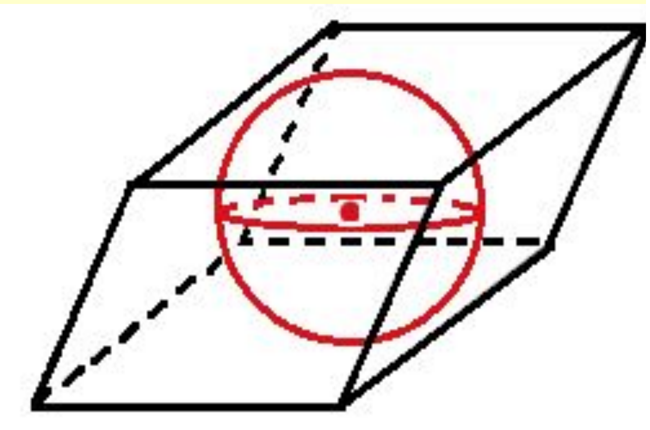
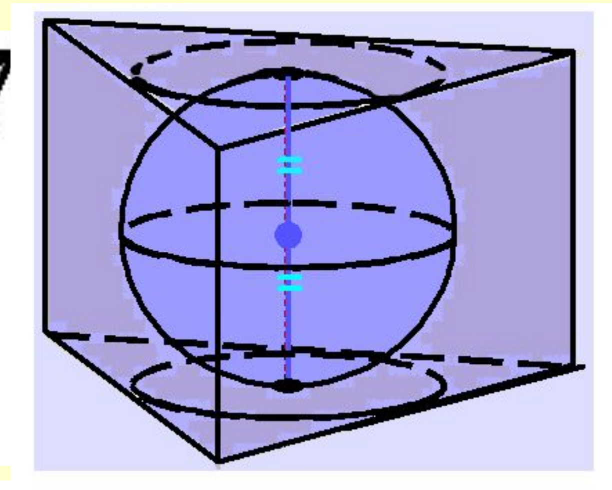
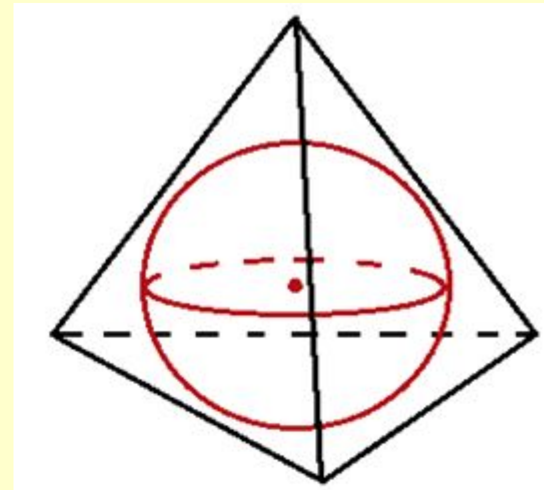
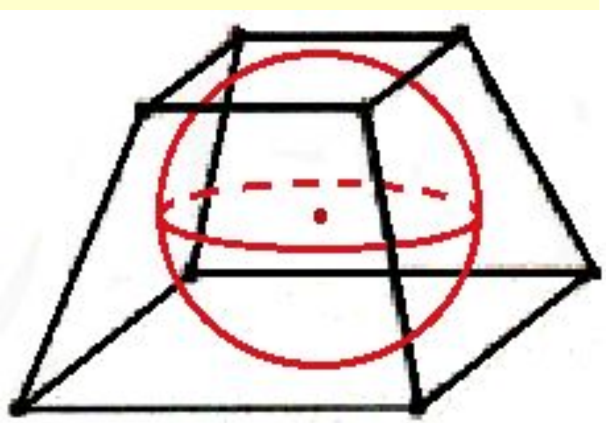
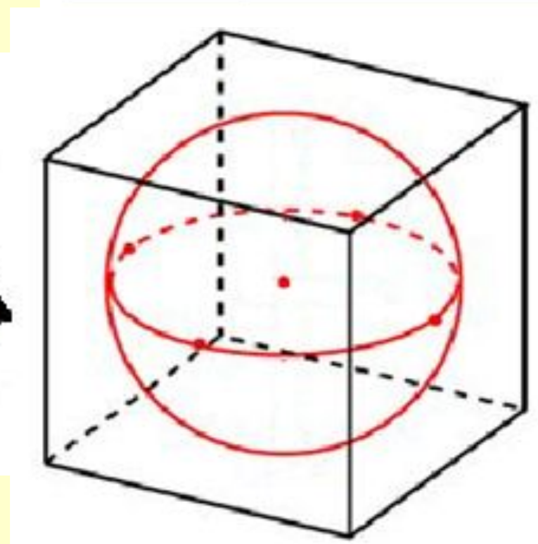
Сфера, вписанная в многогранник

Сфера, вписанная в многогранник

Определение

Многогранник называется описанным около сферы(а сфера вписанной в многогранник), если все грани многогранника касаются этой сферы.

