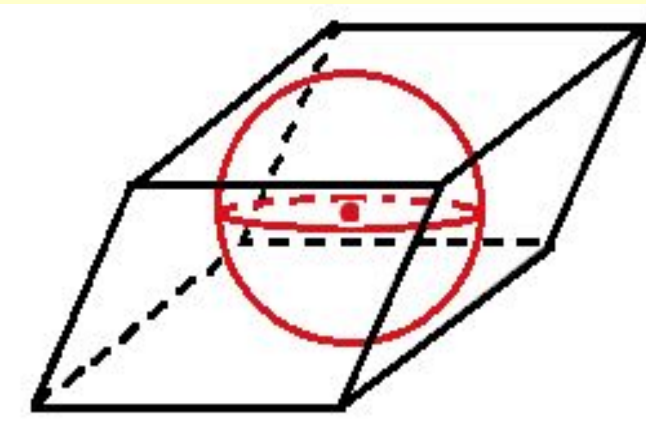
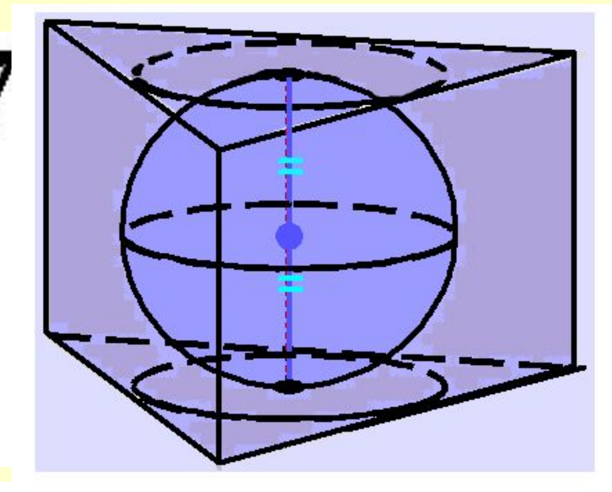
Сфера, вписанная в многогранник

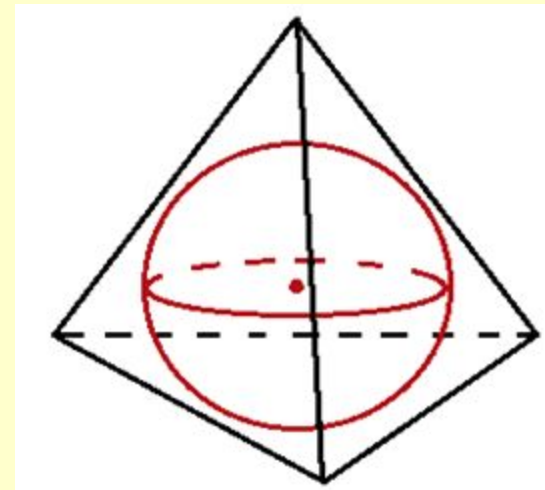
Сфера, вписанная в многогранник

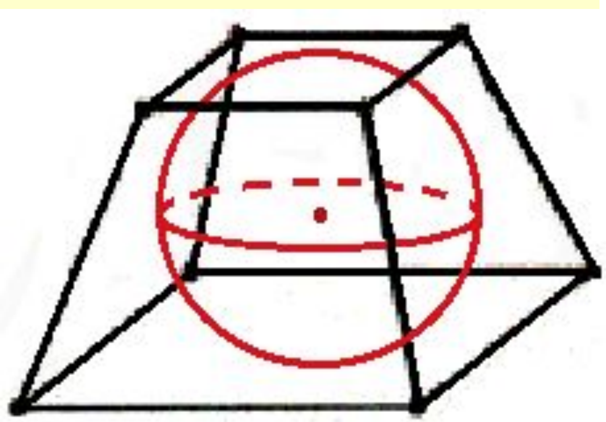
Определение

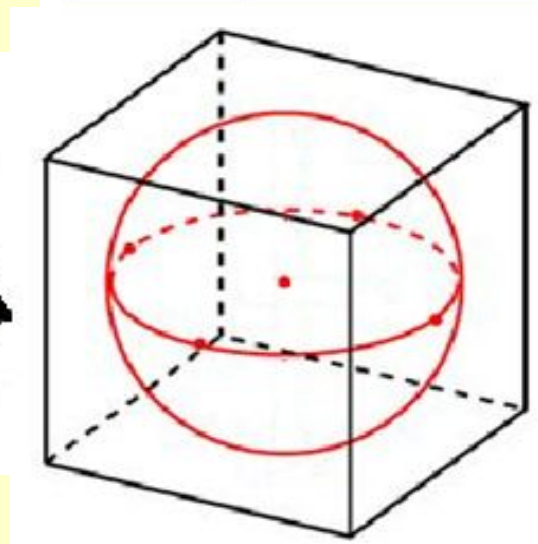
Многогранник называется описанным около сферы(а сфера вписанной в многогранник), если все грани многогранника касаются этой сферы.











