значения  
Нанести их на «дерево» параметра

Решить уравнение в каждом  
промежутке и в контрольных точках

Показать решения на «дереве»  
параметра

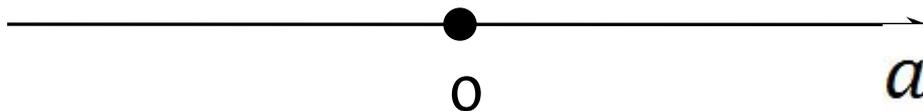
Записать ответ

## Найдём контрольные значения

- $a=0$



Если коэффициент перед  $x$  содержит параметр, то те значения  $a$ , которые обращают его в ноль являются контрольными



$$ax = 3$$

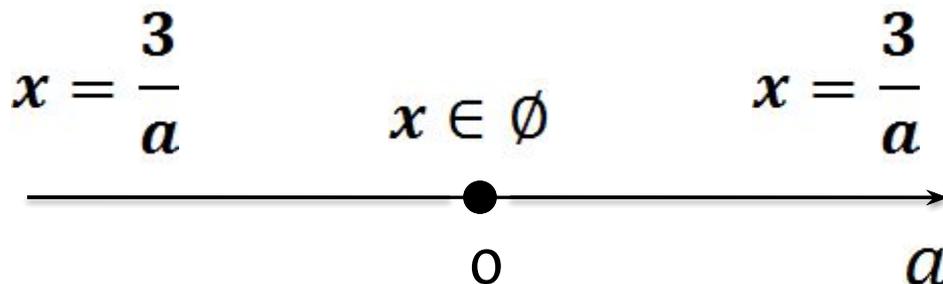
Найдём контрольные значения

Решим на всех промежутках и в к.

$$a > 0; \quad x = \frac{3}{a} - 1 \text{ решение}$$

$$a = 0; \quad x \in \emptyset - \text{нет решений}$$

$$a < 0; \quad x = \frac{3}{a} - 1 \text{ решение}$$



$$ax = 3$$

Найдём контрольные значения  
Решим на всех промежутках и в к.  
т.

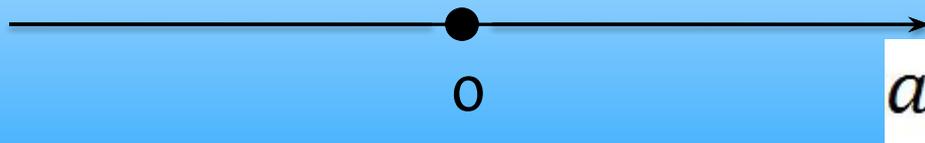
Запишем ответ

Ответ: при  $a \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty); x = \frac{3}{a}$   
при  $a = 0$ ; решений нет

$$x = \frac{3}{a}$$

$$x \in \emptyset$$

$$x = \frac{3}{a}$$



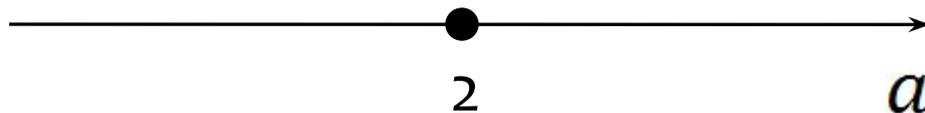
## Найдём контрольные значения

- $a=2$



Приравняли коэффициент перед  $x$  к нулю:

$$(a - 2)x - 5 = 0$$



$$ax - 5 = 2x$$

Найдём контрольные значения

Решим на всех промежутках и в к.

$$a > 2 \quad x = \frac{5}{a-2} - 1 \text{ решение}$$

$$a = 2 \quad x \in \emptyset - \text{нет решений}$$

$$a < 2 \quad x = \frac{5}{a-2} - 1 \text{ решение}$$

$$x = \frac{5}{a-2} \quad x \in \emptyset \quad x = \frac{5}{a-2}$$

A horizontal number line with arrows at both ends. A solid black dot is located at the point labeled '2'. An open circle is located at the point labeled 'a'. The number line is positioned below the text  $x = \frac{5}{a-2} \quad x \in \emptyset \quad x = \frac{5}{a-2}$ .

$$ax - 5 = 2x$$

Найдём контрольные значения  
Решим на всех промежутках и в к.  
т.

Запишем ответ

Ответ: при  $a \in (-\infty; 2) \cup (2; \infty)$ ;  $x = \frac{5}{a-2}$   
при  $a = 2$ ; решений нет

$$x = \frac{5}{a-2} \quad x \in \emptyset \quad x = \frac{5}{a-2}$$

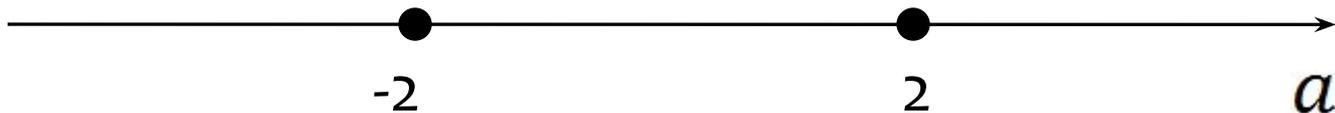
2 a

Найдём контрольные значения

$$a^2 - 4 = 0; \text{ (Коэффициент перед } x \text{)}$$

$$\rightarrow a = 2$$

$$\rightarrow a = -2$$



$$(a^2 - 4)x = a^2 + a - 6$$

Найдём контрольные значения

Решим на всех промежутках и в к.

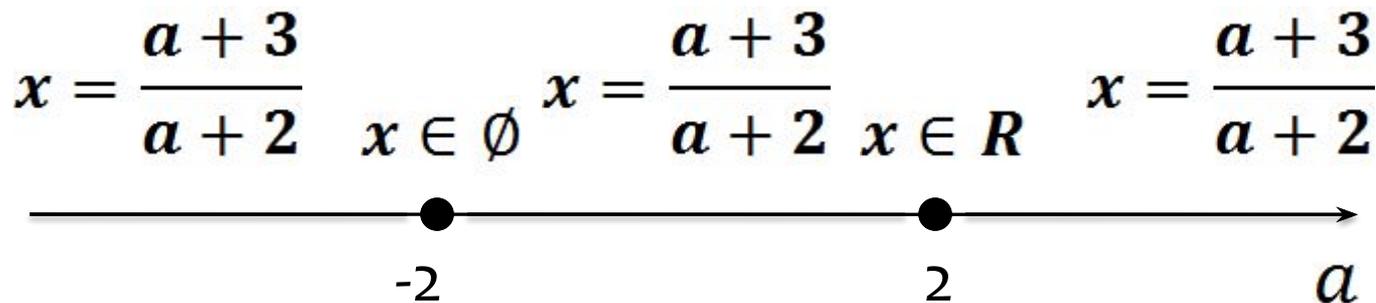
$$a > 2 \quad x = \frac{a^2 + 3a - 6}{a + 2 - 4} \cdot 2; \text{ ие}$$

$a = 2$   $x \in R$  - бесконечно много решений

$$-2 < a < 2 \quad x = \frac{a + 3}{a + 2} - 1 \text{ решение}$$

$a = -2$   $x \in \emptyset$  - нет решений

$$a < -2 \quad x = \frac{a + 3}{a + 2} - 1 \text{ решение}$$



$$(a^2 - 4)x = a^2 + a - 6$$

Найдём контрольные значения  
Решим на всех промежутках и в к.  
т.