Следствие

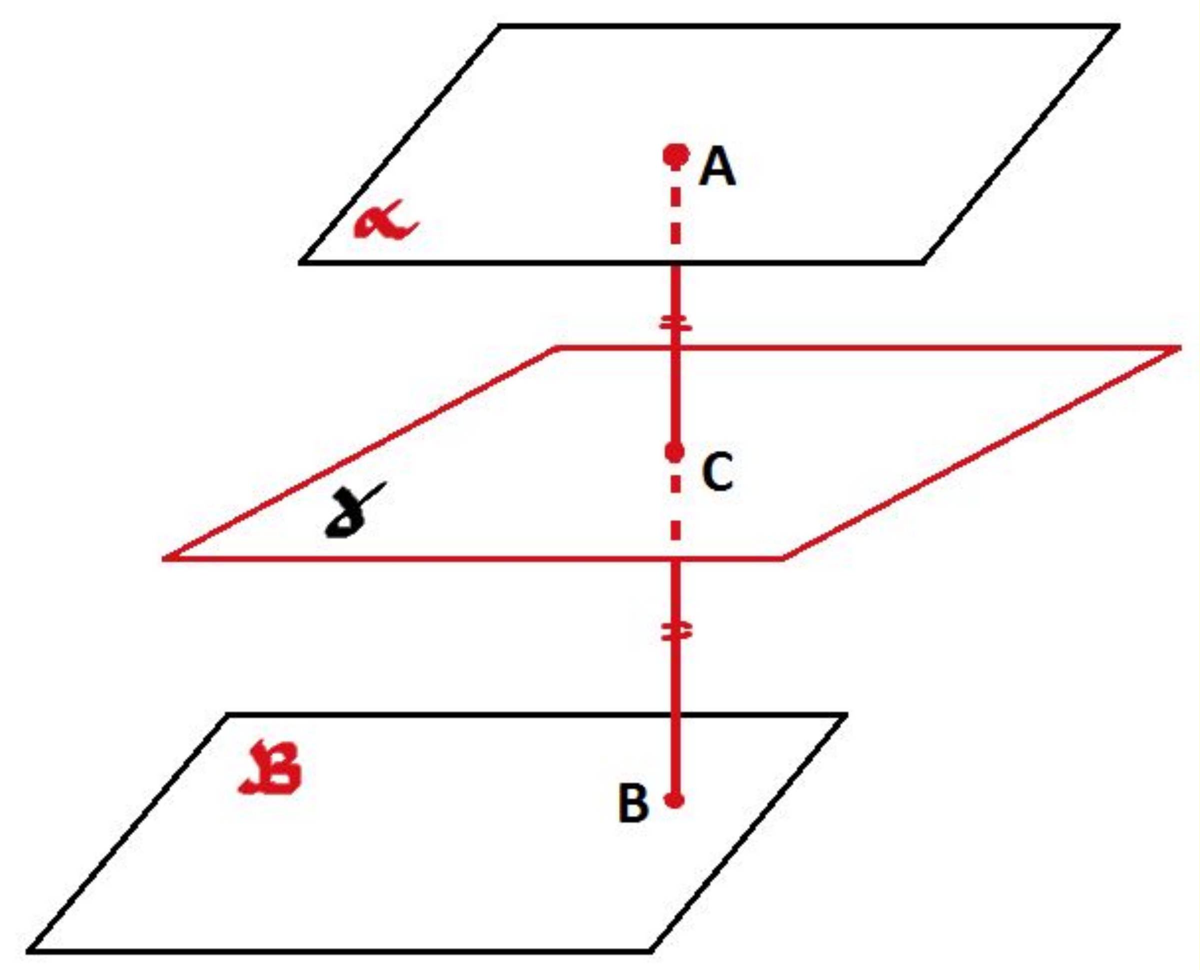
Центр вписанной сферы есть точка, равноудаленная от всех граней многогранника.

Подготовительные задачи

1. Где расположено множество точек пространства , равноудаленных от двух плоскостей?

Теорема 1

Множество точек, равноудаленных от двух параллельных плоскостей ,есть плоскость, параллельная данным плоскостям и проходящая через середину общего перпендикуляра этих плоскостей.



Дано:

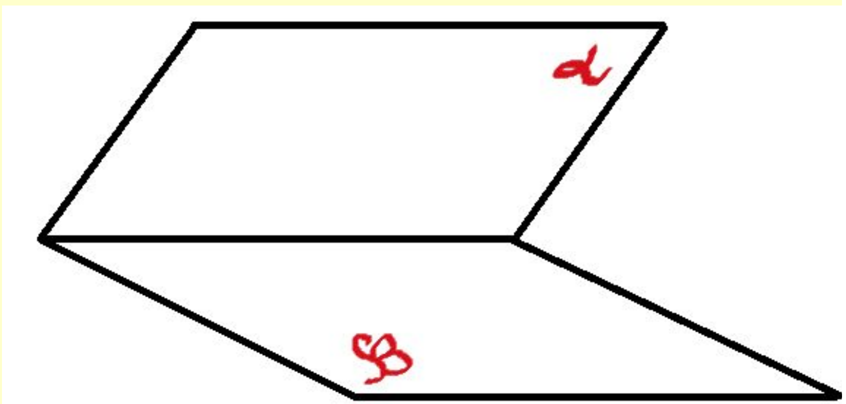
α || β;