Следствие

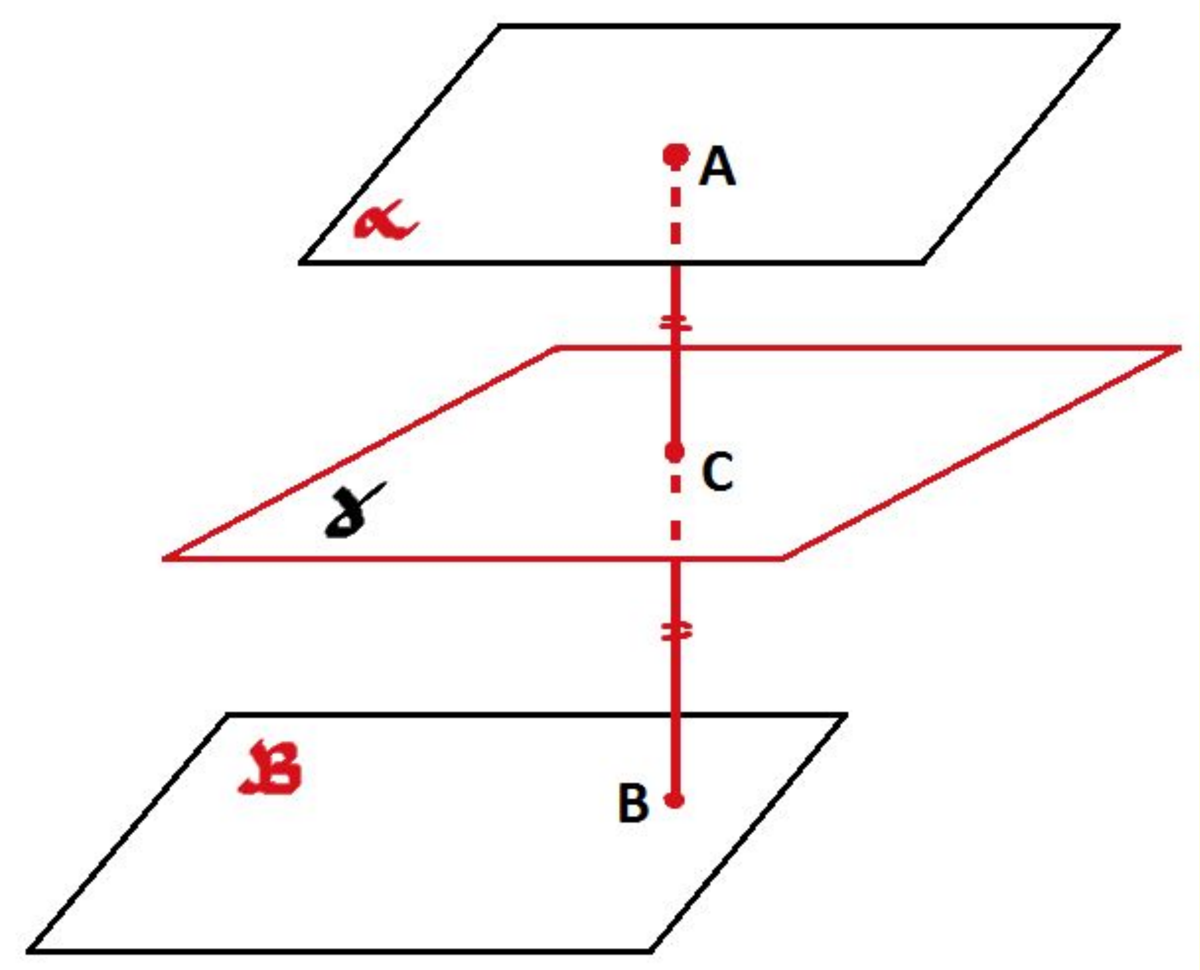
Центр вписанной сферы есть точка, равноудаленная от всех граней многогранника.

Подготовительные задачи

1. Где расположено множество точек пространства , равноудаленных от двух плоскостей?

Теорема 1

Множество точек, равноудаленных от двух параллельных плоскостей ,есть плоскость, параллельная данным плоскостям и проходящая через середину общего перпендикуляра этих плоскостей.

