Решение заданий В9 по математике.
ЕГЭ 2014

Цивлина Светлана Васильевна
ГБОУ СОШ № 1115 г. Москвы

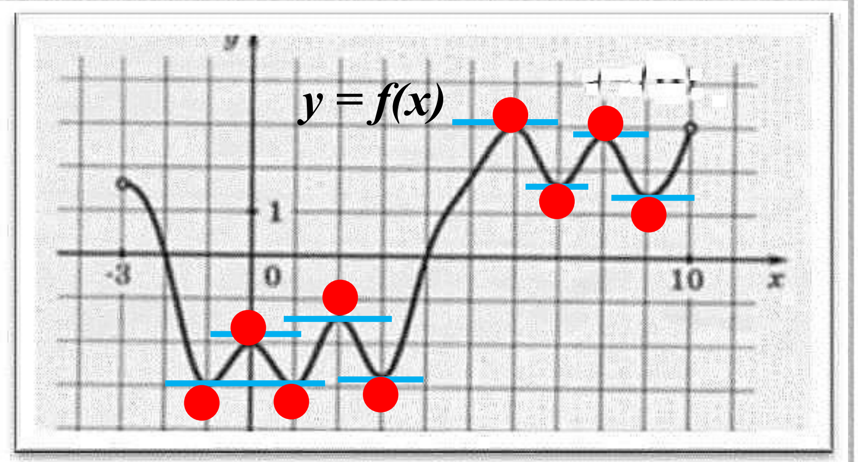
График функции

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (−3; 10). Найдите количество точек, в которых производная $f(x)$ равна 0.

Решение.

Чтобы производная функции была равна нулю, угловой коэффициент касательной, проведённой к графику функции в этой точке (или тангенс угла наклона касательной к положительному направлению оси Ох) был тоже равен нулю, поэтому касательная к графику функции в этой точке параллельна оси Ох.

Проведём горизонтальные касательные, посчитаем количество точек.



Ответ: 9.

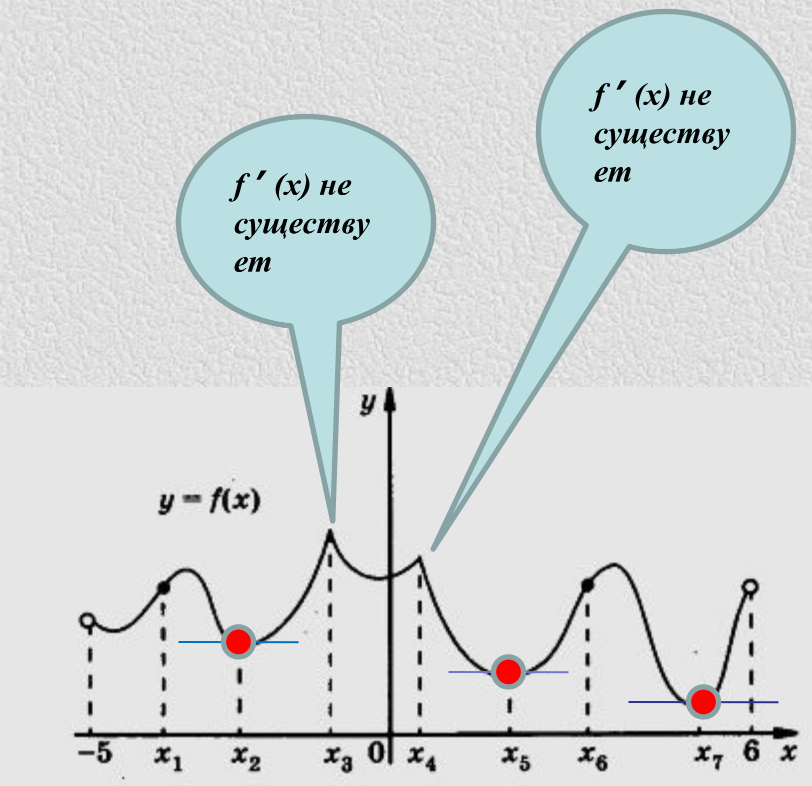
Функция *y = f(x)* определена на интервале (-5;6). На рисунке изображен график функции *y = f(x)*. Найдите среди точек x_1-x_7 те точки, в которых производная *f(x)* равна 0. В ответе запишите количество найденных точек.

Решение.

- Касательная параллельна оси Ox только в точках x_2, x_5, x_7.

(В точках x_3, x_4 производная не существует).

Ответ: 3.



На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведенная в точке x_0. Уравнение касательной дано на рисунке. Найдите значение производной функции $y = 2f(x)-1$ в точке x_0 .

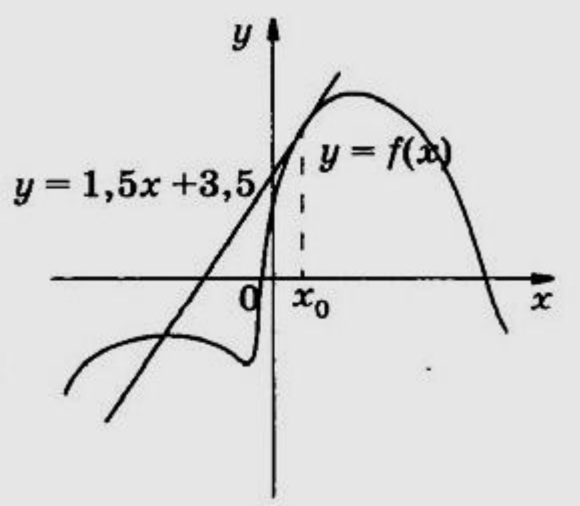
Решение.

1. Найдем производную функции y, т.е. $y' = (2f(x)-1)' = 2f'(x)$.

2. Известно, что в уравнении касательной $y = kx+b$ угловой коэффициент $k = f'(x)$.

Поэтому т.к. в нашем случае $y = 1{,}5x+3{,}5$, то $f'(x) = 1{,}5$.

