



# *«Формула Пика»*

## *«Фoрмyлa Пикa»*

*Выполнила ученица*

*МОУ СОШ №7*

*8 «А» класса*

*Юношева Ксения*

*Преподаватель:*

*Бабина Наталья Алексеевна*

*г. Сальск 2011 год*

# Цели работы:

- *Выяснение существования иной, отличной от школьной программы, формулы нахождения площади решетчатого многоугольника.*
- *Области применения искомой формулы.*

# Введение.

*Математическое образование, получаемое в общеобразовательных школах, является важнейшим компонентом общего образования и общей культуры современного человека.*

*На данном этапе, школьная система рассчитана на одиннадцатилетнее обучение.*

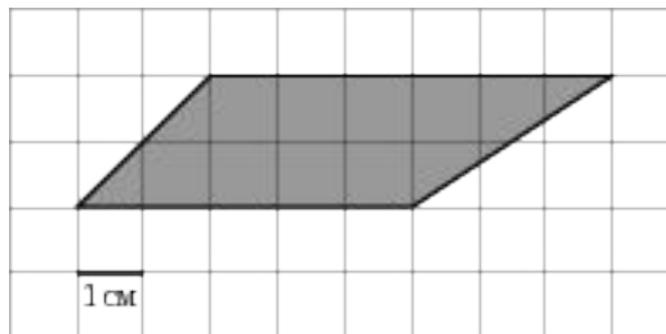
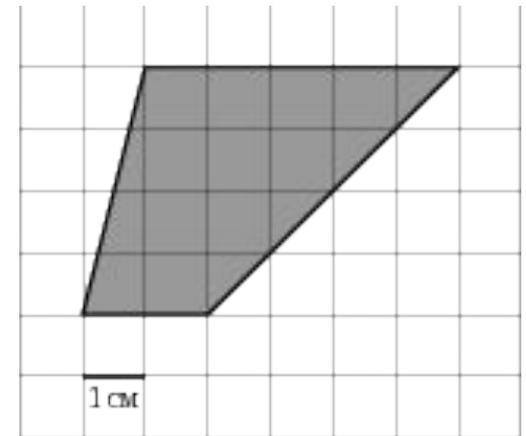
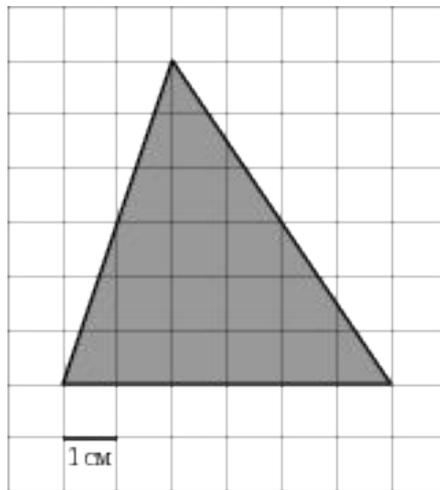
*Всем учащимся в конце одиннадцатого класса предстоит сдать Единый Государственный Экзамен, который покажет уровень знаний, полученный во время учебы в школе. Но школьная программа не всегда предоставляет самые рациональные способы решения каких-либо задач .*

*Например, просматривая результаты ЕГЭ 2010 года видно, что многие ученики теряют баллы из-за задания В6.*

*Я задалась целью, как же можно сэкономить время и правильно решить это задание.*

# Задание В6.

На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см на 1 см изображены фигуры (см. рисунок). Найдите их площади в квадратных сантиметрах.





*Итак, чтобы все-таки решить это задание мне нужно применить формулы нахождения площади, которые мы изучаем в 8 классе. Но на это уйдет очень много времени, а мне нужно ответить на поставленный вопрос как можно быстрее, ведь время на экзамене строго ограничено.*

*Поэтому, проведя исследования, я выяснила, что существует теорема Пика, которая в школьной программе не изучается, но которая поможет мне быстрее справиться с заданием.*

# Историческая справка.

Георг Александр Пик (10 августа, 1859 - 26 июля 1942) был австрийским математиком. Он умер в концлагере Терезин. Сегодня он известен из-за формулы Пика для определения площади решетки полигонов. Он опубликовал свою формулу в статье в 1899 году, она стала популярной, когда Хьюго Штейнгауз включил её в 1969 году в издание математических снимков.