Запишем ответ

Ответ: при  $a \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; \infty)$ ;  $x = \frac{a+3}{a+2}$   
при  $a = -2$ ;  $x \in \emptyset$   
при  $a = 2$ ;  $x \in \mathbb{R}$

$$x = \frac{a+3}{a+2}$$

$$x \in \emptyset$$

$$x = \frac{a+3}{a+2}$$

$$x \in \mathbb{R}$$

$$x = \frac{a+3}{a+2}$$



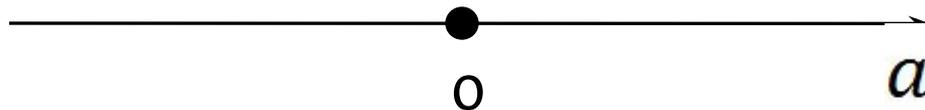
Найдём контрольные значения

Решите

- $a=0$



неравенство:  
 $ax > 3$   
Если коэффициент перед  $x$  содержит параметр, то те значения  $a$ , которые обращают его в ноль являются контрольными



$$ax > 3$$

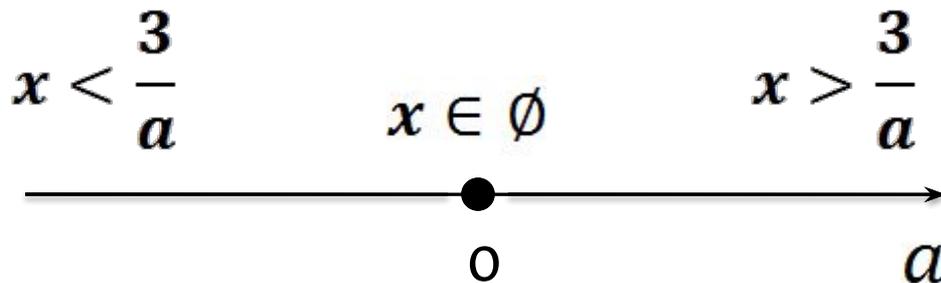
Найдём контрольные значения

Решим на всех промежутках и в к.

$$a > 0; \quad x > \frac{3}{a}$$

$$a = 0; \quad x \in \emptyset$$

$$a < 0; \quad x < \frac{3}{a}$$



$$ax > 3$$

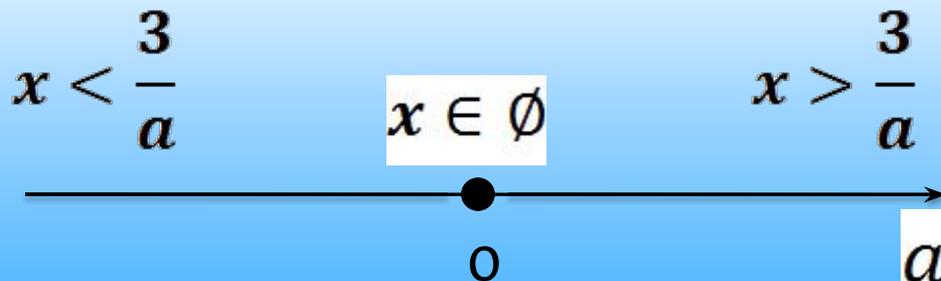
Найдём контрольные значения  
Решим на всех промежутках и в к.  
т.

Запишем ответ

Ответ: при  $a \in (-\infty; 0)$ ;  $x \in \left(-\infty; \frac{3}{a}\right)$

при  $a = 0$ :  $x \in \mathbb{R}$

при  $a \in (0; \infty)$ ;  $x \in \left(\frac{3}{a}; \infty\right)$



Найдём контрольные значения

$$a^2 - 16 = 0; \text{ (Коэффициент перед } x \text{)}$$

$$\rightarrow a = 4$$

$$\rightarrow a = -4$$



Обозначим знаки коэффициента на «дереве» параметра



$$(a^2 - 16)x < a^2 - 3a - 4$$

Найдём контрольные значения

Решим на всех промежутках и в к.

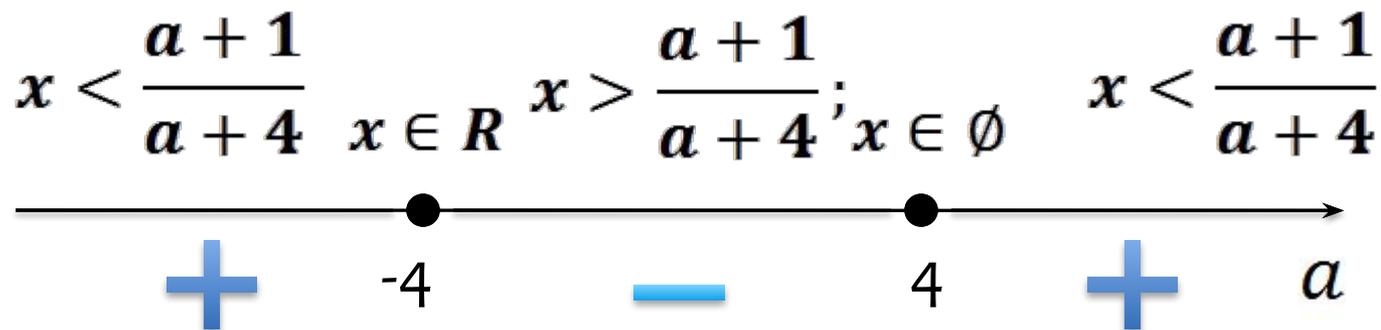
$$a > 4 \quad x < \frac{(a+1)(a-4)}{(a+4)(a-4)};$$

$$a = 4 \quad x \in \emptyset$$

$$-4 < a < 4 \quad x > \frac{a+1}{a+4};$$

$$a = -4 \quad x \in R$$

$$a < -4 \quad x < \frac{a+1}{a+4}$$



$$(a^2 - 16)x < a^2 - 3a - 4$$

Найдём контрольные значения  
Решим на всех промежутках и в к.  
т.