3.Подставим $f'(x) = 1{,}5$, получим $y' = 2f'(x) = 2\cdot 1{,}5 = 3$ - это и есть искомое значение производной функции $y = 2f(x)-1$ в точке x_o .



Ответ: 3.

На рисунке изображен график функции *y=f(x)*, определенной на интервале (−1; 12). Определите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна.

Решение.

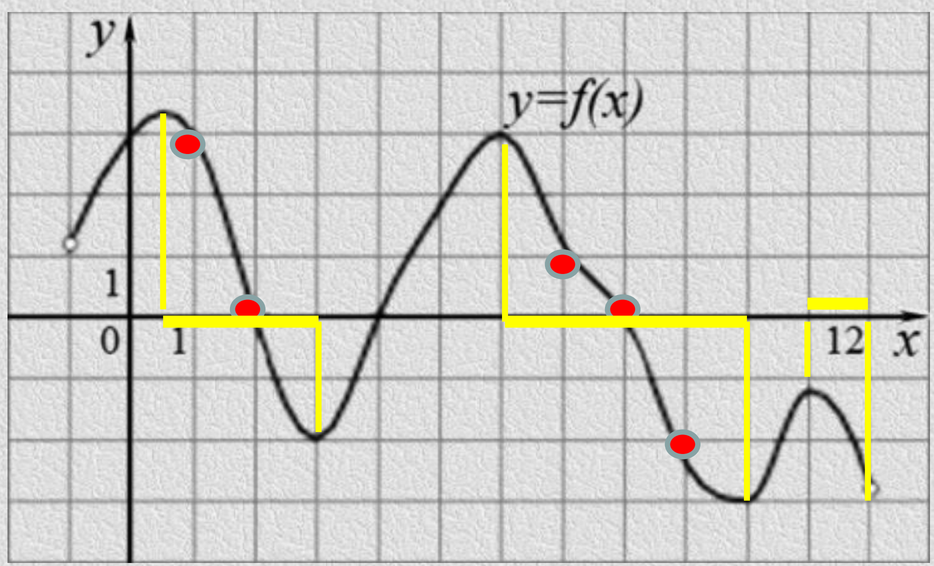
Производная функции отрицательна на интервалах убывания функции,

т. е. на интервалах ***(0,5; 3), (6; 10) и (11; 12),***

целыми являются точки ***x = 1; 2; 7; 8; 9***

(точки ***x = 3,6,10,11,12*** не принадлежат интервалам убывания функции)

Ответ: 5.



Прямая $y=5x+5$ является касательной к графику функции $8x^2+29x+c$. Найдите x.

Решение.

Тае как прямая $y = кx+в$ является касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_o , то одновременно выполняются два условия:
$$\begin{cases} f\,'(x)=к\,; \\ f\,(x_o)= y\,(x_o)\,. \end{cases}$$
В нашем случае:

$$\begin{cases} 16x_o+29=5; \\ 8x_o^2+29x_o+c=5x_o+5; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_o= -1,5; \\ c=23. \end{cases}$$

Ответ: 23.

Прямая $y = -9x+5$ является касательной к графику функции $ax^2 +15x+11$. Найдите a.

Решение.

Прямая $y = кx+в$ является касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_o, поэтому одновременно выполняются два условия:

$$\begin{cases} f'(x) = к; \\ f(x_o) = y(x_o). \end{cases}$$

Поэтому:

$$\begin{cases} 2ax_o+15 = -9; \\ ax_o^2+15x_o+11 = -9x_o+5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax_o = -12; \\ -12x_o +24x_o = -6; \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 24; \\ x_o = -0,5. \end{cases}$$

Ответ: 24.

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-2; 12)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.

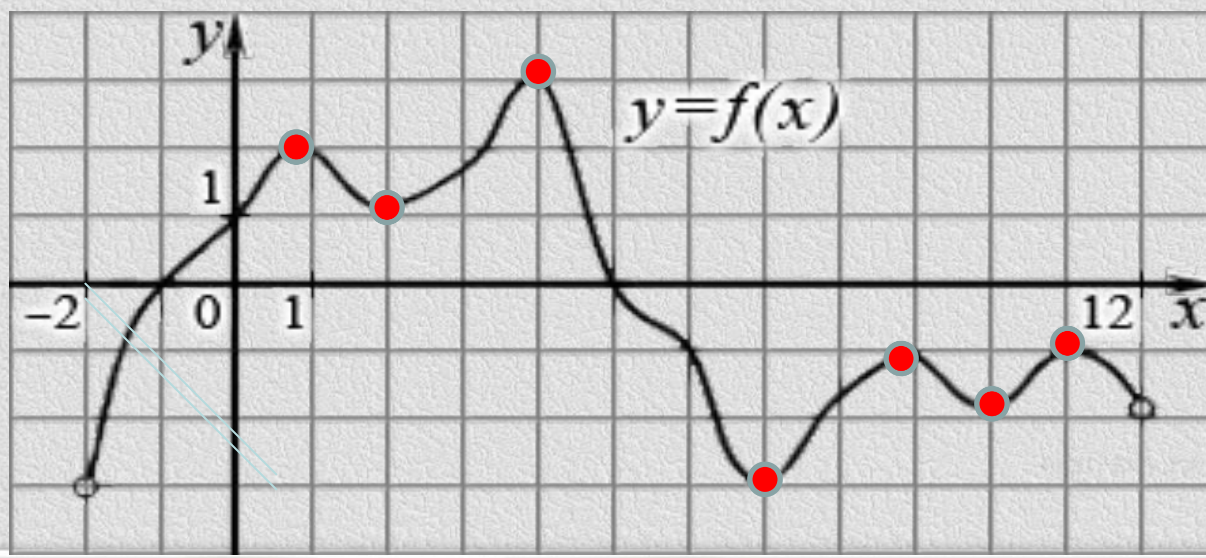
Решение.

