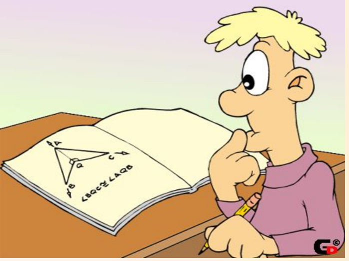


Федеральное государственное казенное
общеобразовательное учреждение
«Средняя общеобразовательная школа №151»

# КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ
# приемы устного решения

Полищук О. В.,
учитель математики
ФГКОУ СОШ №151
г. Оленегорск -2

# Цели:

знакомство с новыми  методами решения квадратных уравнений

углубление знаний по теме «Квадратные уравнения»

развитие математических, интеллектуальных способностей, навыков исследовательской работы

I. Приведенные квадратные уравнения

$$x^2+px+q=0$$

Корни $x_1$ и $x_2$ приведенного уравнения $x^2 + px + q = 0$ удовлетворяют теореме Виета

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = q \\ x_1 + x_2 = -p \end{cases}$$

Определить знаки корней без решения уравнения (при условии D>0) можно по следующим правилам:

|  | $p > 0$ | $p < 0$ |
|---|---|---|
| $q > 0$ | Оба корня отрицательны | Оба корня положительны |
| $q < 0$ | Корни имеют противоположные знаки | |

## 1. $q < 0$

# Правило нахождения корней уравнения.

1 найти такие множители числа q, чтобы их разность была равна числу p

2 поставить перед меньшим из найденных чисел второй знак уравнения, другой корень будет иметь противоположный знак.

*Пример 1.* Решить уравнение $x^2 - 2x - 15 = 0$

Решение.

1) найдем множители числа 15: 1 и 15; 3 и 5. Выберем те, разность которых равна 2.

Это числа 3 и 5.

2)перед меньшим числом ставим второй знак уравнения, т.е. «минус».

Таким образом, корни уравнения: $x_1 = -3$, $x_2 = 5$

Ответ: -3 и 5.

*Пример 2.* Решить уравнение $x^2 + 10x - 24 = 0$

*Пример 3.* Решить уравнение $x^2 - 5x - 14 = 0$.

2. Ответ: - 12; 2.

3. Ответ: - 2; 7.

*Задания для самостоятельного решения.*

1. Решите уравнения:

1) $x^2 - 4x - 77 = 0$

2) $x^2 + 8x - 20 = 0$

3) $x^2 + x - 56 = 0$

4) $x^2 - 7x - 8 = 0$

2. Составьте уравнение, корнями которого являются числа:

1) 6 и - 7

2) 13 и – 9

3) - 1 и 24

4) - 5 и 4

3. Составьте четыре произвольных уравнения с целыми корнями, имеющими разные знаки.

## 2. $q > 0$

# Правило нахождения корней уравнения.

1 если в уравнении два знака «плюс», то оба корня имеют знак «минус»

2 чтобы найти корни, нужно найти такие множители свободного члена $q$, чтобы их сумма была равна числу $p$

*Пример 1.* Решить уравнение $x^2 + 7x + 12 = 0$.

Решение.

$12 = 1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$ и $3 + 4 = 7$,

а в уравнении два «плюса», то корни уравнения $x_1 = -3$, $x_2 = -4$.

Ответ: $x_1 = -3$, $x_2 = -4$.

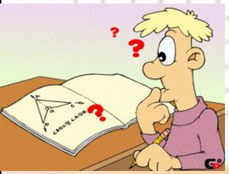
*Пример* 2. Решить уравнение $x^2 - 9x + 14 = 0.$

Решение.

$14 = 2 * 7$ и $2 + 7 = 9$, второй знак «минус», последний знак «плюс», значит, корни уравнения

$x_1 = 2$, $x_2 = 7$.

Ответ: $x_1 = 2$, $x_2 = 7$.



*Задания для самостоятельного решения.*

1. Решите уравнения:

1) $x^2 - 11x + 24 = 0$ 3) $x^2 - 17x + 30 = 0$

2) $x^2 + 4x + 3 = 0$ 4) $x^2 + 9x + 14 = 0$

2. Составьте уравнение, корнями которого являются числа:

1) 5 и 7 3) 11 и 8

2) - 1 и – 6 4) - 4 и - 20

3. Составьте четыре произвольных уравнения с целыми корнями.

# Алгоритм нахождения корней

1

Найти множители свободного члена, для которых действие, указанное последним знаком уравнения, дает второй коэффициент.

2

Расставить знаки у найденных множителей по следующему правилу:

- если в уравнении два «плюса», то в ответе два «минуса»
- если последний знак уравнения «минус», то меньшему корню присваивается второй знак уравнения, больший корень имеет противоположный знак

*Пример 1.* Решить уравнение $x^2 - 7x - 30 = 0$.

Решение.

Множители числа 30:

1 и 30; 2 и 15 ; 3 и 10 ; 5 и 6.

Последний знак в уравнении « - », подбираем те множители, разность которых равна 7: Это 3 и 10.

Меньшему числу присваиваем знак « - ».

Таким образом, корни уравнения: $x_1 = -3$ , $x_2 = 10$.

Ответ: $x_1 = -3$ , $x_2 = 10$.

*Пример 2.* Решить уравнение $x^2 - 7x + 6 = 0$.

Решение.

Среди множителей числа 6 ищем такие, сумма которых равна 7

( последний знак уравнения « + »).

Это числа 1 и 6., таким образом, $x_1 = 1$, $x_2 = 6$.

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = 6$.