Запишем ответ

Ответ: при  $a \in (-\infty; -4) \cup (4; \infty) x \in \left(-\infty; \frac{a+1}{a+4}\right)$

при  $a \in (-4; 4) x \in \left(\frac{a+1}{a+4}; \infty\right)$

при  $a = -4 x \in R$

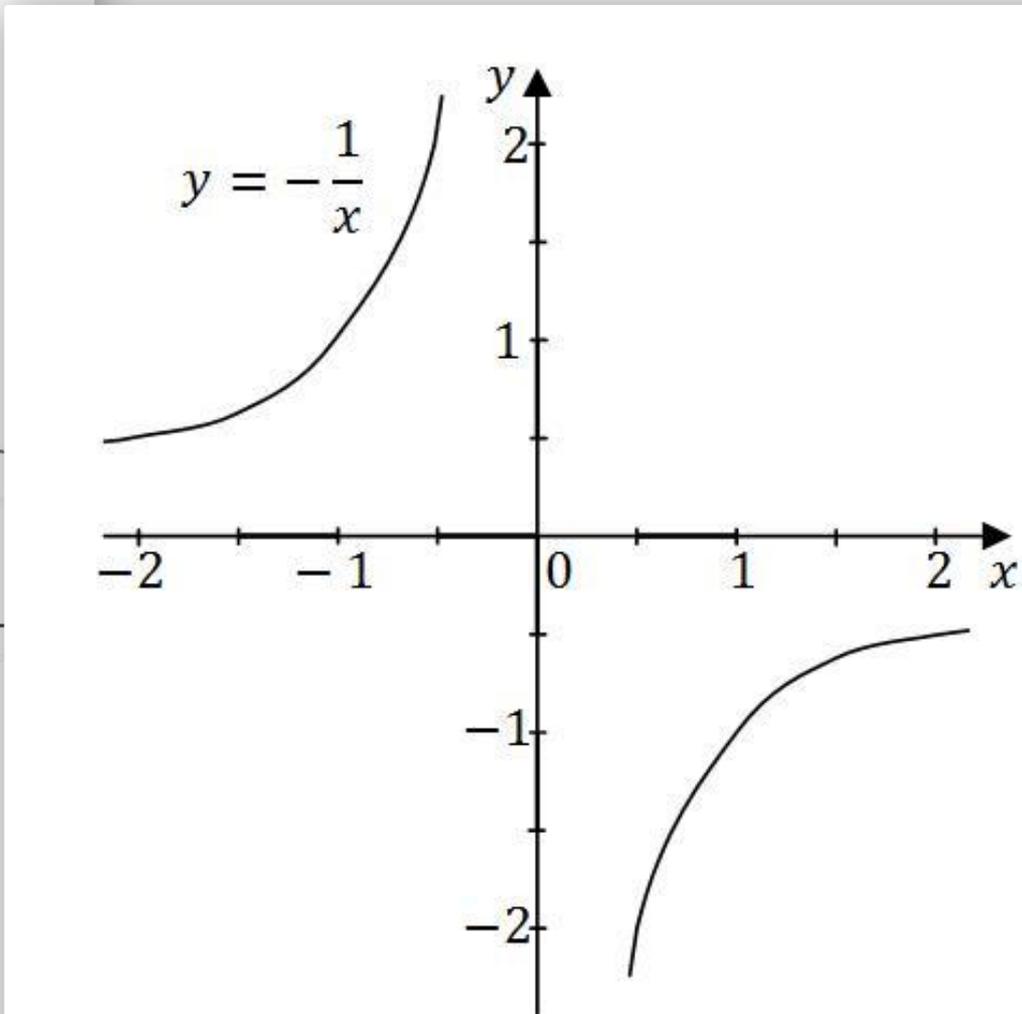
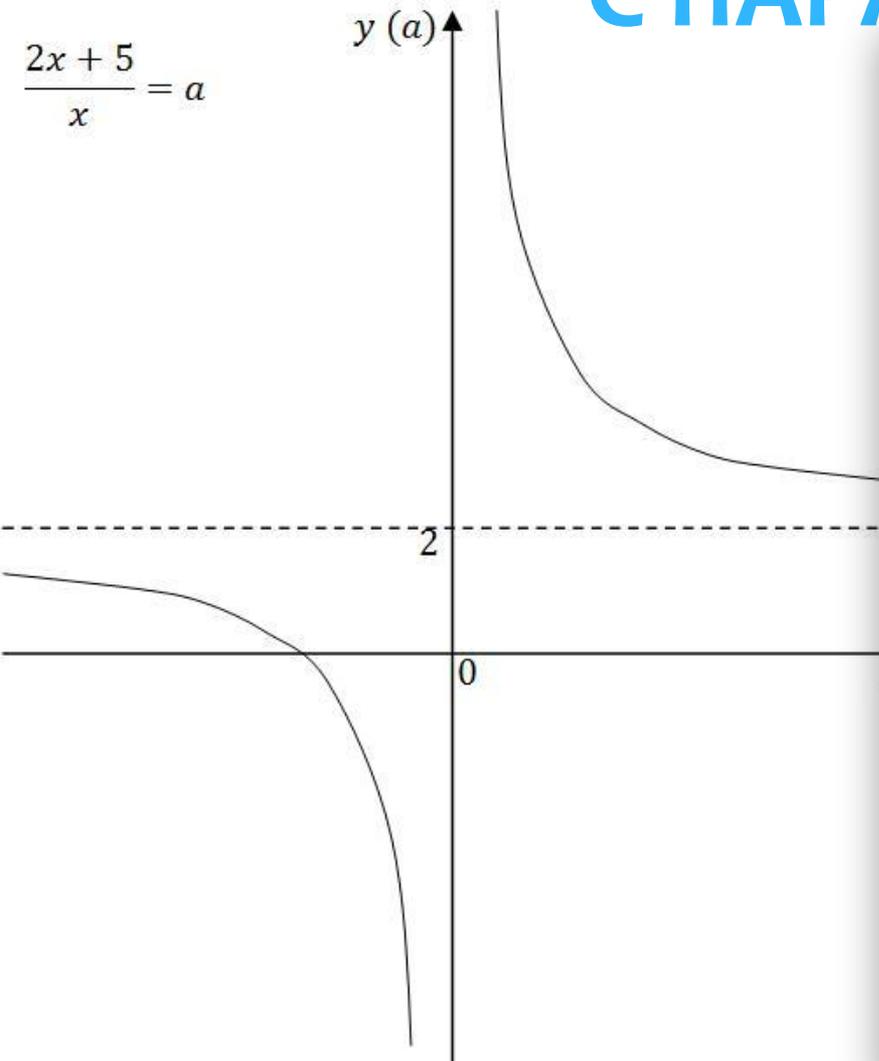
при  $a = 4 x \in \emptyset$

ПАРАМЕТР

$$x < \frac{a+1}{a+4} \quad x \in R \quad x > \frac{a+1}{a+4}; x \in \emptyset \quad x < \frac{a+1}{a+4}$$



# ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ С ПАРАМЕТРОМ



**Пример 1. Решить уравнение  $\frac{a-3x}{x-2} = 1$  для каждого значения параметра  $a$  т.е. для  $a \in (-\infty; \infty)$  или  $a \in R$**