Точки экстремума – это точки минимума и максимума. Заданная функция имеет максимумы в точках 1, 4, 9, 11 и минимумы в точках 2, 7, 10.

Поэтому сумма точек экстремума равна

$1 + 4 + 9 + 11 + 2 + 7 + 10 = 44.$

Ответ: 44.



На рисунке изображён график функции *y=f(x)* и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции *f(x)* в точке x_0.

Решение (первый способ)

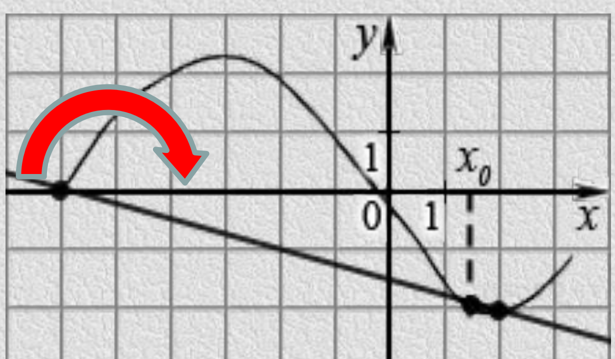
- Значение производной в точке касания равно тангенсу угла между данной касательной к положительным направлением оси абсцисс.

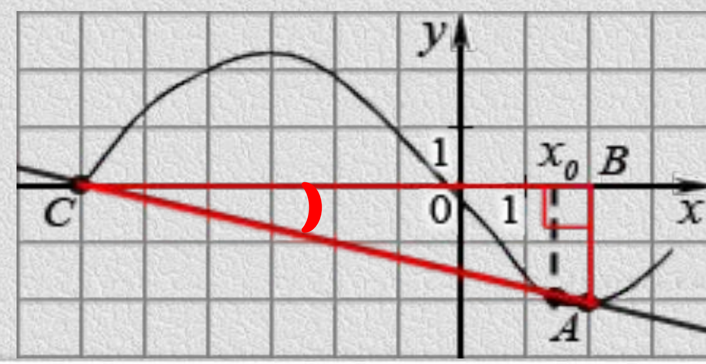
Построим треугольник с вершинами в точках ***A* (2; −2), *B* (2; 0), *C* (−6; 0).**

Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу, смежному с углом ACB.

$$f'(x_0) = tg(180° - \angle ACB) = -tg(\angle ACB) = -\frac{AB}{BC} = -\frac{2}{2-(-6)} = -0{,}25.$$

Ответ: - 0,25





На рисунке изображён график функции *y = f(x)* и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции *f(x)* в точке x_0.

- Решение (второй способ).

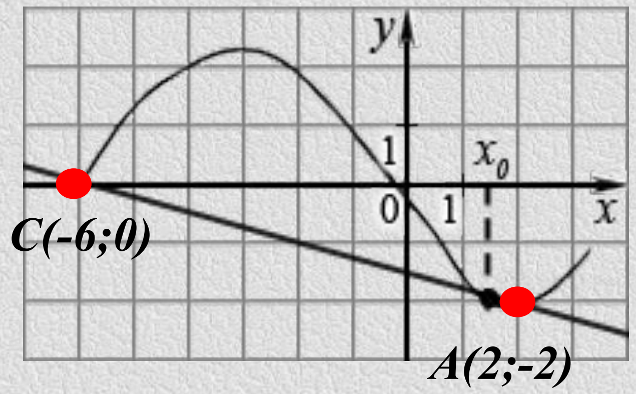
Определим координаты двух точек на графике касательной *C(-6;0), A(2;-2)* (т.е. слева $(x_1; y_1)$, справа $(x_2; y_2)$).

Воспользуемся формулой углового коэффициента прямой

$$f'(x) = k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

В нашем случае $f'(x) = \frac{-2-0}{2-(-6)} = -0,25$ – значение производной функции *f(x)* в точке x_0.

Ответ: - 0,25.



На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

Решение (третий способ)

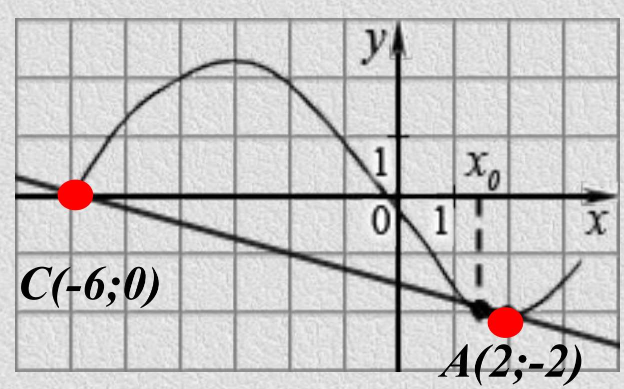
Уравнение касательной к функции $y = f(x)$ в точке x_0 имеет вид $y = f'(x_o) \cdot x + b$.

По рисунку определим, что данная касательная проходит через точки $C(-6;0)$, $A(2;-2)$

Составим систему уравнений , подставив координаты каждой точки вместо x и y. Получим

$$\begin{cases} 0 = f'(x_o) \cdot (-6) + b; \\ -2 = f'(x_o) \cdot 2 + b; \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -1{,}5; \\ f'(x_o) = -0{,}25. \end{cases}$$

Ответ: - 0,25.



На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику в точке абсциссой, равной 3. Найдите значение производной этой функции в точке $x = 3$.

- Решение.