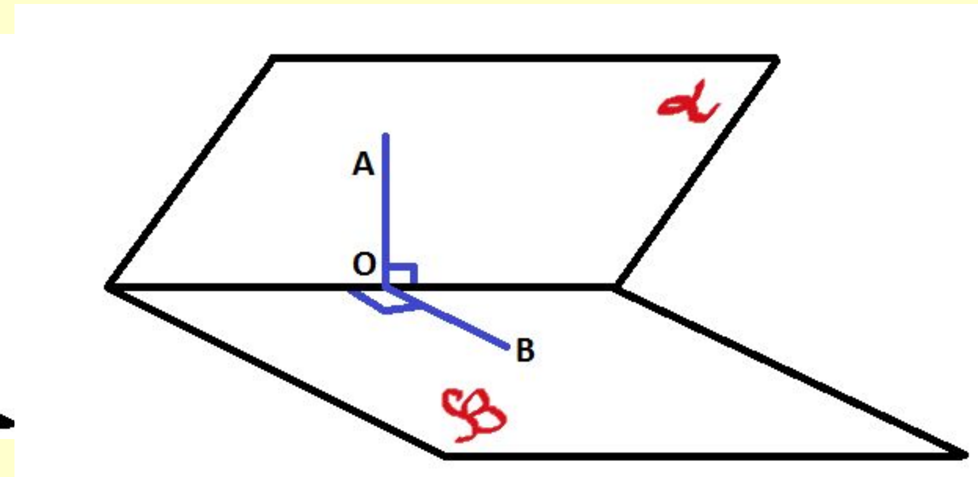
γ|| α; γ|| β;

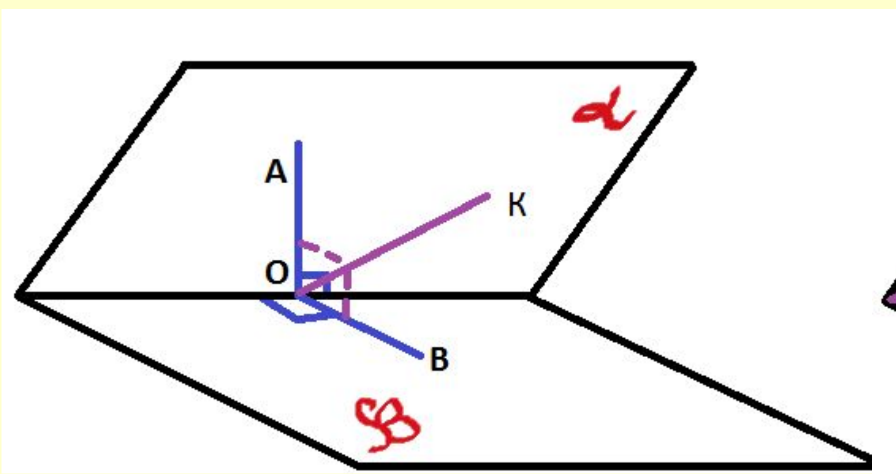
AC=CD; AB |α; AB| β

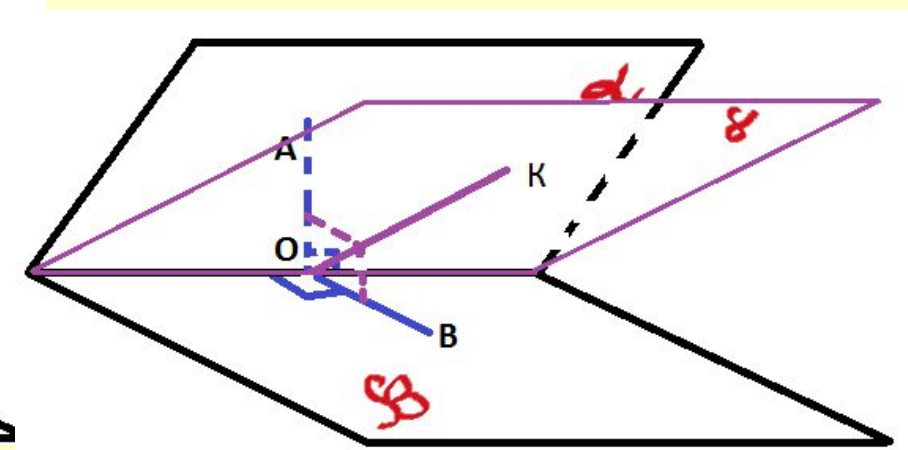
Теорема 2

Множество точек, равноудаленных от граней двугранного угла, есть есть биссектриса (биссекторная плоскость) этого двугранного угла.