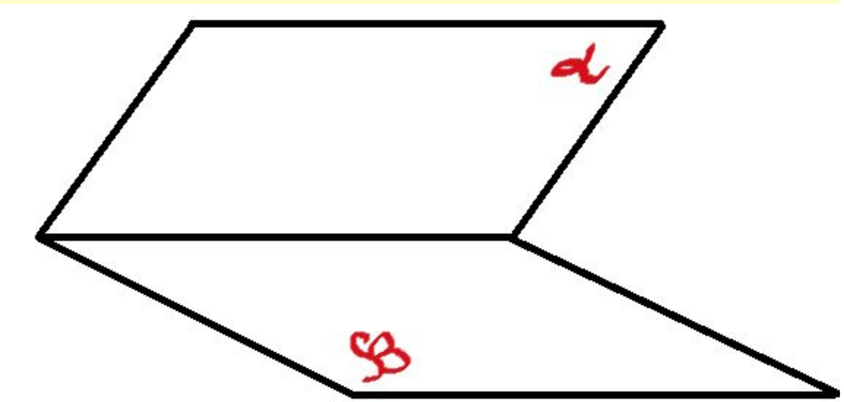


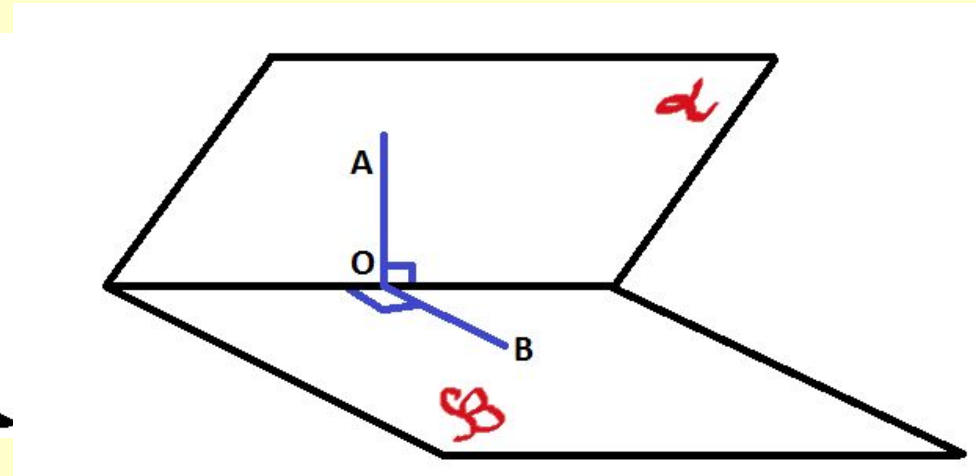
Дано:
α || β;

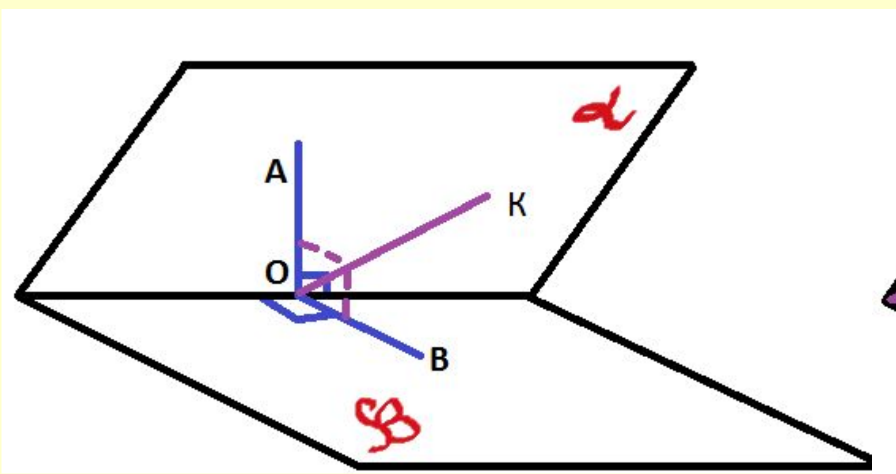
γ|| α; γ|| β;
AC=CD; AB |α; AB| β

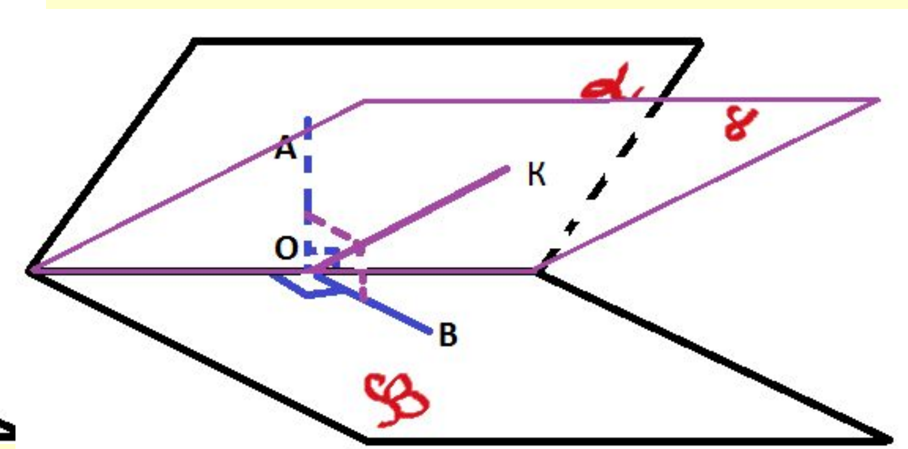
Теорема 2

Множество точек, равноудаленных от граней двугранного угла, есть есть биссектриса (биссекторная плоскость) этого двугранного угла.