Пик учился в Венском университете и защитил кандидатскую в 1880 году. После получения докторской степени он был назначен помощником Эрнеста Маха в Шерльско-Фердинандском университете в Праге. Он стал преподавателем там в 1881 году. Взяв отпуск в университете в 1884 году, стал работать с Феликсом Клейном в Лейпцигском университете. Он оставался в Праге до своей отставки в 1927 году, а затем вернулся в Вену.

Пик возглавлял комитет в(тогда) немецком университете Праги, который назначил Альберта Эйнштейна профессором кафедры математической физики в 1911 году.

Пик был избран членом Чешской академии наук и искусств, но был исключен после захвата нацистами Праги.

После ухода на пенсию в 1927 году, Пик вернулся в Вену, город, где он родился. После аншлюса, когда нацисты вошли в Австрию 12 марта 1938 года, Пик вернулся в Прагу. В марте 1939 года нацисты вторглись в Чехословакию. Георг был отправлен в концентрационный лагерь Терезин 13 июля 1942. Он умер через две недели.

# Теорема Пика.

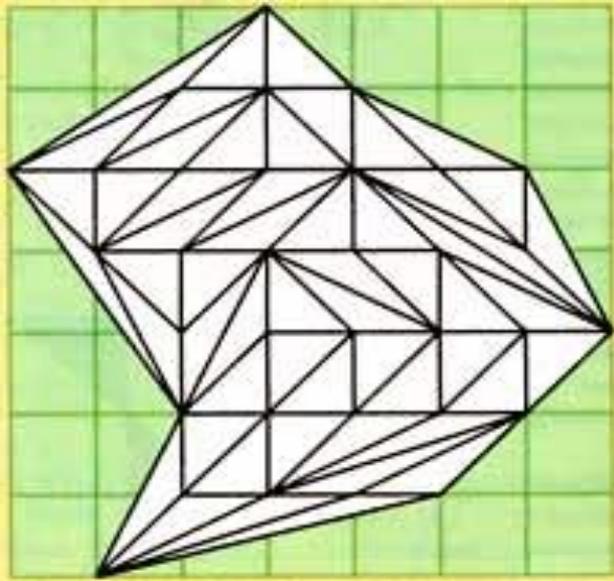
**Теорема Пика** — классический результат комбинаторной геометрии и геометрии чисел.

Площадь многоугольника с целочисленными вершинами равна сумме

$$B + \Gamma/2 - 1,$$

где  $B$  есть количество целочисленных точек внутри многоугольника, а  $\Gamma$  количество целочисленных точек на границе многоугольника.

# Доказательство теоремы Пика.



любой такой многоугольник легко разбить на треугольники с вершинами в узлах решётки, не содержащие три, ни на сторонах. Можно показать, что все эти треугольники одинаковы и равны  $1/2$ , а, следовательно, площадь многоугольника равна половине их

Чтобы найти это число, обозначим через  $n$  число многоугольника, через  $i$  — число узлов внутри его и  $b$  — число узлов на сторонах, включая вершины. Тогда сумма углов всех треугольников равна  $\pi T$ . Теперь найдем эту сумму другим способом.

Каждый угол с вершиной в любом внутреннем узле составляет  $2\pi$ , т. е. общая сумма таких углов равна  $2\pi i$ ; общая сумма углов при узлах на сторонах, но не в вершинах равна  $(b - n)\pi$ , а сумма углов при вершинах многоугольника —  $(n - 2)\pi$ . Таким образом,  $\pi T = 2\pi i + (b - n)\pi + (n - 2)\pi$ , откуда получаем выражение для площади  $S$  многоугольника, известное как формула Пика.