II. Квадратные уравнения вида

$$ax^2 + bx + c = 0$$

# Свойства коэффициентов квадратного уравнения

Пусть дано квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$

1. Если a + b + c = 0 (т.е сумма коэффициентов равна нулю), то $x_1=1, x_2=\frac{c}{a}.$

Доказательство.

Разделим обе части уравнения на α, получим приведённое квадратное уравнение $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$

По теореме, обратной теореме Виета:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}. \end{cases}$$

По условию a + b +c =0, откуда b= - a – c. Значит,

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{-a-c}{a}=1+\frac{c}{a} \\ x_1\cdot x_2=1\cdot\frac{c}{a}. \end{cases}$$

Получаем $x_1=1, x_2=\frac{c}{a},$ что и требовалось доказать.

**2. Если *а – в + с = 0, или в = а + с,* то**

$$x_1 = -1, x_2 = -\frac{c}{a}$$

Докажите самостоятельно.

# Приемы «коэффициентов»

1. Если в квадратном уравнении

а+в+с=0, то его корни:

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a}.$$

*Пример* **1.** Решить уравнение $4x^2 - 13x + 9 = 0$.

Решение.

Сумма коэффициентов $4 - 13 + 9 = 0$, значит,

$x_1 = 1, x_2 = 9/4$

Ответ: $x_1 = 1, x_2 = 9/4$

# Приемы «коэффициентов»

2. Если в квадратном уравнении

в = а +с , то его корни:

$$x_1 = -1, x_2 = \frac{-c}{a}.$$

*Пример* 1. Решить уравнение $2x^2 + 7x + 5 = 0$

Решение. 7 = 2 + 5, значит, $x_1 = -1$, $x_2 =$ - корни уравнения

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = -2{,}5$.

*Пример* 2. Решить уравнение $5x^2 + 3x - 2 = 0$

Решение. 3 = 5 + (-2), значит, $x_1 = -1$, $x_2 =$

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = 0{,}4$.

# Метод «переброски»

Если в квадратном уравнении $ax^2 + вx + c = 0$

$a \pm в + c \neq 0$, то используем метод «переброски коэффициента».

Умножим обе части уравнения на $a \neq 0$, получим

$$a^2x^2 + авx + ac = 0$$

Пусть $ax = y \square x = \frac{y}{a}$.

Тогда приходим к уравнению $y^2 + вy + ax = 0$ равносильному данному . Его корни $y_1, y_2$

Окончательно $x_1 = \frac{y_1}{a}; x_2 = \frac{y_2}{a}$

*Пример* **1.** Решить уравнение $3x^2 + 2x - 1 = 0$

Решение.

$3x^2 + 2x - 1 = 0, \mid \cdot 3$

$9x^2 + 6x - 3 = 0$

$(3x)^2 + 2 \cdot (3x) - 3 = 0$

Пусть $3x = y$, тогда получим уравнение:

$y^2 + 2y - 3 = 0$. Сумма коэффициентов равна нулю:

$1 + 2 - 3 = 0$, значит, $y_1 = 1$, $y_2 = -3/1 = -3$.

Вернемся к подстановке: 1) $3x = 1$, $x = 1/3$.

2) $3x = -3$, $x = -1$.

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = 1/3$.

При этом способе коэффициент а умножается на свободный член, как бы «перебрасывается» к нему, поэтому его и называют способом «переброски».

Этот способ применяют, когда можно легко найти корни уравнения, используя теорему Виета и, что самое важное, когда дискриминант есть точный квадрат.

*Пример 2*. Решить уравнение $2x^2 – 11x + 5 = 0$

Решение.

«Перебросив» коэффициент, получим приведенное квадратное уравнение

$x^2 - 11x + 10 = 0$, корни которого 1 и 10.

Делим каждое число на 2, получаем корни данного уравнения: $x_1 = 0{,}5$, $x_2 = 5$.

Ответ: $x_1 = 0{,}5$, $x_2 = 5$.

*Пример 3.* Решить уравнение $6x^2 - 7x - 3 = 0.$

Решение.

«Перебросив» коэффициент, получим приведенное квадратное уравнение $x^2 - 7x - 18 = 0$, корни которого 9 и – 2.

Делим на 6 найденные числа.

Корни данного уравнения $x_1 = \frac{9}{6}, x_2 = -\frac{2}{6}$

Ответ: $x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = -\frac{1}{3}$

*Пример 4.* Решить уравнение $3\sqrt{2}x^2-\left(3+\sqrt{2}\right)x+1=0.$

Решение:

Используя метод «переброски», получим уравнение

$$y^2-\left(3+\sqrt{2}\right)y+3\sqrt{2}=0.$$

По теореме Виета

$$\left[\begin{array}{l} y_1=3 \\ y_2=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{3}{3\sqrt{2}} \\ x_2=\dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x_2=\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

Ответ: $\dfrac{1}{3};\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

# Задания для самостоятельного решения

1. Решить уравнение.
   1) $5x^2-7x+2=0$
   2) $11x^2 + 25x - 36 = 0$
   3) $345x^2 - 137x - 208 = 0$
   4) $3x^2 + 5x - 8 = 0$
   5) $5x^2 + 4x - 9 = 0$
   6) $5x^2 - 7x - 12 = 0$
   7) $11x^2 + 25x + 14 = 0$

# Задания для самостоятельного решения

8) $3x^2 + 5x + 2 = 0$

9) $5x^2 + 4x – 1 = 0$

10) $x^2 + 4x + 3 = 0$

11) $2x^2 – 9x + 9 = 0$

12) $10x^2 – 11x + 3 = 0$

13) $3x^2 + 11x + 6 = 0$

14) $6x^2 + 5x – 6 = 0$

15) $3x^2 + x – 4 = 0$

Желаю удачи!