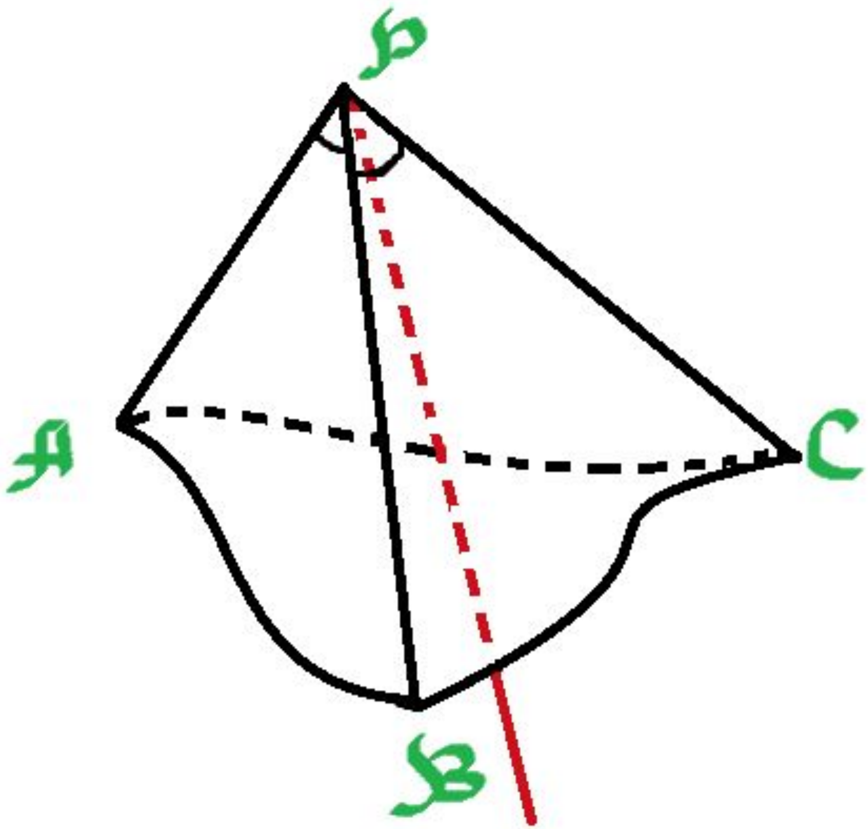






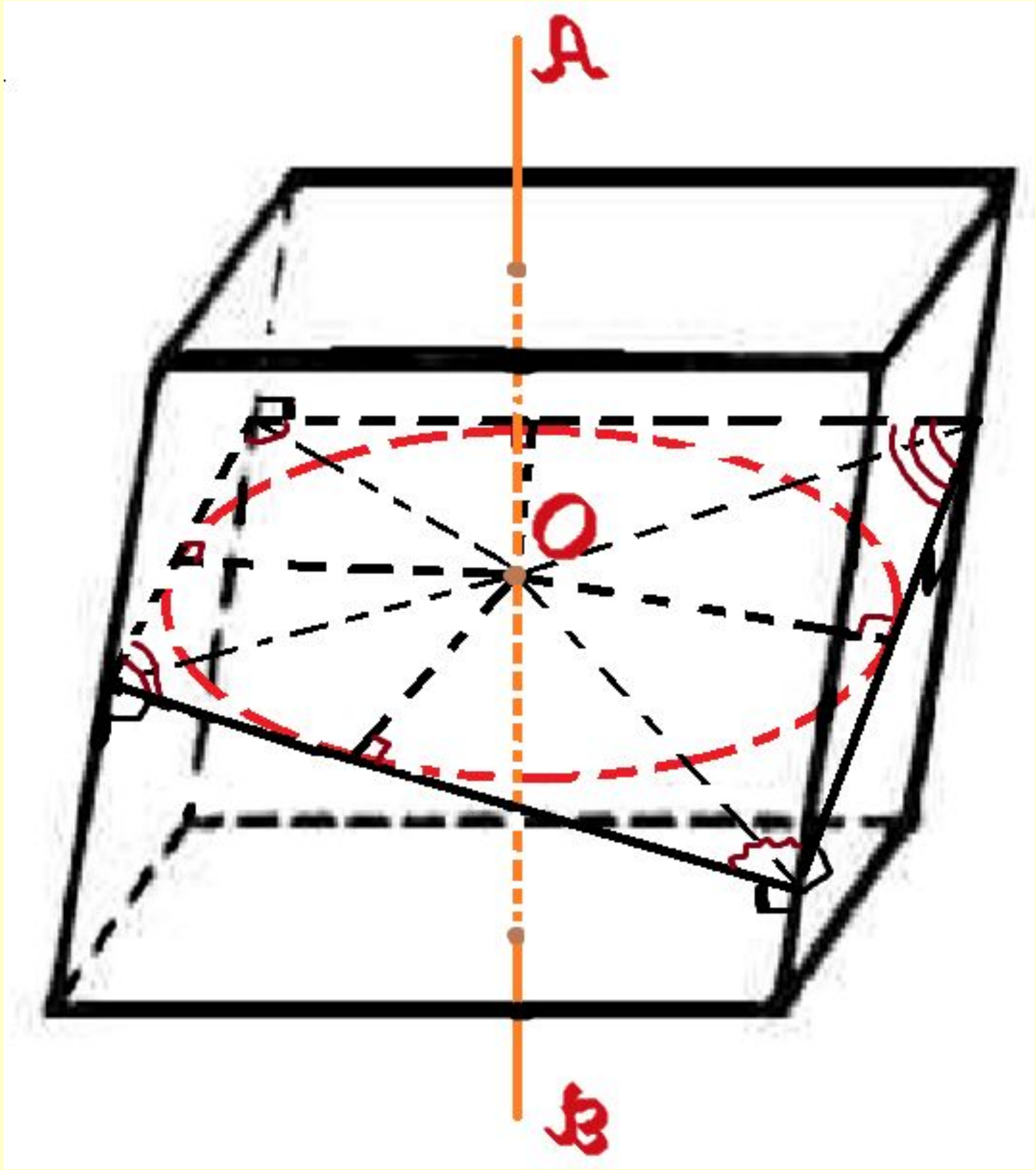
Теорема 3

Множество точек, равноудаленных от граней трехгранного угла, есть биссектриса этого трехгранного угла.



Биссектрисой трехгранного угла называется луч с началом в вершине данного трехгранного угла, который образует равные углы с гранями этого трехгранного угла.