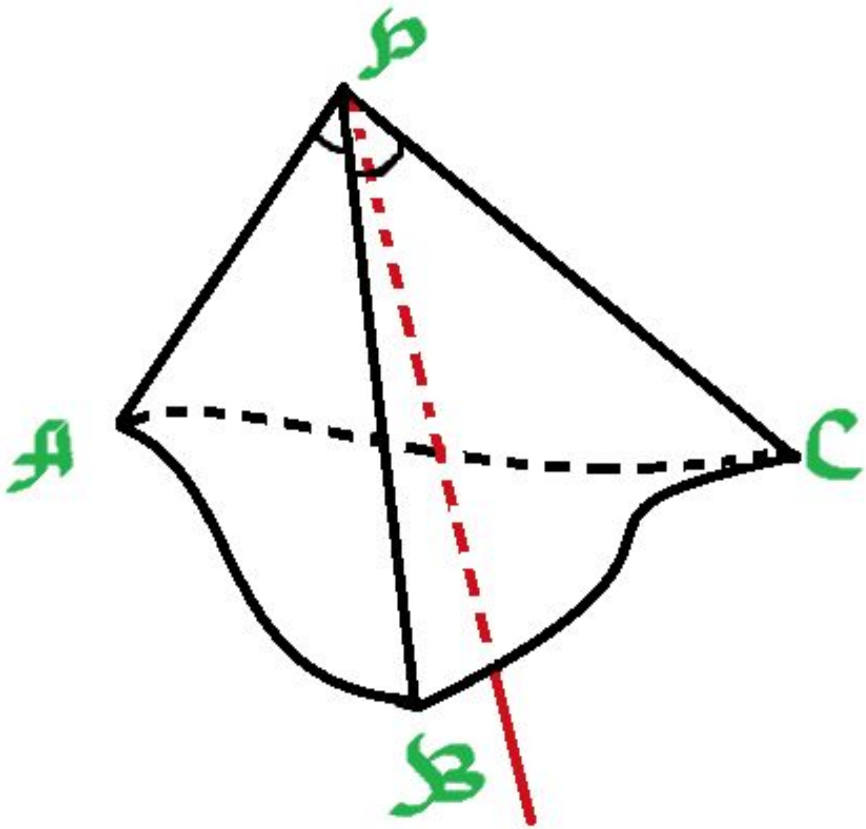






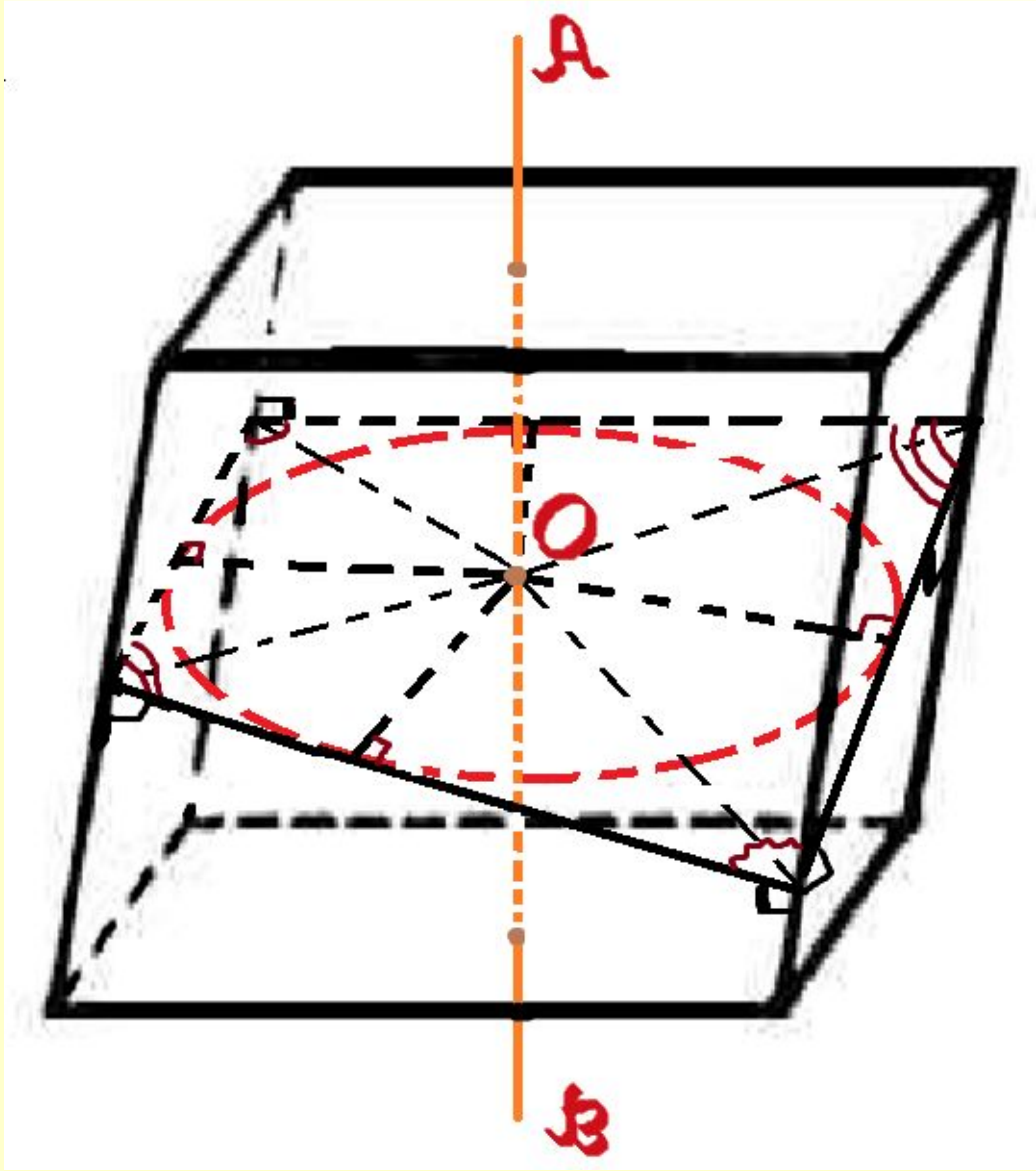
Теорема 3

Множество точек, равноудаленных от граней трехгранного угла, есть биссектриса этого трехгранного угла.



Биссектрисой трехгранного угла называется луч с началом в вершине данного трехгранного угла, который образует равные углы с гранями этого трехгранного угла.