**Решение. 1. Найдём контрольные значения и нанесём их на дерево параметра:**

$a \in R$  (нет ограничений на параметр  $a$ )

**Область определения уравнения:  $x \neq 2$  (2 – «опасное значение»)**

**Выразим  $x$  через  $a$ :  $a - 3x = x - 2$ ;  $4x = a + 2$ ;  $x = 0.25a + 0.5$ ;**

**Приравняем  $x$  к «опасному значению»:**

$$0.25a + 0.5 = 2;$$

$a = 6$  (контрольное значение)

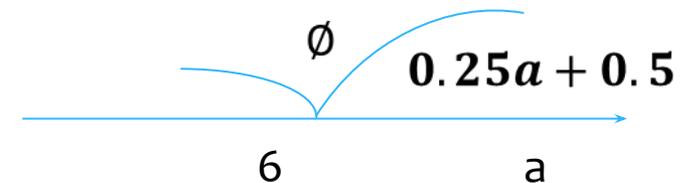
**2. Решим уравнение в каждом промежутке и в контрольных точках:**

$$a > 6; x = 0.25a + 0.5$$

$a = 6$ ; решений нет,  $x \in \emptyset$

$$a < 6; x = 0.25a + 0.5$$

**3. Покажем решения на «дереве» параметра:**



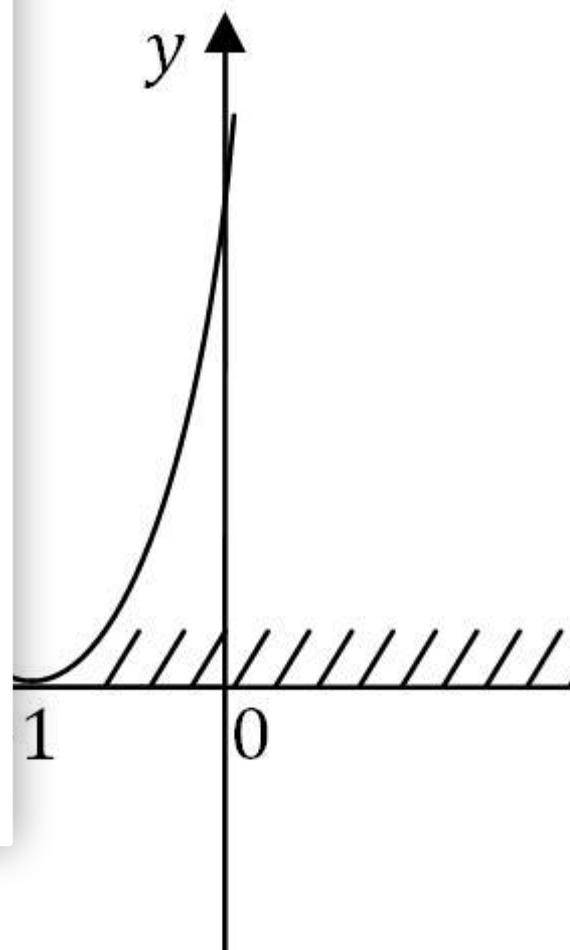
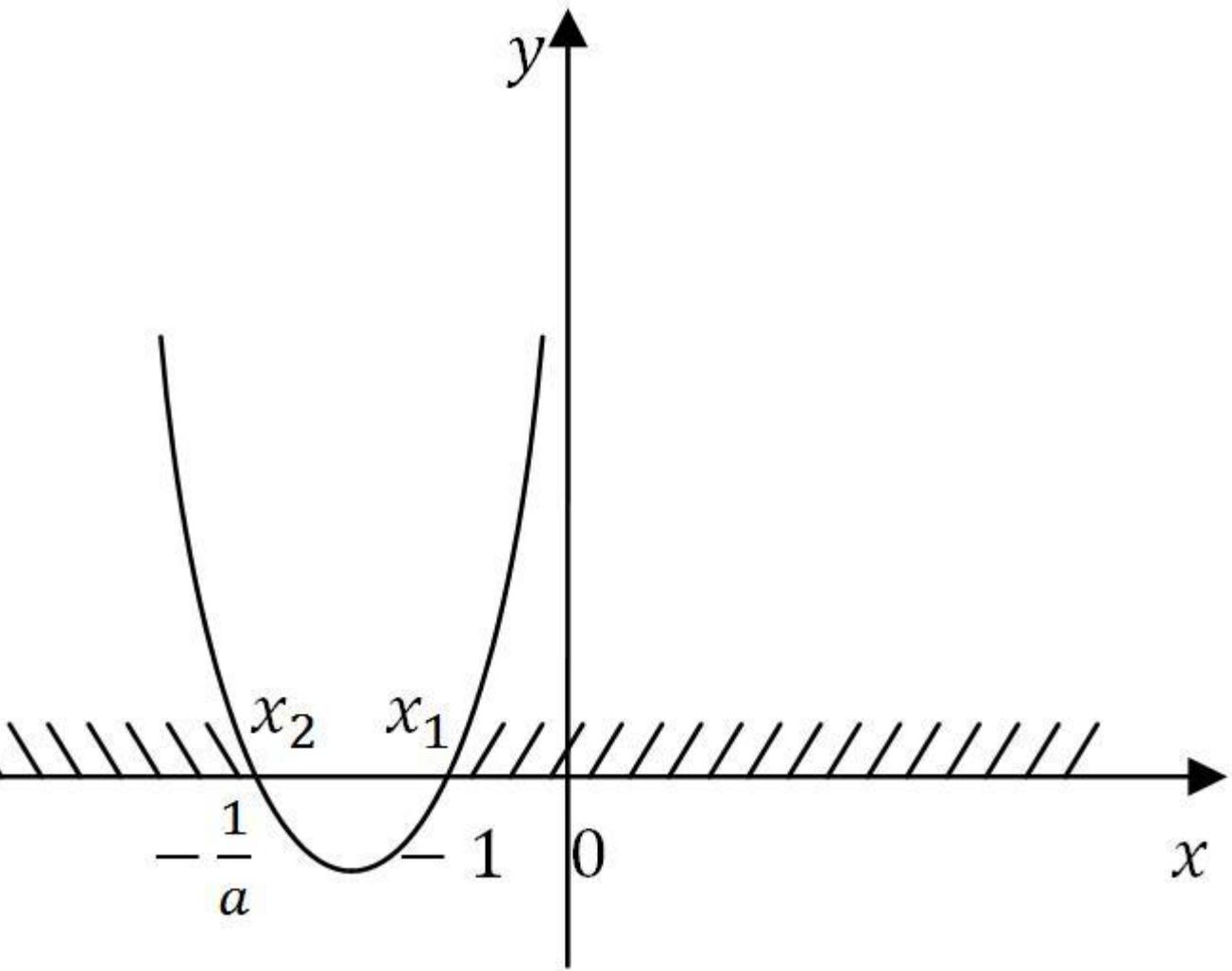
**Ответ:**