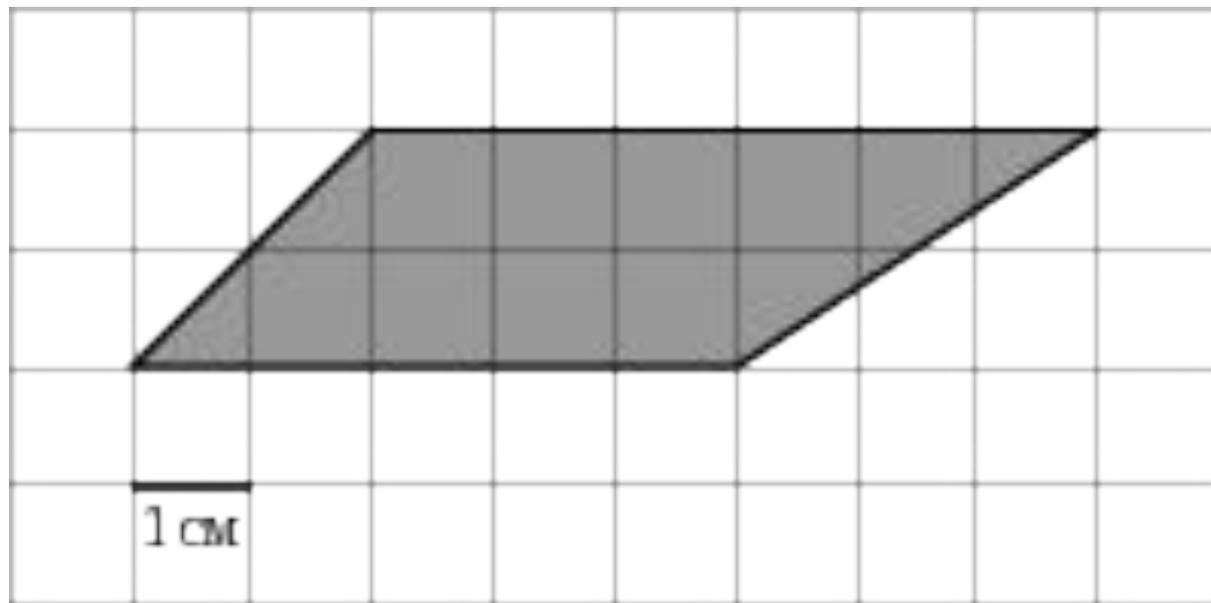
Например, на рисунке  $b = 9$ ,  $i = 24$ , а следовательно, площадь многоугольника равна  $27,5$ .

# Применение.

Итак, вернемся к заданию В6. Теперь, зная новую формулы, мы легко сможем найти площадь этого четырехугольника.

Так как  $B = 5$ ;  $G = 14$ , то  $5+14:2-1=11$  (см в квадрате)

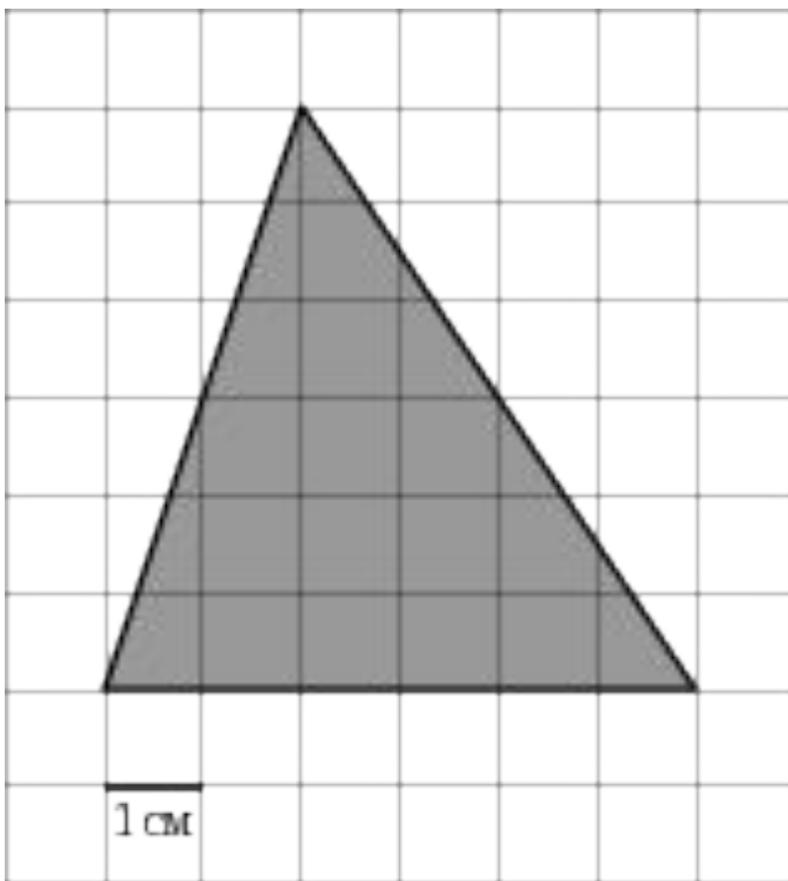
Площадь данного четырехугольника равна 11 см в квадрате.