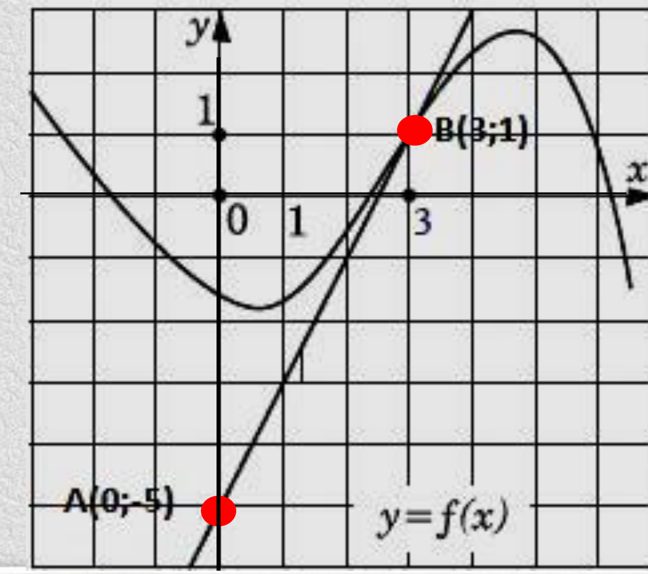
По условию $x_o = 3$.

Рассмотрим точки касательной $A(0;-5)$ и $B(3;1)$.

Воспользуемся формулой углового коэффициента прямой

$$к = f'(x_o) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

тогда $f'(x_o) = \frac{1-(-5)}{3-0} = 2.$



Ответ: 2.

На рисунке изображен график некоторой функции $y=f(x)$. Функция $F(x)=-x^3-21x^2-144x-\frac{11}{4}$ – одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры

Решение.

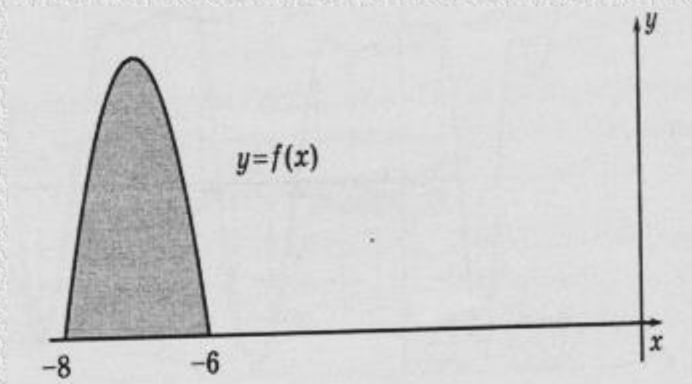
Площадь закрашенной фигуры вычисляется по формуле

$s = F(b)-F(a)$, где $a = -8$, $b = -6$.

$$F(b)=F(-6) = -(-6)^3-21\cdot(-6)^2 - 144\cdot(-6) - \frac{11}{4} = 324 - \frac{11}{4};$$

$$F(a)=F(-8) = -(-8)^3-21\cdot(-8)^2 - 144\cdot(-8) - \frac{11}{4} = 320 - \frac{11}{4};$$

$s = F(-6)- F(-8) = 4.$



Ответ: 4.

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите $F(8)-F(2)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

- Решение.

Ответить на вопрос задачи – значит вычислить

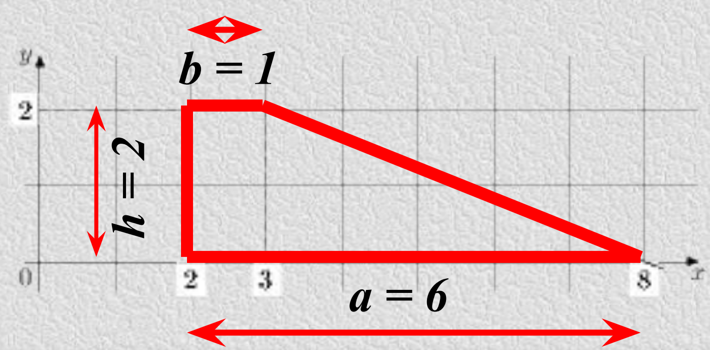
площадь фигуры, ограниченной функцией $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = 2$ и $x = 8$.

Фигура - это трапеция

с основаниями, равными $a = 8-2 = 6$, $b = 3-2 = 1$ и высотой $h = 2$.

По формуле площади трапеции $S = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h$ найдем искомую площадь, т.е. вычислим $F(8)-F(2)$

$S = \frac{1}{2}(1+6) \cdot 2 = 7.$



Ответ: 7.

На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Пользуясь графиком, вычислите определённый интеграл

$$\int_1^6 f(x)dx.$$

Решение.

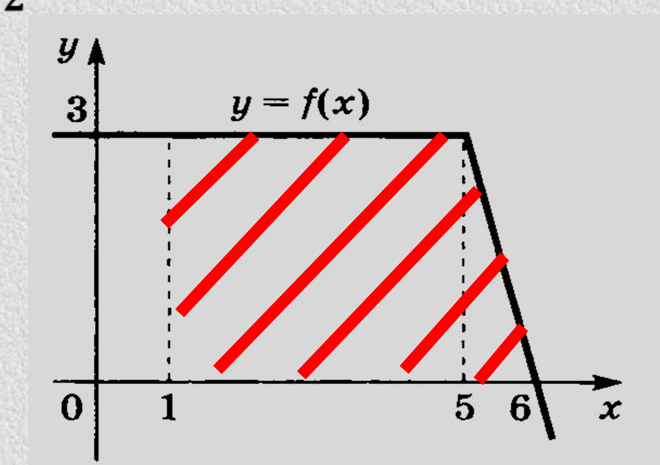
Определенный интеграл равен площади фигуры, ограниченной функцией $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = 1$ и $x = 6$.

Фигура (это заштрихованная часть на рисунке)

- это трапеция с основаниями, равными $a = 5\text{-}1 = 4$, $b = 6\text{-}1 = 5$ и высотой $h = 3$.

По формуле площади трапеции $S = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h$ найдем искомую площадь, т.е. данный интеграл

$$S = \frac{1}{2}(4+5) \cdot 3 = 13{,}5.$$



Ответ: 13,5.

На рисунке изображен график функции и отмечены точки −2, −1, 1, 4. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.

Решение.

В каждой из данных точек проведём касательную к графику функции

и определим, в какой из них будет самый большой угол между касательной и положительным направлением оси Ox.

При x = -1 угол самый большой, поэтому значение производной наименьшее.