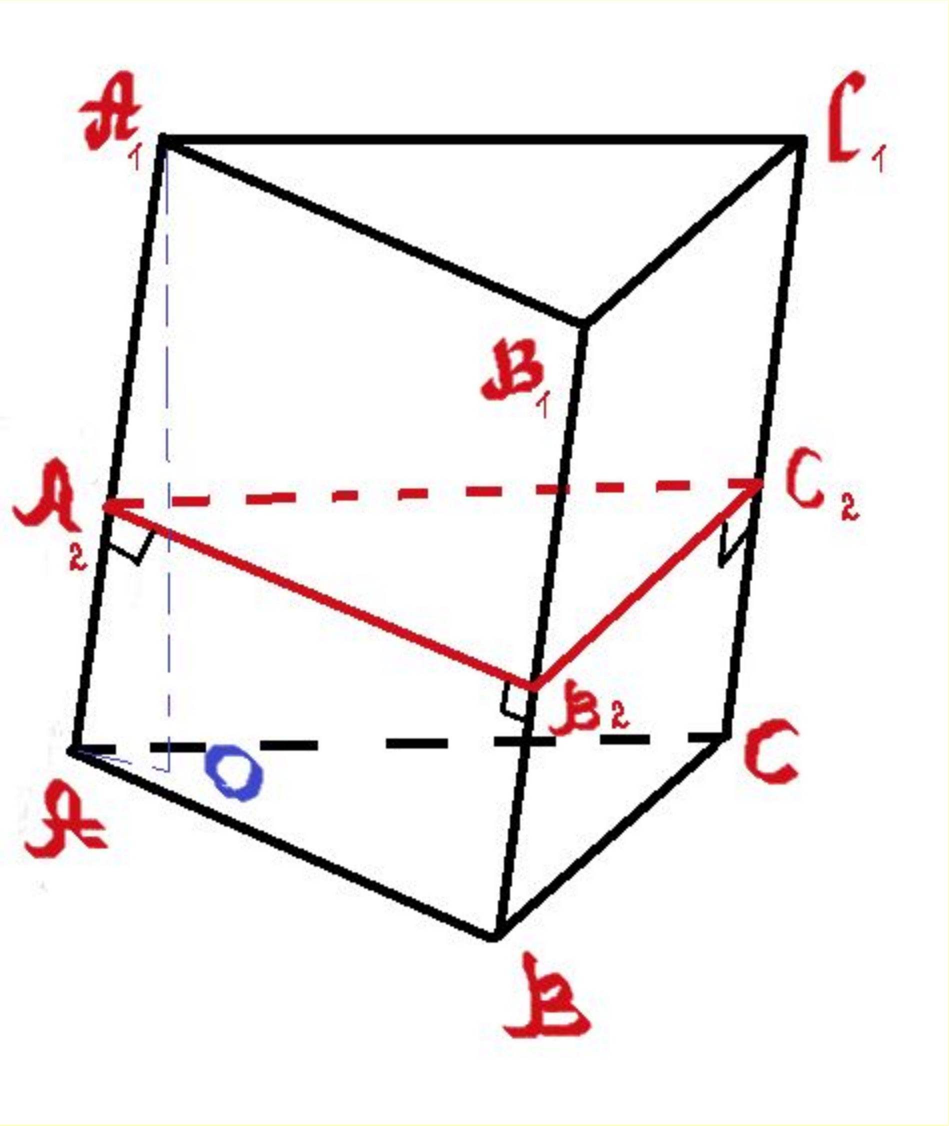
Сфера, вписанная в призму



Теорема 4

В призму можно вписать сферу тогда и только тогда, когда в перпендикулярное сечение этой призмы можно вписать окружность, и высота призмы равна диаметру этой окружности (диаметру вписанной сферы).