По той же формуле мы можем найти площадь треугольника.

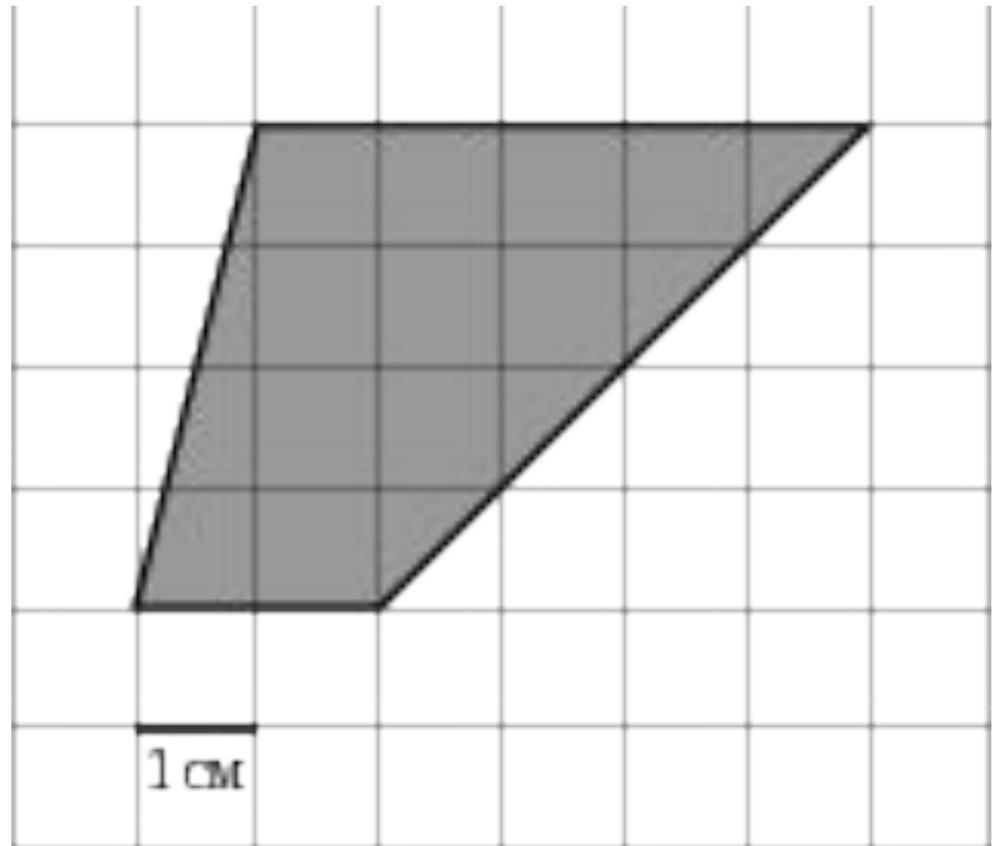
Так как В-14, Г-10, то  $14+10:2-1=18$  (см в квадрате)

Площадь данного треугольника равна 18 см в квадрате.