при  $a \in (-\infty; 6) \cup (6; \infty)$

$$x = 0.25a + 0.5$$

при  $a = 6$  решений нет

# УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА ВТОРОЙ СТЕПЕНИ С ПАРАМЕТРОМ



## Алгоритм решения задач с параметром

1

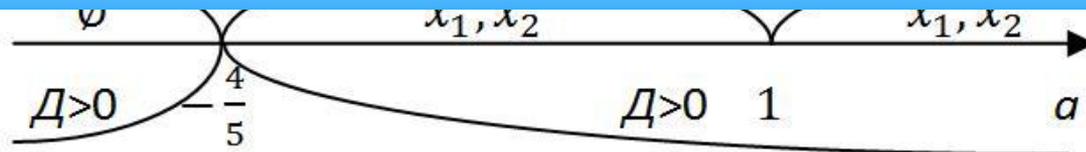
Найти и нанести на дерево параметров контрольные значения (приравниваем первый коэффициент и дискриминант к нулю)

2

Решить уравнение в каждом промежутке и в контрольных точках, отмечая результат на дереве параметров

3

Записать ответ



1. Решите уравнение:

$$(2,5a + 1)x^2 + (a + 2)x + a = 0$$

$$(2,5a + 1)x^2 + (a + 2)x + a = 0$$

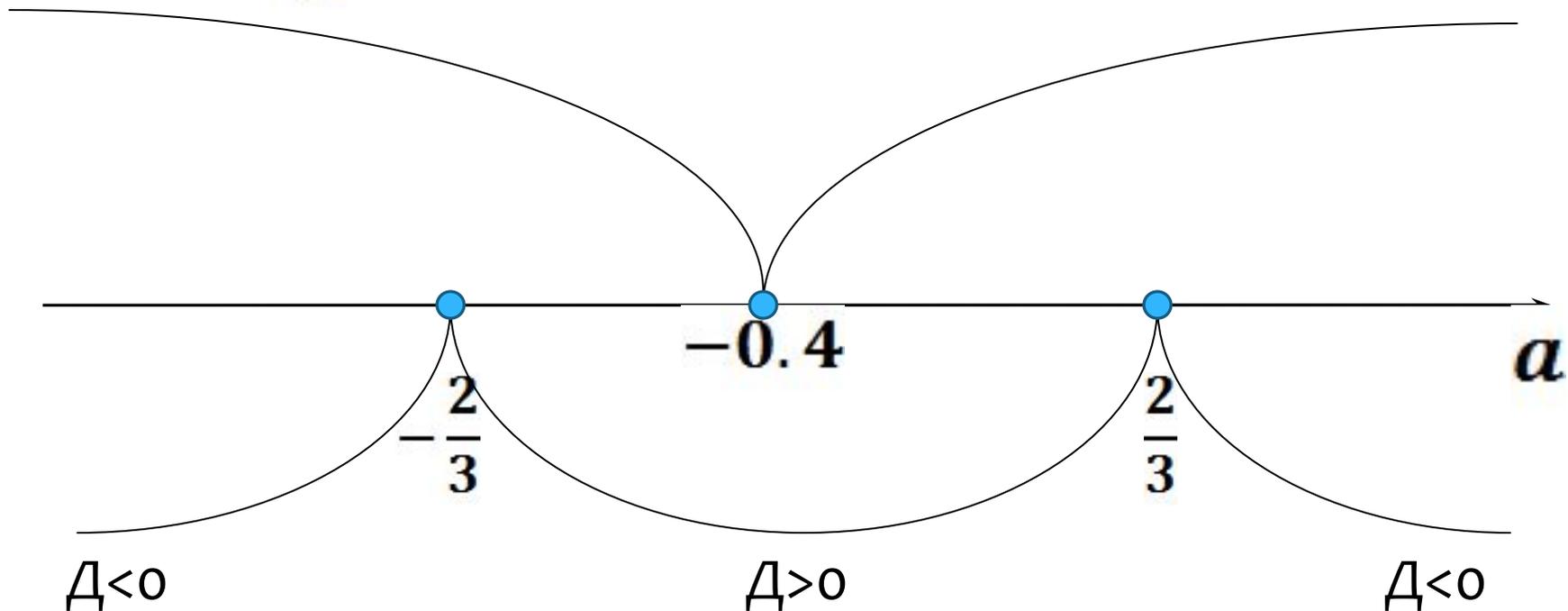
1. Найдём контр. значения

- Первый коэффициент равен 0:

$$a = -0.4 = 0$$

- Дискриминант равен 0:

$$(a + 2)^2 - 4(2.5a + 1)a = 0$$



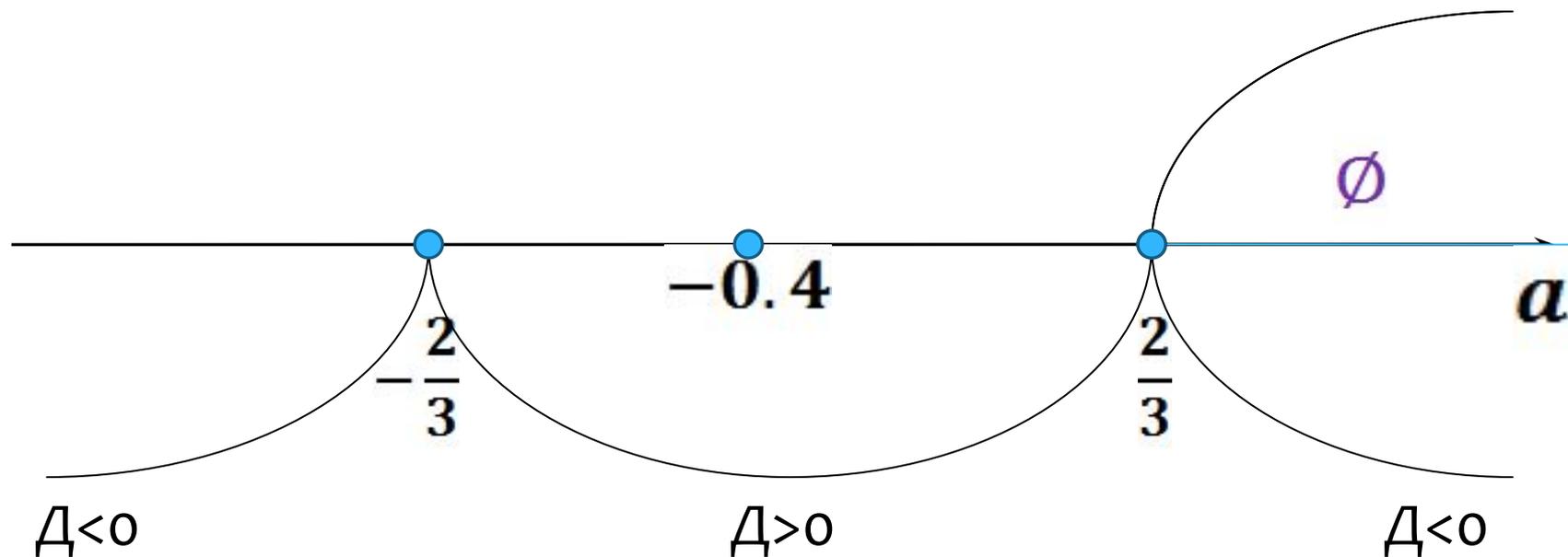
$$(2, 5a + 1)x^2 + (a + 2)x + a = 0$$

1. Найдём контр. значения

2. Решим на всех промежутках и в к. т

$$a = \left( \frac{22}{33} ; \infty \right)$$

$$D < 0 \Rightarrow x \in \emptyset$$



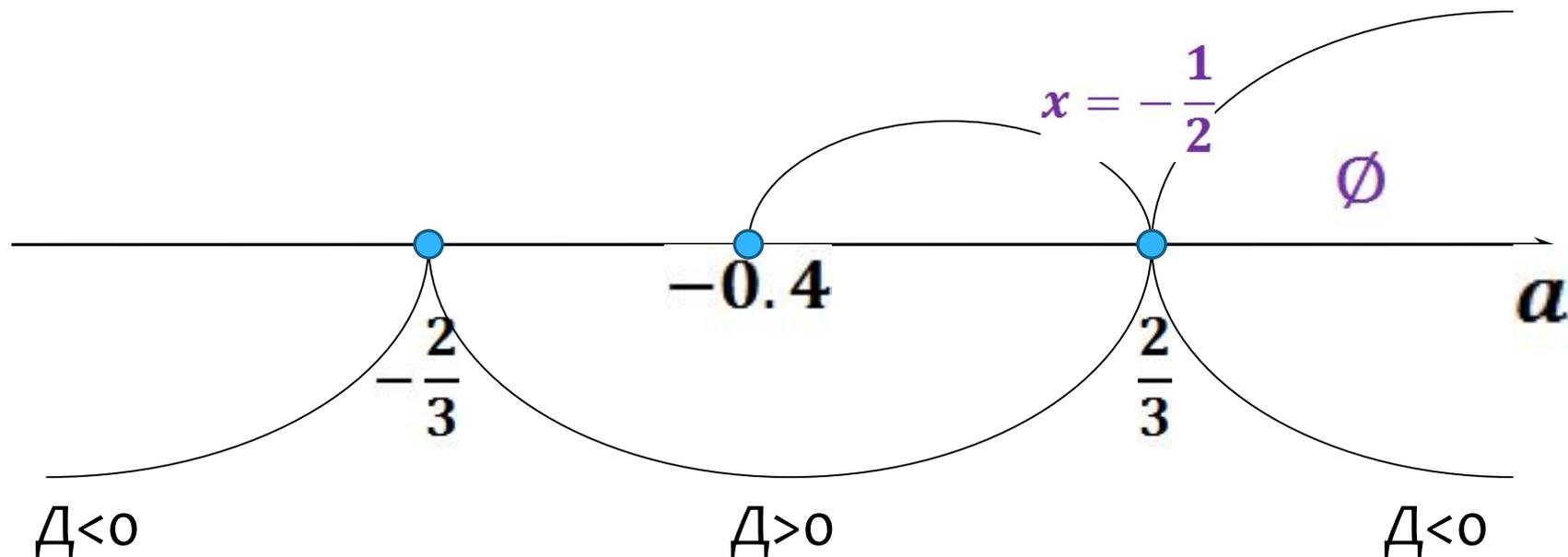
$$(2,5a + 1)x^2 + (a + 2)x + a = 0$$

1. Найдём контр. значения

2. Решим на всех промежутках и в к. т

$$a = \frac{2}{3}$$

$$x = -\frac{1}{2} > x = \frac{-(a + 2)}{2(2,5a + 1)}$$