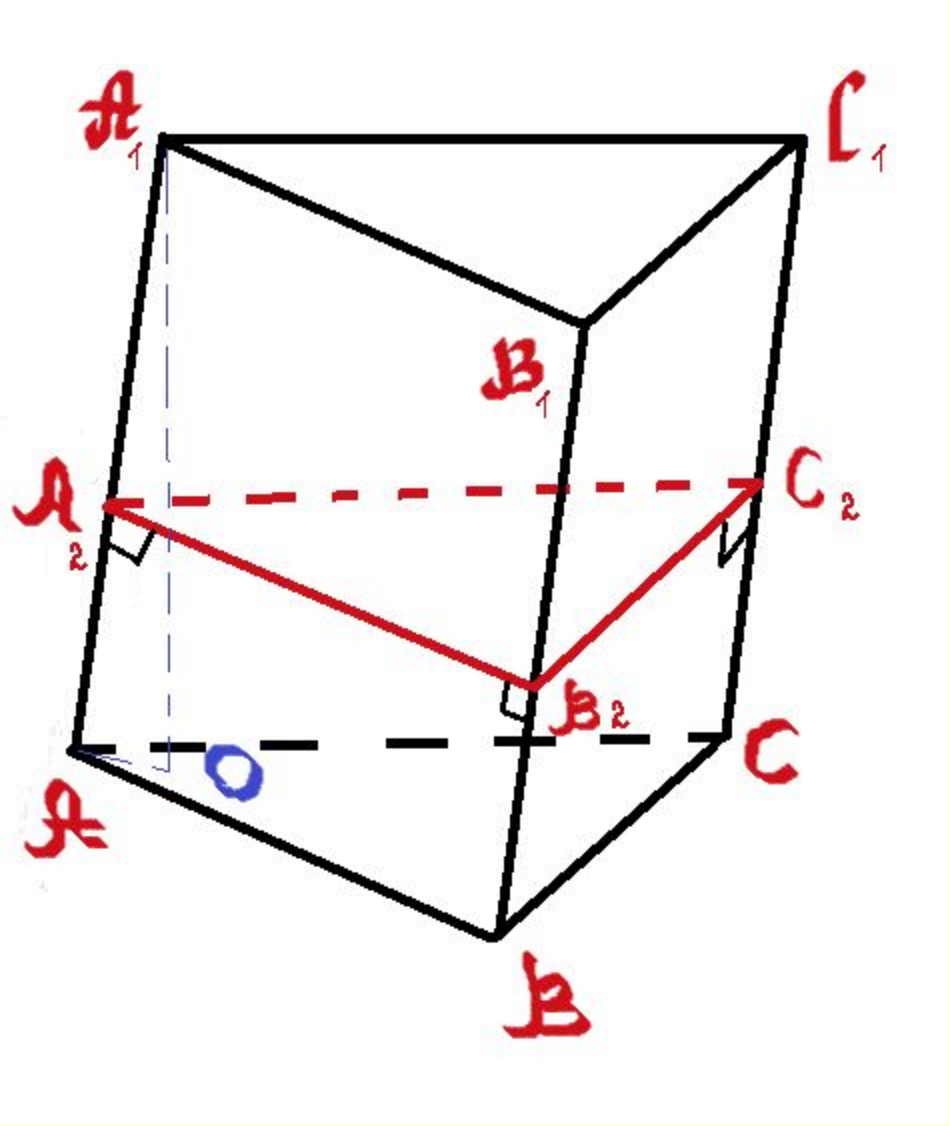
Сфера, вписанная в призму



Теорема 4

В призму можно вписать сферу тогда и только тогда, когда в перпендикулярное сечение этой призмы можно вписать окружность, и высота призмы равна диаметру этой окружности (диаметру вписанной сферы).