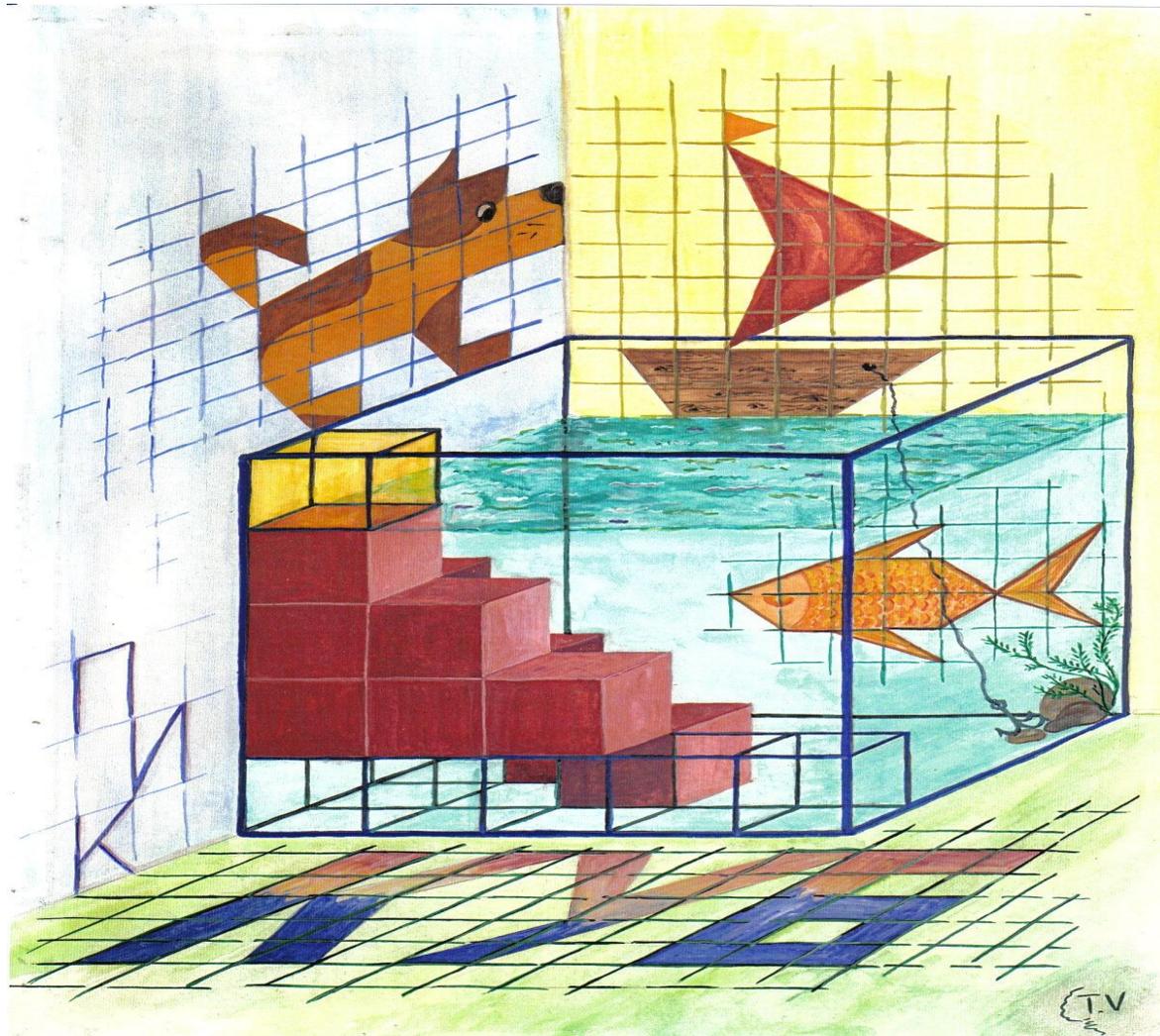
Если В-9, Г-12, тогда:  $9+12:2-1=14$  (см в квадрате)

Площадь данного четырехугольника равна 14 см в квадрате.