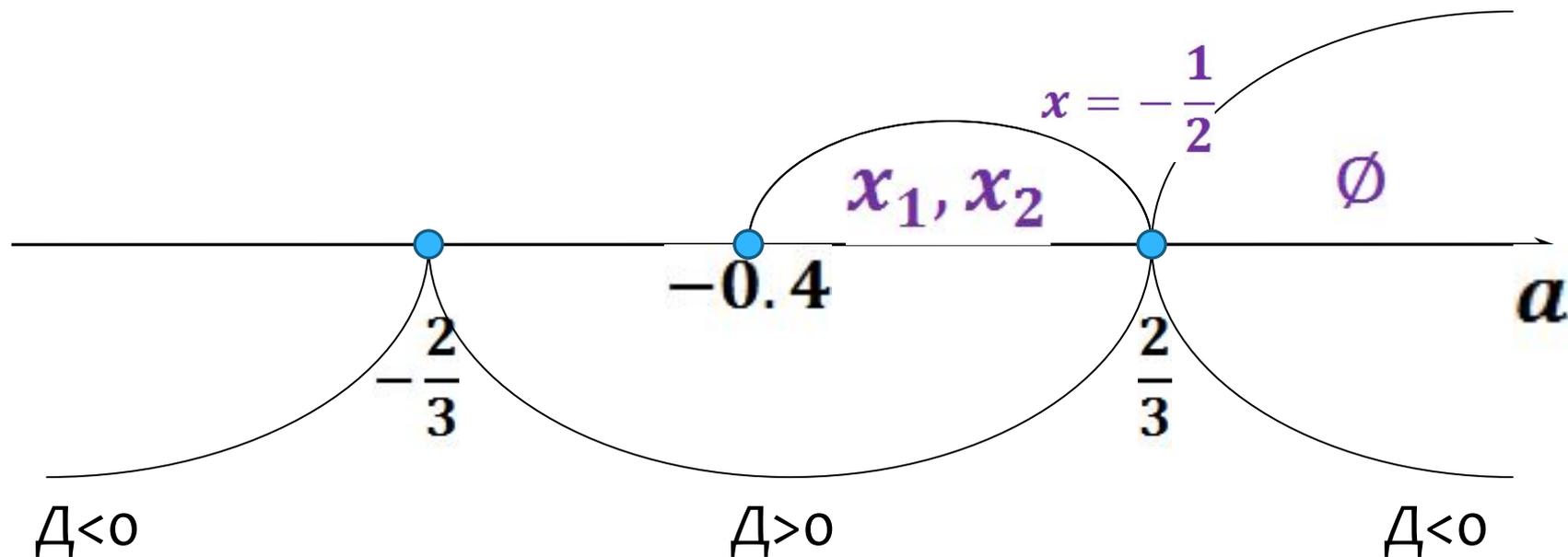
$$(2,5a + 1)x^2 + (a + 2)x + a = 0$$

1. Найдём контр. значения

2. Решим на всех промежутках и в к. т

$$a \in \left(-0.4; \frac{2}{3}\right)$$

$$x_{1,2} = \frac{-(a + 2) \pm \sqrt{4 - 9a^2}}{2(2.5a + 1)}$$



$$(2,5a + 1)x^2 + (a + 2)x + a = 0$$

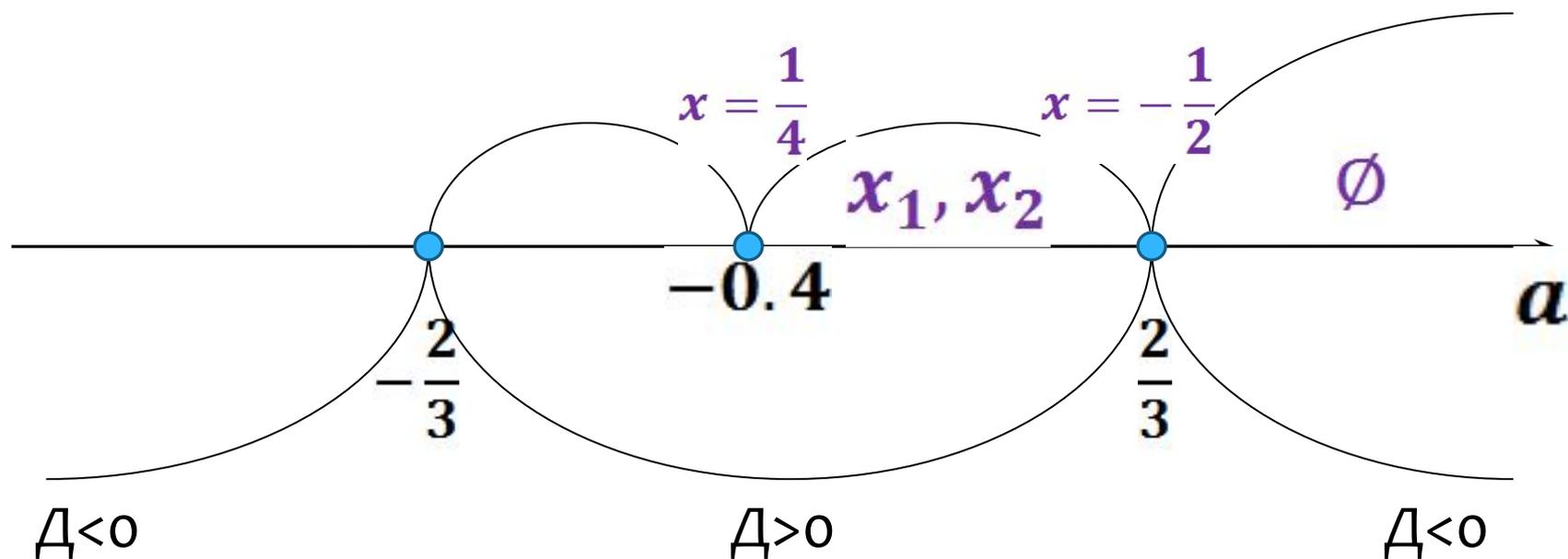
1. Найдём контр. значения

2. Решим на всех промежутках и в к. т

$$a = -0.4$$

$$x = \frac{1}{4} - 0.4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(a + 2) \pm \sqrt{4 - 9a^2}}{2(2.5a + 1)}$$