2. Расстояние между боковыми ребрами треугольной призмы 13,14,15.В призму вписан шар. Боковое ребро составляет с плоскостью основания угол α . Найти объем призмы и объем шара.



Решение.

($A_2B_2C_2$)-перпендикулярное сечение.

$V_{ш.} = \frac{4}{3}\Pi R_{ш.}^3$

$S = \frac{1}{2} P r_{окр}$

1) $R_{ш.} = r_{впис.окр.} = S_{A2B2C2} / p$

$p = 21$;

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$;

$S_{A2B2C2} = 84$;

$R_{ш.} = 84/21 = 4$;

$V_{ш.} = \frac{4}{3}\Pi R_{ш.}^3$; $V_{ш.} = 256\Pi/3$;

2) $V_{пр.} = S_{перп.сеч.} * AA_1$;

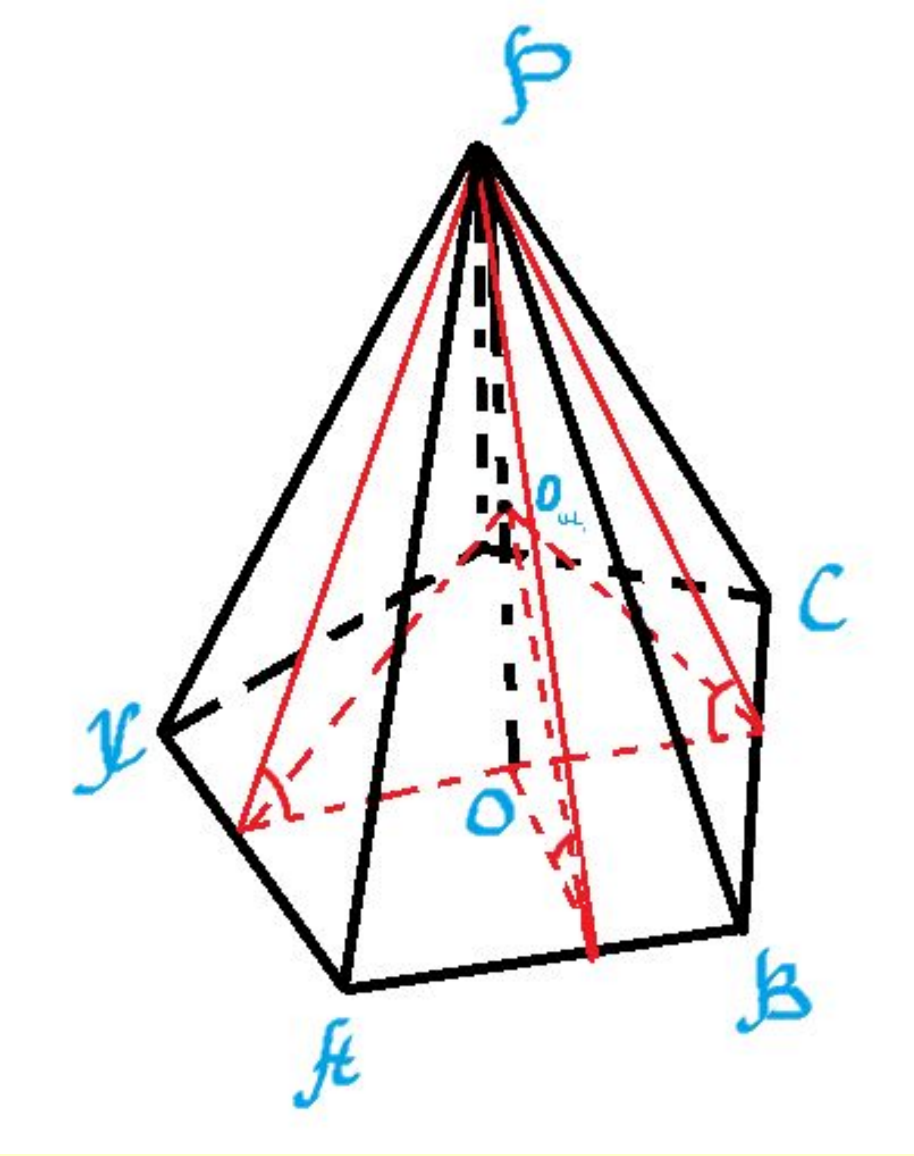
$AA_1 = A_1O/\sin\alpha = 8/\sin\alpha$;

$V_{пр.} = 84*8/\sin\alpha = 672/\sin\alpha$.

Ответ: $256\Pi/3$; $672/\sin\alpha$.