2. Расстояние между боковыми ребрами треугольной призмы 13,14,15.В призму вписан шар. Боковое ребро составляет с плоскостью основания угол α . Найти объем призмы и объем шара.



Решение.

($A_2B_2C_2$)-перпендикулярное сечение.

$V ш. = \frac{4}{3} \Pi R ш.^3$

$S = \frac{1}{2} P r_{окр}$

1) $R ш. = r_{впис.окр.} = S_{A2B2C2} / p$

$p = 21$;

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$;

$S_{A2B2C2} = 84$;

$R ш. = 84/21 = 4$;

$V ш. = \frac{4}{3} \Pi R ш.^3$; $V ш. = 256\Pi/3$;

2) $V пр. = S$ перп.сеч.$*AA_1$;

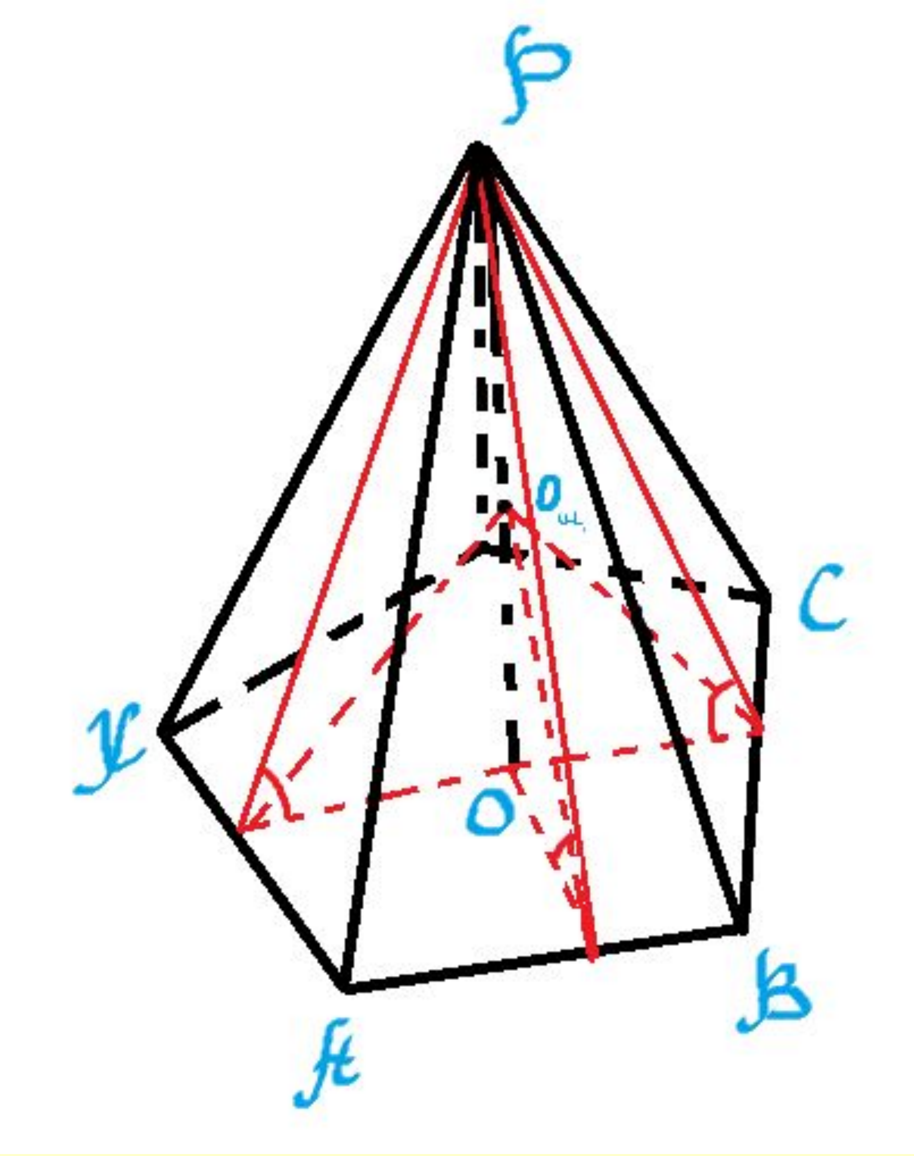
$AA_1 = A_1O/\sin\alpha = 8/\sin\alpha$;

$V пр. = 84*8/\sin\alpha = 672/\sin\alpha$.

Ответ: $256\Pi/3$; $672/\sin\alpha$.