Ответ: -1.

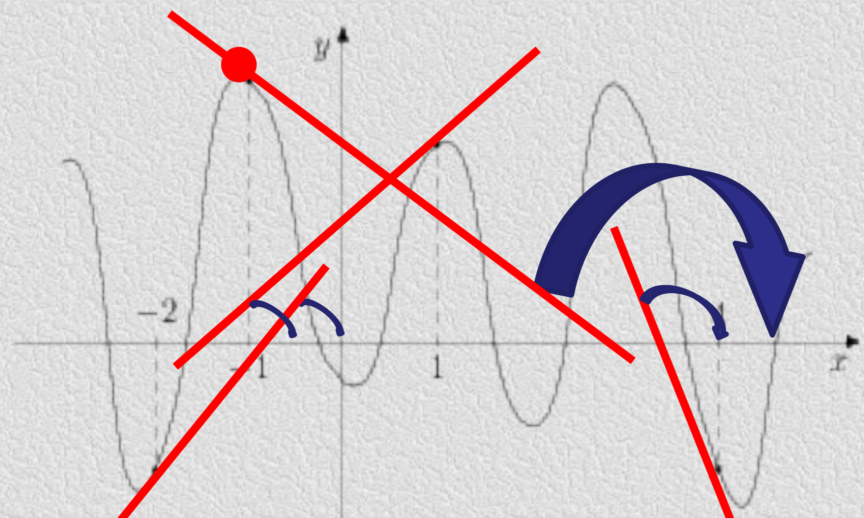


График производной функции

На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−10; 8). Найдите количество точек максимума функции *f(x)* на отрезке [−9;6].

Решение.

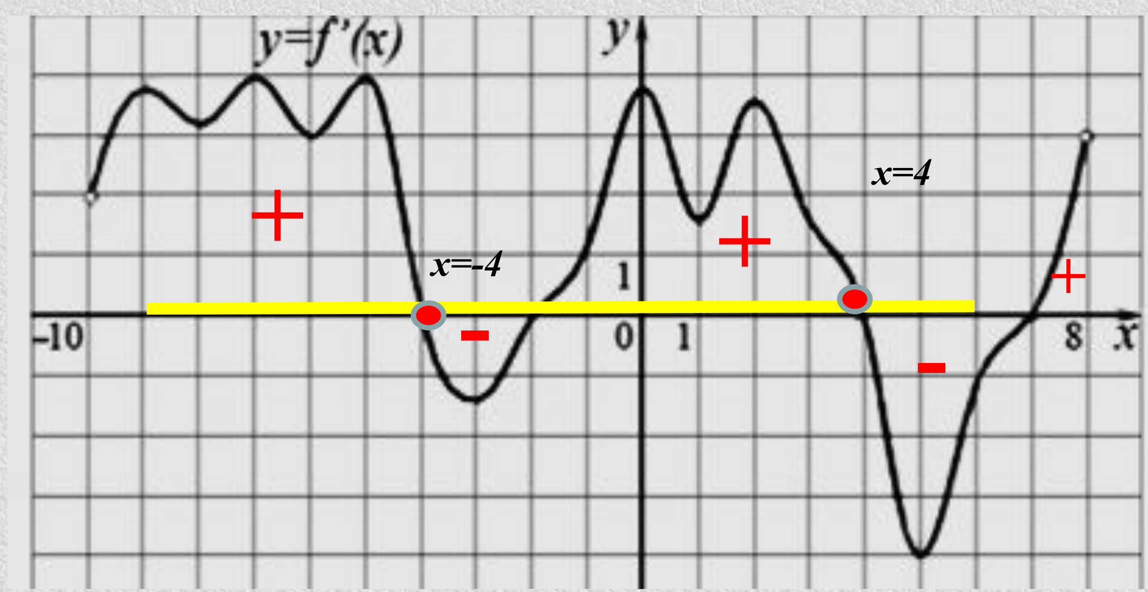
Рассмотрим отрезок **[−9;6].**

Производная меняет знак с плюса на минус

при ***x* = − *4*** и ***x* = *4*,**

Поэтому функция имеет 2 точки максимума.

Ответ: 2.

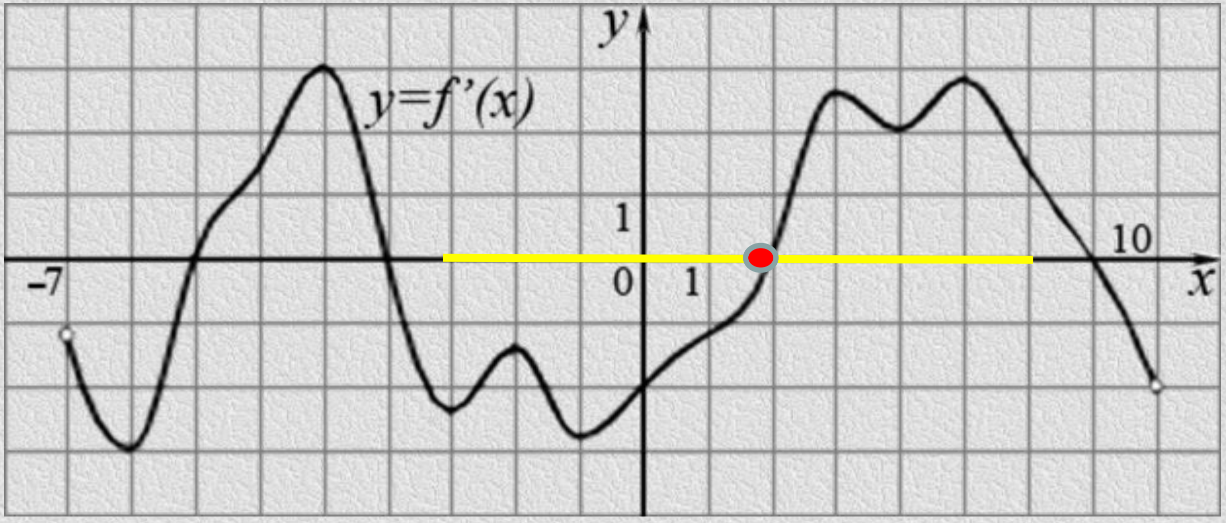


На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−7; 10). Найдите количество точек минимума функции *f(x)* на отрезке [−3; 8].