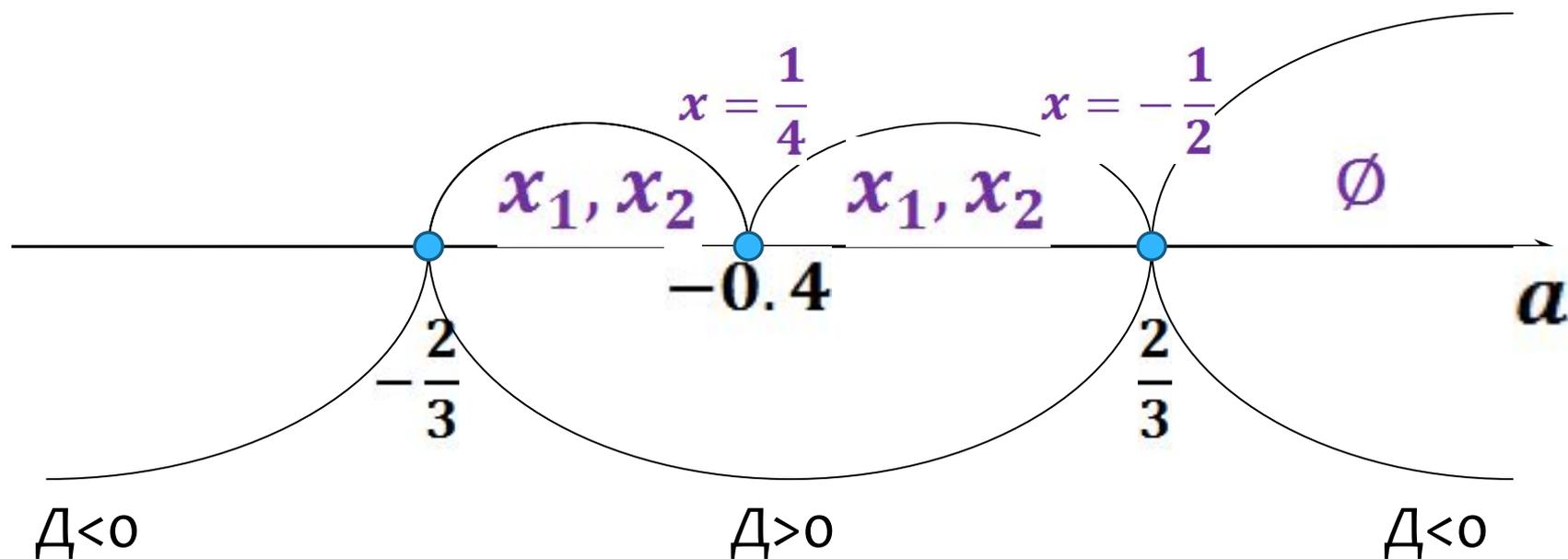
$$(2,5a + 1)x^2 + (a + 2)x + a = 0$$

1. Найдём контр. значения

2. Решим на всех промежутках и в к. т

$$a \in \left(-\frac{2}{3}; -0.4\right)$$

$$x_{1,2} = \frac{-(a + 2) \pm \sqrt{4 - 9a^2}}{2(2.5a + 1)}$$



$$(2,5a + 1)x^2 + (a + 2)x + a = 0$$

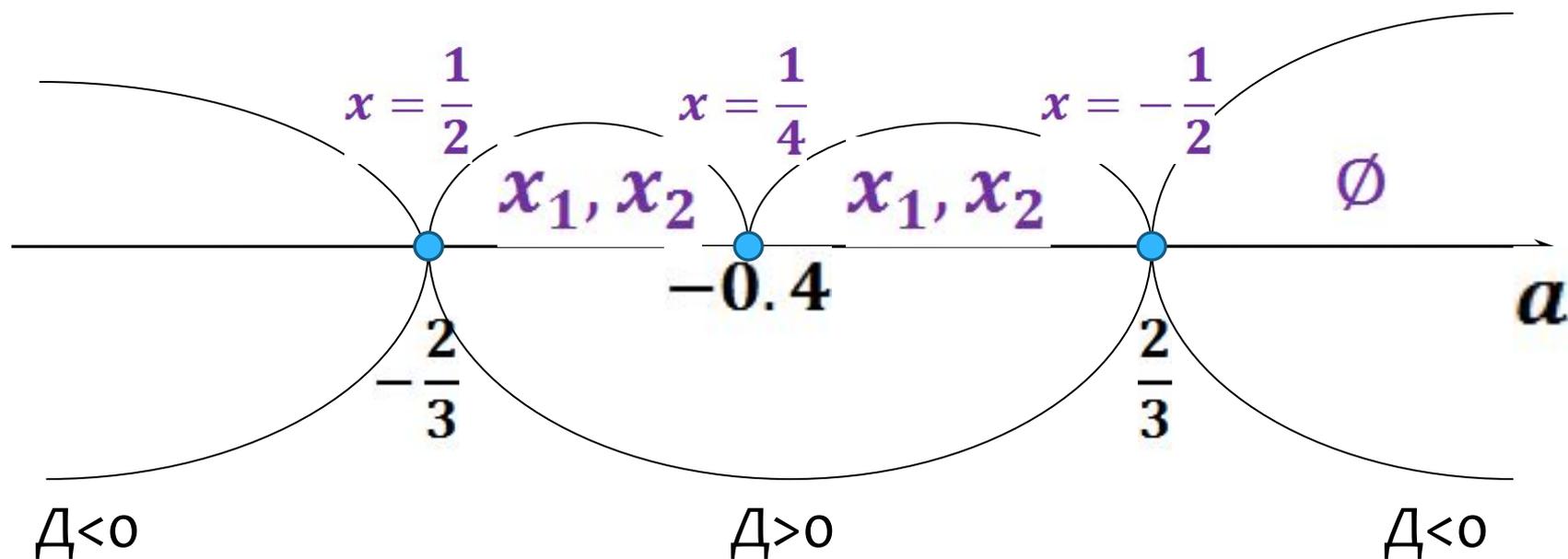
1. Найдём контр. значения

2. Решим на всех промежутках и в к. т

$$a = -\frac{2}{3}$$

$$x = \frac{-(a + 2)}{2(2,5a + 1)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(a + 2) \pm \sqrt{4 - 9a^2}}{2(2,5a + 1)}$$



$$(2,5a + 1)x^2 + (a + 2)x + a = 0$$

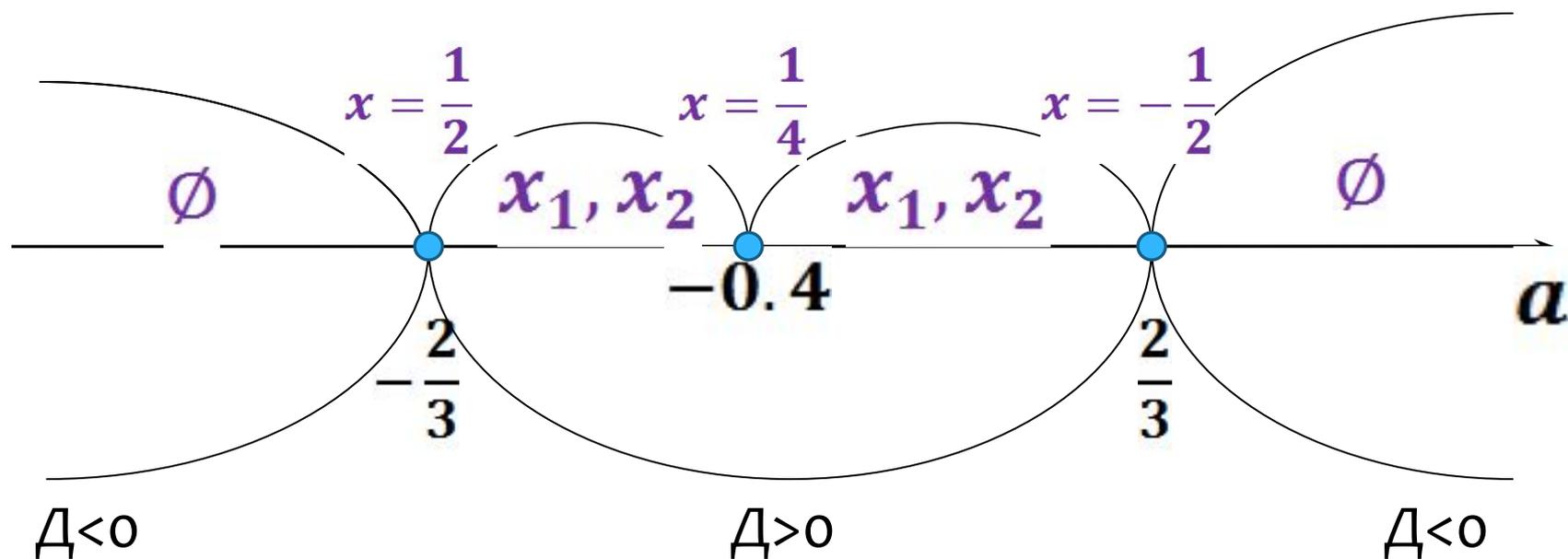
1. Найдём контр. значения

2. Решим на всех промежутках и в к. т

$$a \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$$

$$x_{1,2} = \frac{-(a + 2) \pm \sqrt{4 - 9a^2}}{2(2,5a + 1)}$$

$$D < 0 \Rightarrow x \in \emptyset$$



$$(2,5a + 1)x^2 + (a + 2)x + a = 0$$

1. Найдём контр. значения

2. Решим на всех промежутках и в к. т

3. Запишем ответ

**Ответ:**

при  $a \in \left(-\frac{2}{3}; -0.4\right) \cup \left(-0.4; \frac{2}{3}\right)$ ,  $x_{1,2} = \frac{-(a+2) \pm \sqrt{4-9a^2}}{2(2.5a+1)}$

при  $a \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; \infty\right)$  Решений нет

при  $a = -\frac{2}{3}$   $x = \frac{1}{2}$     при  $a = -0.4$   $x = \frac{1}{4}$     при  $a = \frac{2}{3}$   $x = -\frac{1}{2}$