Сфера, вписанная в пирамиду

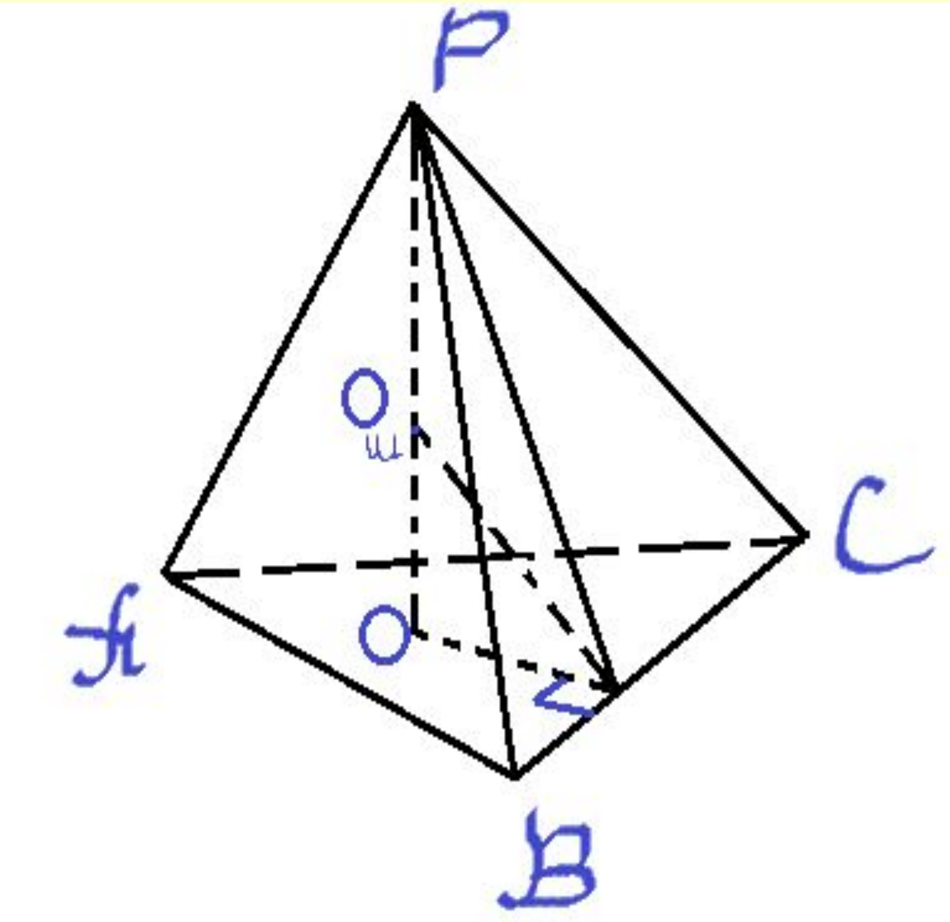
Боковые грани пирамиды одинаково наклонены к основанию.



Теорема 5

Если боковые грани пирамиды одинаково наклонены к основанию(двугранные углы при основании пирамиды равны), то в пирамиду можно вписать сферу, центр которой находится в точке пересечения высоты пирамиды и биссектрисы двугранного угла при основании пирамиды.

3.Основание пирамиды- треугольник со сторонами 9,10 и 17.Все боковые грани наклонены под углом 45^o к основанию пирамиды .Найти радиус вписанного шара.



Решение.

1)ОК= $r_{впис.окр.} = S/p$;

$S = p * r_{впис.окр.}$;$p=18$;

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$;

$S_{\Delta ABC}=36$;$OK=2$.

2) ΔPOK: $KO_ш$.-биссектриса, т.о.

$OO_ш./O_ш.p=OK/PK=\cos 45^o$;

$OO_ш./O_ш.p=1/\sqrt{2}$;

$<PKO=45^o$,т.е.$OK=OP=2$

$\frac{1}{2}R_ш-R_ш.=1/\sqrt{2}$;

$\sqrt{2}\, R_ш.=2-R_ш.$;

$R_ш.=2/(1+\sqrt{2})=2(\sqrt{2}-1)$.

Ответ: $2(\sqrt{2}-1)$.