Сфера, вписанная в пирамиду

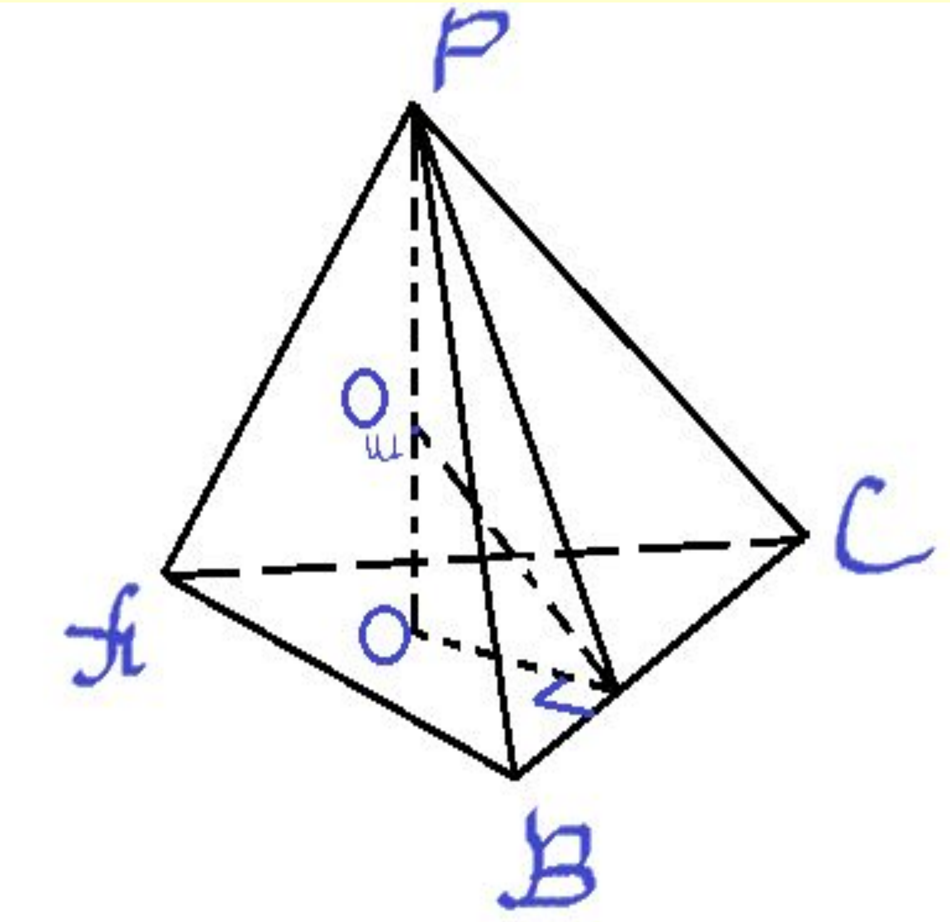
Боковые грани пирамиды одинаково наклонены к основанию.



Теорема 5

Если боковые грани пирамиды одинаково наклонены к основанию(двугранные углы при основании пирамиды равны), то в пирамиду можно вписать сферу, центр которой находится в точке пересечения высоты пирамиды и биссектрисы двугранного угла при основании пирамиды.

3.Основание пирамиды- треугольник со сторонами 9,10 и 17.Все боковые грани наклонены под углом 45^o к основанию пирамиды .Найти радиус вписанного шара.



Решение.

1)OK= $r_{впис.окр.}$ =S/p;

S=p* $r_{впис.окр.}$;p=18;

S=√p(p-a) (p-b) (p-c);

$S_{\Delta ABC}$=36;OK=2.

2) ΔPOK: KOш.-биссектриса, т.о.

OOш./Oш.p=OK/PK=cos 45^o ;

OOш./Oш.p=1/ √2;

<PKO=45^o ,т.е.OK=OP=2

½Rш-Rш.=1/ √ 2;

√ 2 Rш.=2-Rш.;

Rш.=2/(1+ √ 2)=2(√ 2-1).

Ответ: 2(√ 2-1).