Решение.

На отрезке [−3; 8] функция имеет единственную точку минимума $x = 2$, так как в этой точке производная меняет знак с минуса на плюс.

Ответ: 1.



На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале *(−16; 4)*. Найдите количество точек экстремума функции *f(x)* на отрезке *[−14; 2]*.

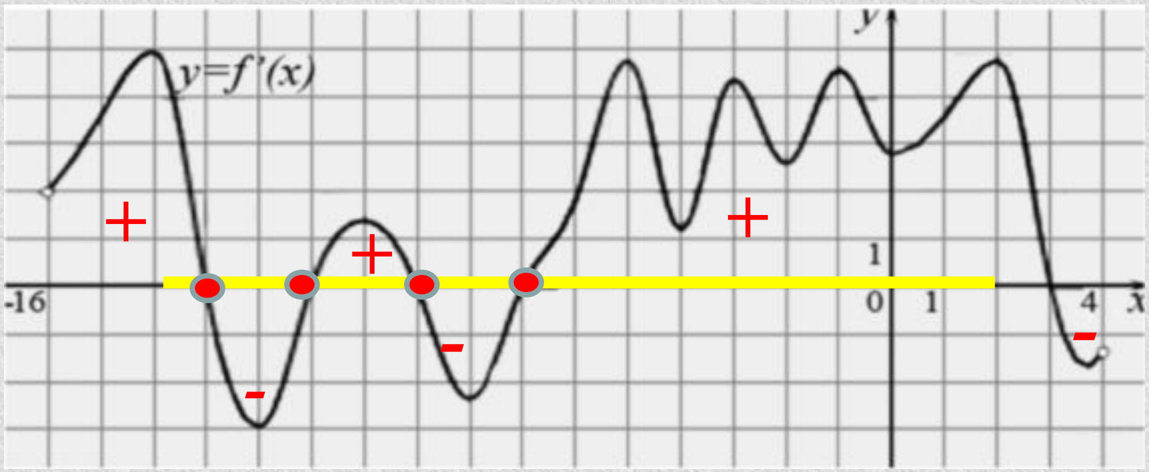
Решение.

Точки максимума и минимума функции называются точками экстремума.

Производная на отрезке [−14; 2] меняет знак с плюса на минус в точках $x = -13; -9$ (точки максимума);

а с минуса на плюс в точках $x = -11; -7$ (точки минимума), поэтому функция имеет 4 точки экстремума.

Ответ: 4.



На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−10; 4). Найдите промежутки убывания функции *f(x)*. В ответе укажите длину наибольшего из них.

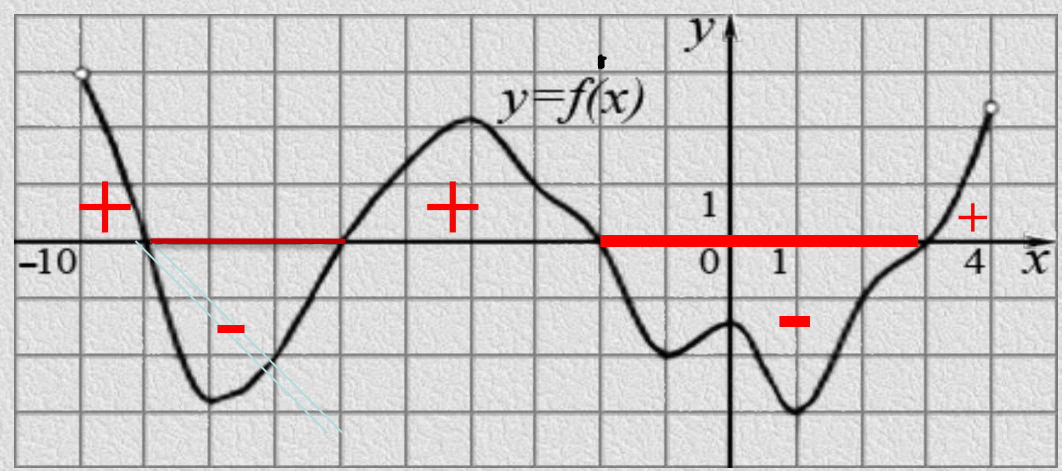
Решение.

- При $x \in (-9;-6)$ и $x \in (-2;3)$

значение производной функции меньше нуля, функция убывает.

Длина наибольшего из этих промежутков равна 5.

Ответ: 5.



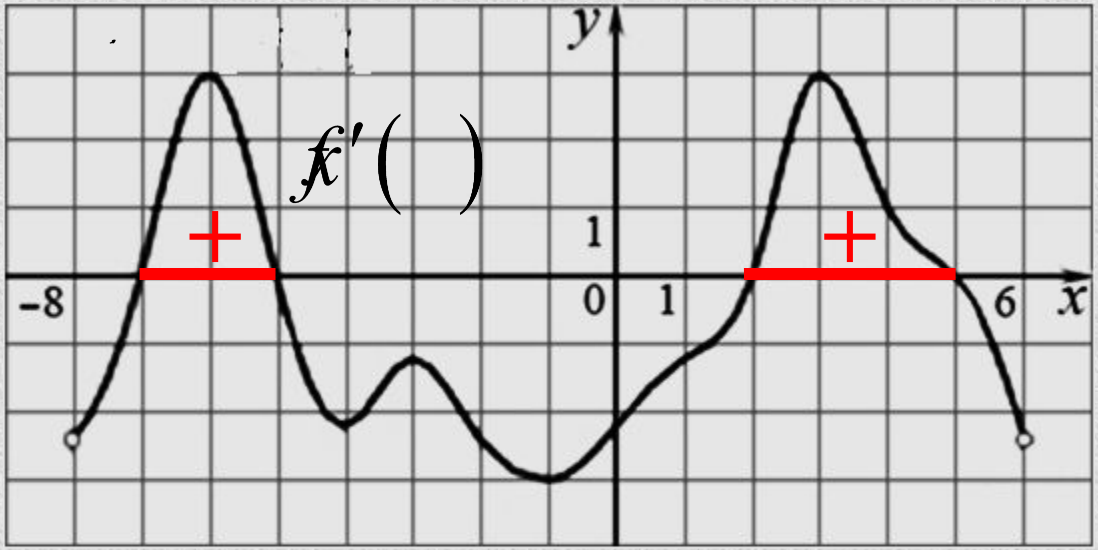
На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале *(−8; 6)*. Найдите промежутки возрастания функции *f(x)*. В ответе укажите длину наибольшего из них.