Теорема 6

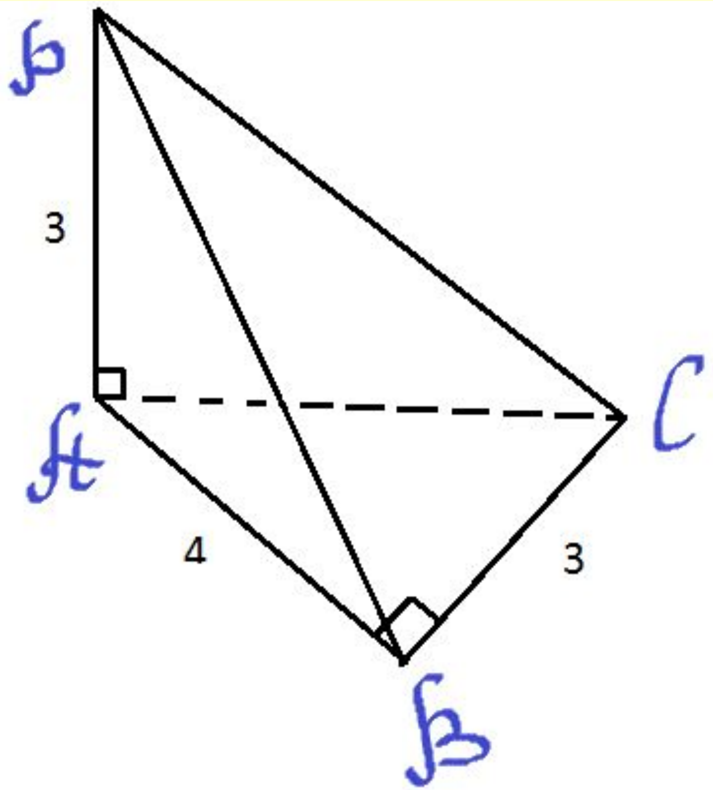
В любой тетраэдр можно вписать сферу.

Теорема 7

Если в многогранник, объем которого равен V,а площадь поверхности равна S, вписан шар радиуса R,то имеет место соотношение: $V = \frac{1}{3} S * R$

3.Основание пирамиды- треугольник ABC,В котором AB|BC,AB=4,BC=3.Боковое ребро PA перпендикулярно плоскости основания пирамиды и равно 3.Найдите объем шара, вписанного в пирамиду.

Решение.



*1)Vпир.=⅓$S_{\Delta ABC}$*AP;*

*Vпир.=⅓*½*3*4*3=6.*

2)PB|BC(по теореме о трех перпендикулярах);AC=PB=5.

3) $S_{\Delta PAB} = S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$.

$S_{\Delta PBC} = S_{\Delta PAC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 = 7{,}5$.

*Sполн.=2*6+2*7,5=12+15=27.*

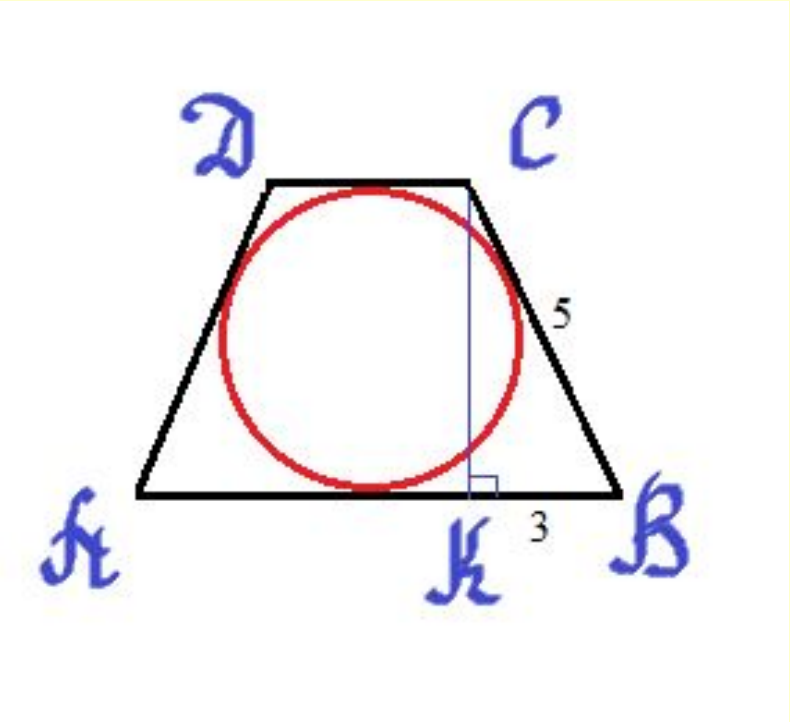
4)Rш.=3 Vпир./S;

*Rш.=3*6/27=⅔;*

Vш.=$\frac{4}{3}\Pi R^3 = 32\Pi/81$.

Ответ: 32П/81.

4. Шар вписан в прямую призму, основание которой- равнобедренная трапеция с основаниями 2 и 8.Найдите объем шара и объем призмы.



Решение.

1)$R_ш = r_{впис.окр.}$;$H_{пр.} = D_{впис.окр.} = CK$.
2)$DC+AB=AD+CB$;
$2BC=2+8$; $BC=5$.
3)$BC=\frac{1}{2}(AB-DC)$; $BK=\frac{1}{2}(8-2)=3$;
4) ΔBCK: $CK=4$; $R_ш=2$.
5)$V_{пр.}=S_{осн.}*H_{пр.}$;
$V_{пр.}=80$;
$V_ш = \frac{4}{3}\Pi R^3$;
$V_ш = \frac{4}{3}\Pi 2^3 = 32\Pi/3$.
Ответ: $32\Pi/3$.

Спасибо за внимание