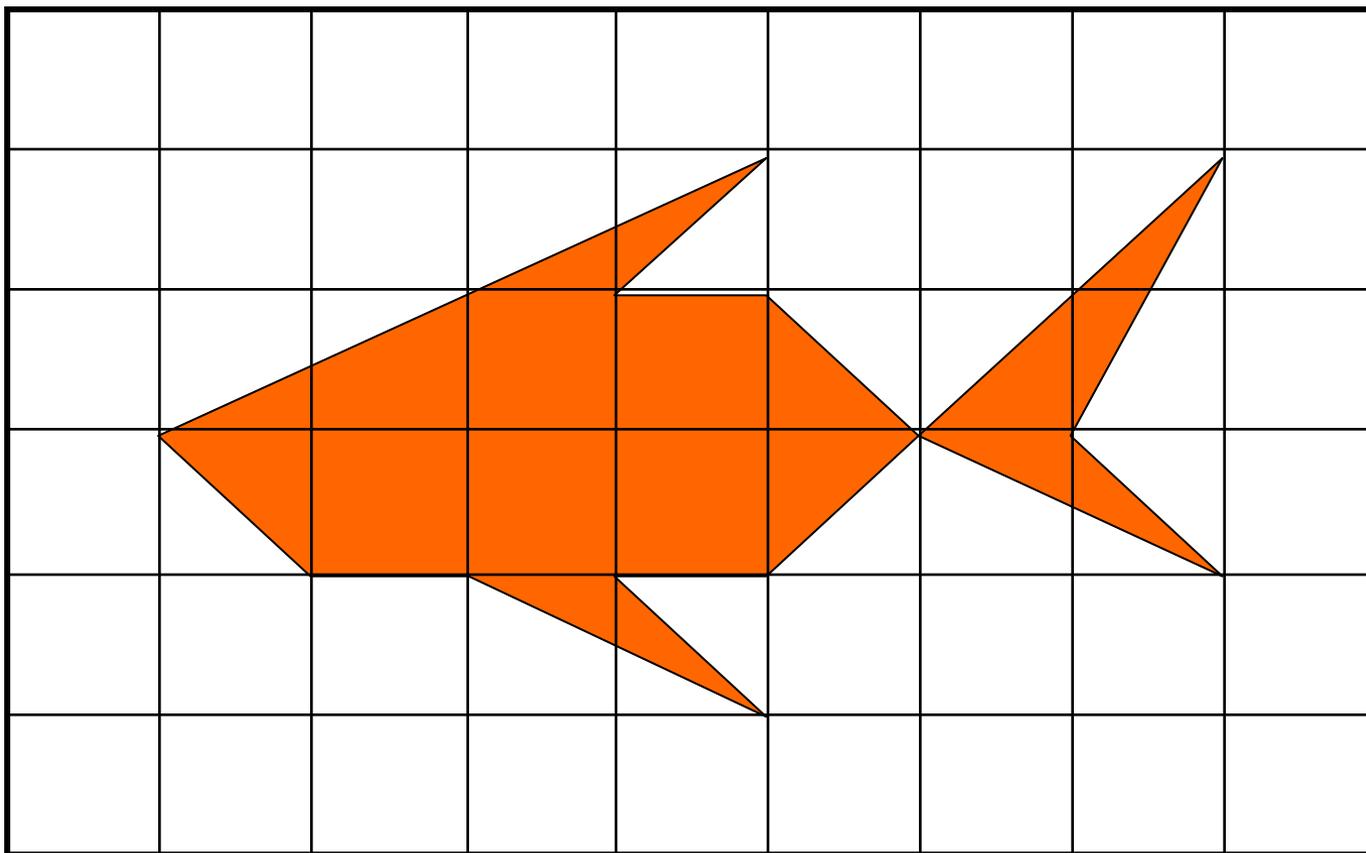


# Области применения формулы.

Помимо того, что формула применяется в различного рода экзаменах, заданиях и так далее, она сопровождает весь окружающий нас мир.