Решение.

Промежутки возрастания функции *f(x)* соответствуют промежуткам, на которых производная функции положительна, то есть интервалам (−7; −5), (2; 5).

Наибольший из них — интервал (2; 5), длина которого 3.

Ответ: 3.



На рисунке изображен график *y=f '(x)* производной функции *f(x)*, определенной на интервале *(−3; 8)*. В какой точке отрезка [-2;7] функция *f(x)* принимает наименьшее значение?

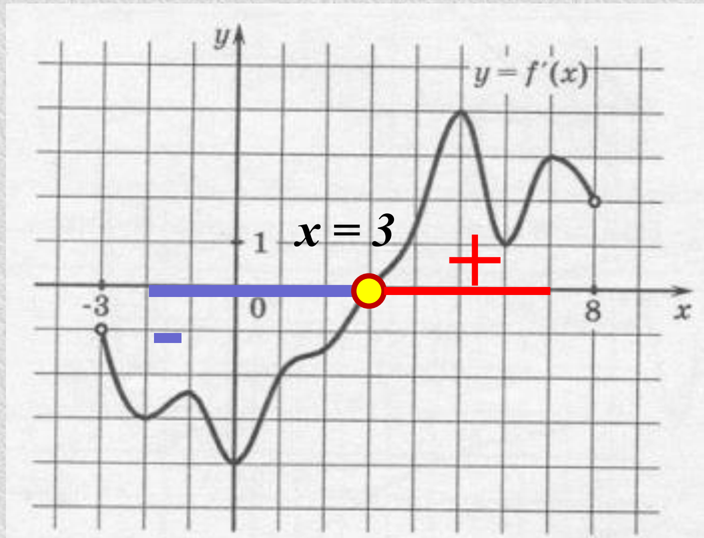
Решение.

На промежутке **[-2;3)** производная функции меньше 0, значит функция убывает.

На промежутке **(3;7]** производная функции больше 0, значит функция возрастает.

Поэтому $x = 3$ – точка минимума на отрезке **[-2;7]** ,

при $x = 3$ функция принимает наименьшее значение.



Ответ: 3.

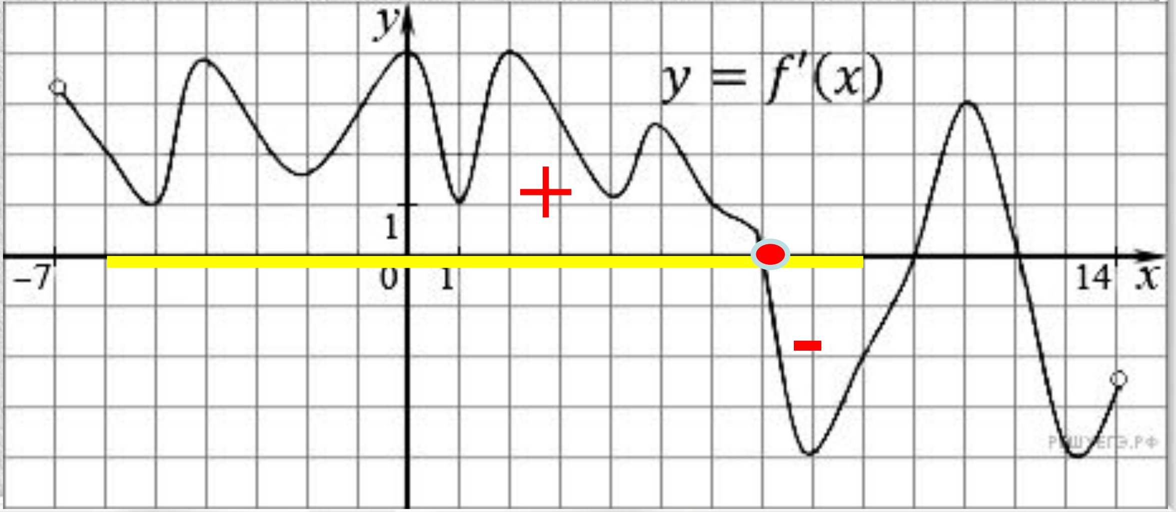
На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале *(−7; 14)*. Найдите количество точек максимума функции *f(x)* на отрезке [−6; 9].

Решение.

На отрезке **[−6; 9]**

функция имеет единственную точку максимума $x = 7$, так как лишь в этой точке производная функции меняет знак с «+» на «-».

Ответ: 1.