Теорема 6

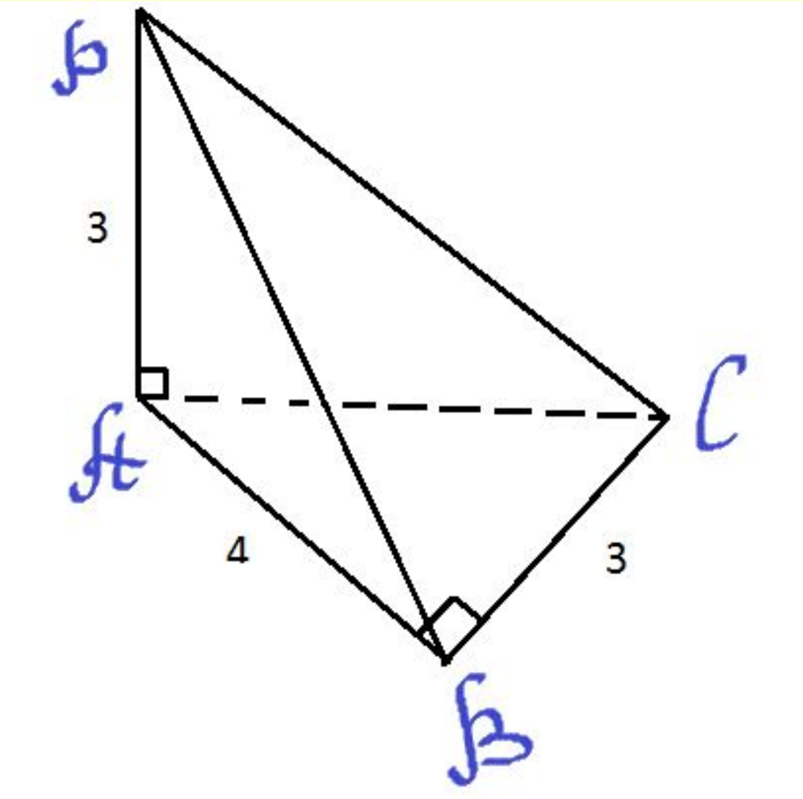
В любой тетраэдр можно вписать сферу.

Теорема 7

Если в многогранник, объем которого равен V,а площадь поверхности равна S, вписан шар радиуса R,то имеет место соотношение: $\boxed{V = \frac{1}{3}S \cdot R}$

3.Основание пирамиды- треугольник ABC,B котором AB|BC,AB=4,BC=3.Боковое ребро PA перпендикулярно плоскости основания пирамиды и равно 3.Найдите объем шара, вписанного в пирамиду.

Решение.



1)$V_{пир.} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot AP$;

$V_{пир.} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = 6$.

2)PB|BC(по теореме о трех перпендикулярах);AC=PB=5.

3) $S_{\Delta PAB} = S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$.

$S_{\Delta PBC} = S_{\Delta PAC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 = 7{,}5$.

$S_{полн.} = 2 \cdot 6 + 2 \cdot 7{,}5 = 12 + 15 = 27$.

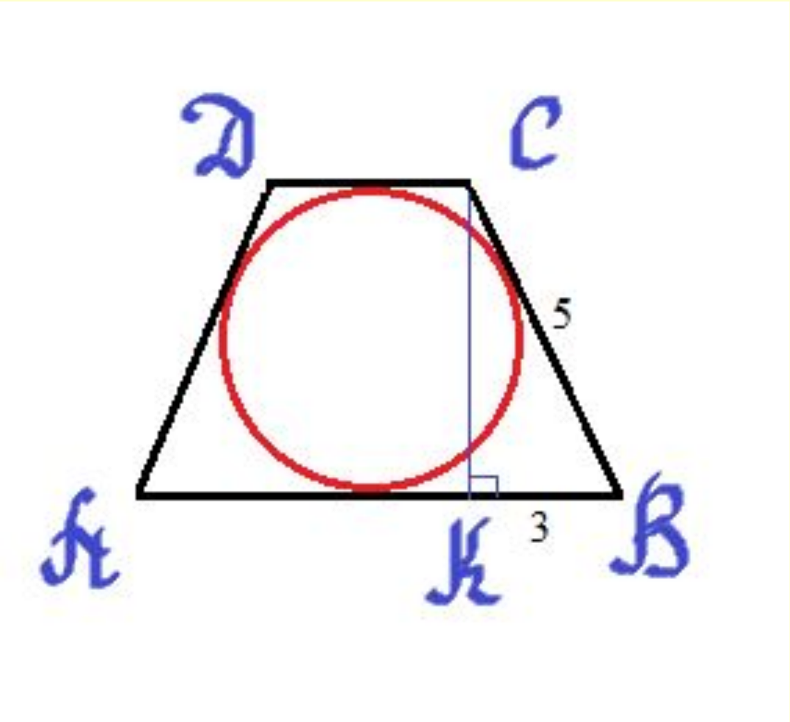
4)$R_{ш.} = 3\, V_{пир.}/S$;

$R_{ш.} = 3 \cdot 6/27 = \frac{2}{3}$;

$V_{ш.} = \frac{4}{3} \Pi R^3 = 32\Pi/81$.

Ответ: 32П/81.

4. Шар вписан в прямую призму, основание которой- равнобедренная трапеция с основаниями 2 и 8.Найдите объем шара и объем призмы.



Решение.

1)Rш.= $r_{впис.окр.}$;Hпр.=$D_{впис.окр.}$=CK.
2)DC+AB=AD+CB;
2BC=2+8; BC=5.
3)BC=½(AB-DC); BK= ½(8-2)=3;
4) ΔBCK:CK=4; Rш.=2.
5)Vпр.=Sосн.*Hпр.;
Vпр.=80;
Vш.= ⁴⁄₃ΠR^3 ;
Vш.= ⁴⁄₃$\Pi 2^3$ =32П/3.
Ответ: 32П/3.

Спасибо за внимание