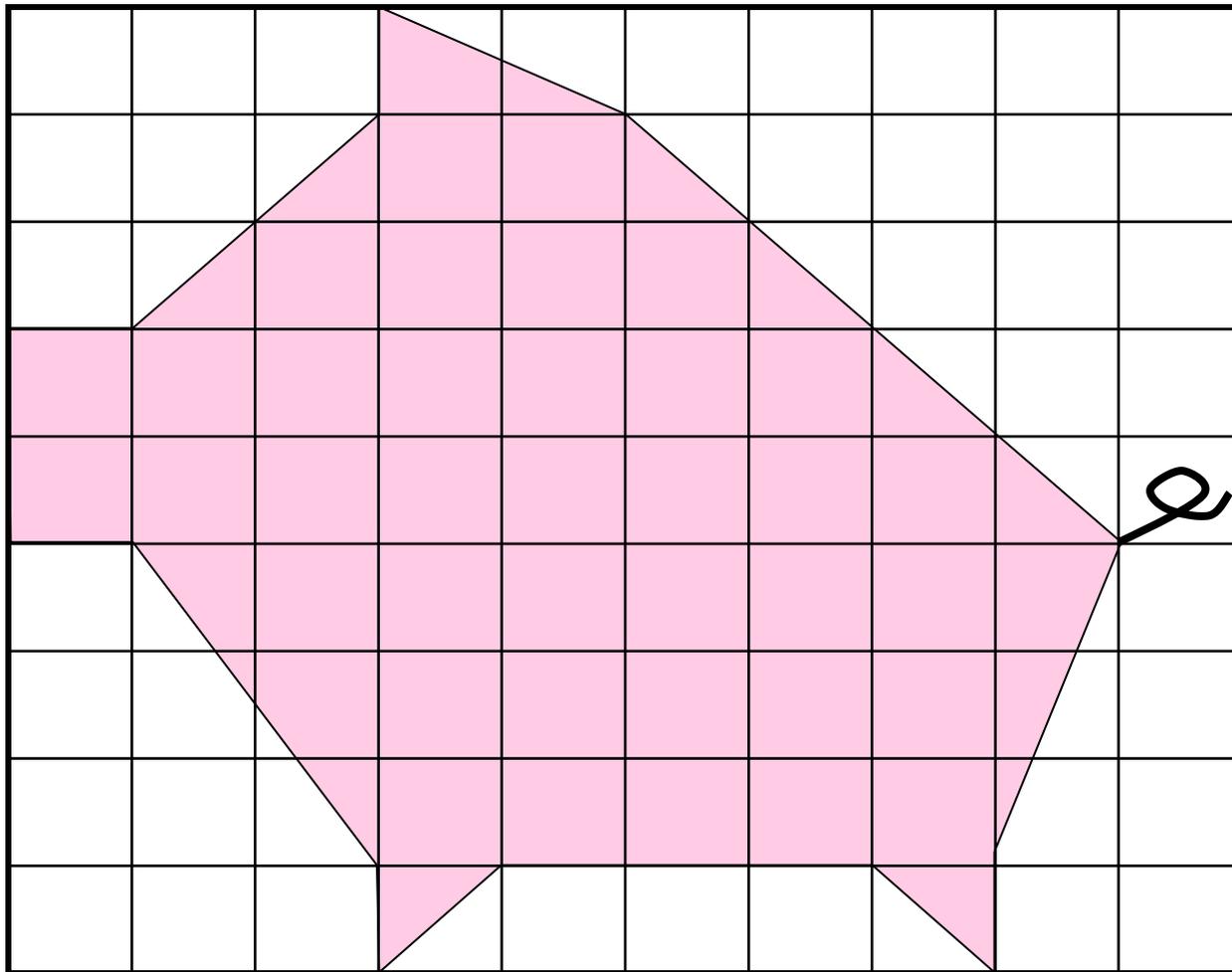
- По формуле Пика  $S = B + \frac{1}{2}\Gamma - 1$ 
  - 1) туловище  $B=9, \Gamma=26, S=9 + \frac{1}{2} \cdot 26 - 1 = 9 + 13 - 1 = \underline{21}$
  - 2) хвост  $B=0, \Gamma=8, S=0 + \frac{1}{2} \cdot 8 - 1 = \underline{3}$
  - 3)  $S = \underline{21} + \underline{3} = \underline{24}$



◦ По формуле Пика  $S = B + \frac{1}{2}\Gamma - 1$

$$B=36, \Gamma=21$$

$$S = 36 + \frac{1}{2} \cdot 21 - 1 = 36 + 10,5 - 1 = 45,5$$



# *Заключение.*

*В итоге, я пришла к выводу, что существует много различных способов решения задач на нахождение площади, не изучаемых в школьной программе, и показала их на примере формулы Пика.*

# Справочник.

1. Многоугольник без самопересечений называется решётчатым, если все его вершины находятся в точках с целочисленными координатами (в декартовой системе координат).
2. Точка координатной плоскости называется целочисленной, если обе её координаты целые.