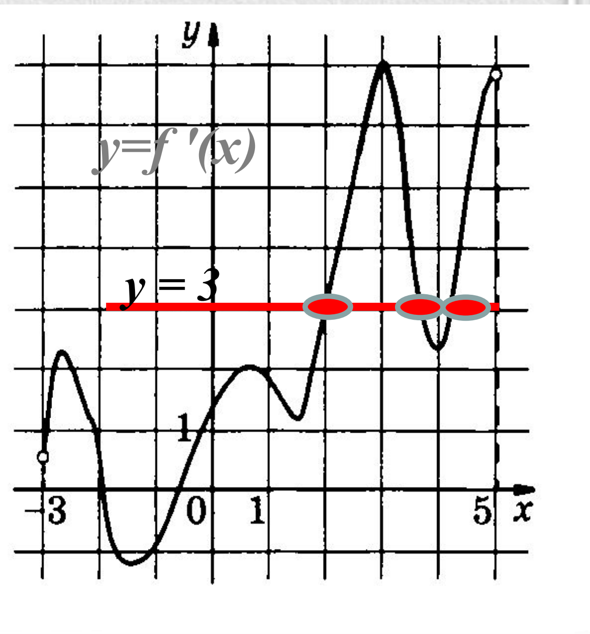
Функция $y = f(x)$ определена на интервале $(-3;\ 5)$. На рисунке изображен график ее производной. Определите, сколько существует касательных к графику функции $y = f(x)$, которые параллельны прямой $y=3x-5$ или совпадают с ней.

Решение.

Согласно условию параллельности прямых, касательная $y = kx+b$ к графику данной функции параллельна прямой $y = 3x-5$ или совпадает с ней, если у них будут равные угловые коэффициенты k. В нашем случае $k = 3$.

Так как $k = f'(x_0)$, найдём на графике производной те точки, в которых выполняется это условие.

Проведём прямую $f'(x)=3$, то есть $y = 3$ получим 3 точки пересечения с графиком $f'(x)$.



Ответ: 3.

На рисунке изображены график функции *y = f '(x)*. Найдите среди точек x_1 - x_7 те точки, в которых функция *f(x)* возрастает. В ответе запишите количество найденных точек.

Решение.

Функция возрастает, если её производная больше нуля.

Так как на рисунке показан график производной, то больше нуля она в тех точках, которые выше оси Ox , то есть в пяти точках.

Ответ: 5.

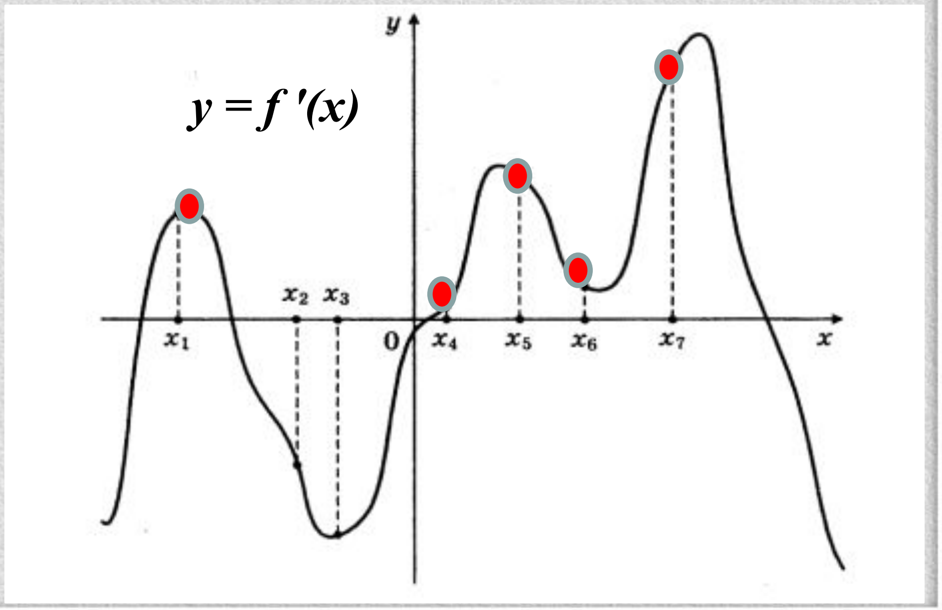


ГРАФИК ПЕРВООБРАЗНОЙ

На рисунке изображён график функции *y = F(x)* – одной из первообразных некоторой функции *f(x)*, определённой на некотором интервале *(-16; -2)*. Пользуясь рисунком, опре-делите число корней уравнения *f(x) = 0* на отрезке[-14; -4].

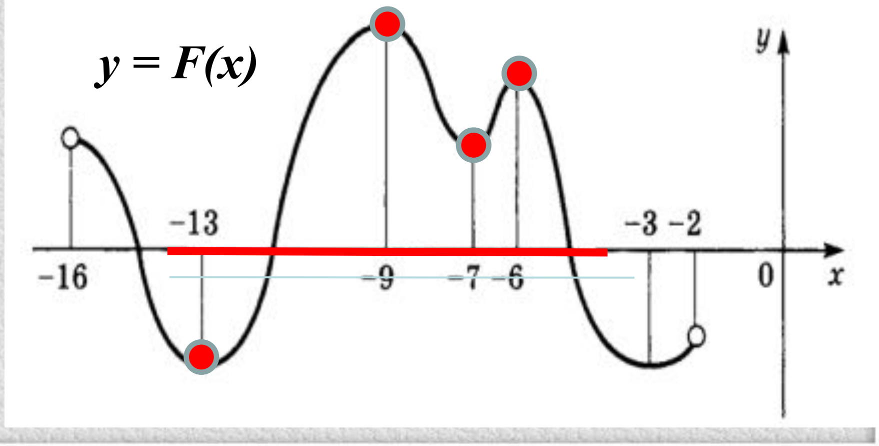
Решение.

Воспользуемся определением первообразной.

Функцию $y = F(x)$ называют первообразной для функции $y = f(x)$ на промежутке X, если для всех x из этого промежутка выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Производная функции y равна нулю в четырёх точках.

Ответ: 4.



Источники

- http://213.208.189.17/os11/xmodules/qprint/afrms.php?proj= ФИПИ. Открытый банк ЕГЭ. Математика
- ЕГЭ-2014: Математика: самое полное издание типовых вариантов заданий; под ред. А.Л.Семёнова, И.В.Ященко. – Москва: АСТ: Астрель, 2014. – 123, [5]с. - (Федеральный институт педагогических измерений).
- *http://pedsovet.su/* шаблон фона