ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Основные понятия комбинаторики

Теорема 1. *Правило умножения*: если из некоторого конечного множества первый объект (элемент a) можно выбрать n_1 способами, а второй объект (элемент b) – n_2 способами, то оба объекта (a и b) в указанном порядке можно выбрать $n_1 \cdot n_2$ способами.

Теорема 2. *Правило сложения:* если некоторый объект a можно выбрать n_1 способами, а объект b можно выбрать n_2 способами, причем первые и вторые способы не пересекаются, то любой из объектов (a или b) можно выбрать $n_1 + n_2$ способами.

Схема выбора без возвращений

Размещения из n элементов по k элементов $(0 \le k \le n)$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, причем $1! = 1$, $0! = 1$

Перестановки из n элементов

$$P_n = A_n^n = n!$$

Сочетания из n элементов по k элементов $(0 \le k \le n)$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{A_n^k}{k!}$$

Схема выбора с возвращением

Размещения с повторениями

$$\overline{A}_n^k = n^k$$

Сочетания с повторениями

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$$

Перестановки с повторениями

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!} \quad (n_1 + n_2 + n_k = n)$$

Итоговая сводка формул

(1-я строка – без повторений, 2-я строка – с повторениями)

	Размещения	Перестановки	Сочетания
1	$A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	$P_n = n!$	$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$
2	$\overline{A}_n^k = n^k$	$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!}$ $(n_1 + n_2 + n_k = n)$	$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$

Задачи

Задача 1. Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 2, 3, 5, 7 если:

а) цифры не повторяются; б) цифры могут повторяться?

Решение:

а) Первую цифру можно выбрать четырьмя способами (числа вида 025, 073, … не считаем трехзначными). Выбрав первую цифру (например, цифру 5) вторую цифру можно также выбрать четырьмя способами . Третью цифру, очевидно, можно выбрать тремя способами. Следовательно, согласно правилу умножения имеется $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$ способов расстановки цифр, т.е. искомых трехзначных чисел будет 48 .

б) Если цифры могут повторяться, то трехзначные числа можно составить $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$ способами .

Задача 2. Составить различные размещения по два элемента из элементов множества А ={3, 4, 5} и подсчитать их число.

Решение:

Из трех элементов можно образовать следующие размещения по два элемента: (3,4); (4,3); (3,5); (5,3); (4,5); (5,4). Таким образом, всего их 6. Однако число размещений можно посчитать по формуле:

$$A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6 \quad \text{или} \quad A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{6}{1} = 6$$

Задача 3. Сколькими способами 3 награды (за I, II, III места) могут быть распределены между 10 участниками соревнований?

Решение:

Будем считать, что каждый участник соревнований может получить не более одной награды. Выбрать 3-х участников из 10 можно следующим образом,

$$A_{10}^{3} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{7!} = 720$$

так как «призовые тройки» отличаются друг от друга либо составом участников, либо порядком их следования.

Этот же результат можно получить, применяя правило умножения: претендентов на главную награду (I место) 10, на вторую – 9, на третью – 8; число различных способов распределения наград равно 10·9·8=720.

Задача 4. В вазе стоят 9 красных и 7 розовых гвоздик. Сколькими способами можно выбрать из нее:

а) 3 гвоздики;

б) 6 гвоздик одного цвета;

в) 4 красных и 3 розовые гвоздики?

Решение:

а) Так как порядок выбора цветов не имеет значение, то выбрать 3 гвоздики из вазы, в которой стоят 16 гвоздик, можно

$$C_{16}^{3} = \frac{16!}{3!(16-3)!}\frac{16\cdot15\cdot14}{1\cdot2\cdot3} = 560$$

б) Выбрать 6 гвоздик красного цвета можно

$$C_{9}^{6} = \frac{9!}{6!(9-6)!} = \frac{3!\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}{6!\cdot3!} = 84$$

а 6 гвоздик розового цвета $C_7^6 = \frac{7!}{6!(7-6)!} = \frac{6!\cdot 7}{6!} = 7$

одного цвета (красных или розовых) можно

$C_9^6 + C_7^6 = 84 + 7 = 91$ способом.

в) Выбрать 4 красных гвоздики из 9 имеющихся можно C_9^4 способами, а 3 розовых из 7 имеющихся можно C_7^3 способами. Поэтому букет из 4 красных и 3 розовых гвоздик можно составить по правилу умножения

$$C_9^4 \cdot C_7^3 = \frac{9!}{4!\cdot 5!} \cdot \frac{7!}{3!\cdot 4!} = \frac{5!\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{5!\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \cdot \frac{4!\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{4!\cdot 1\cdot 2\cdot 3} = 4410$$

способами.

Задача 5. На диск сейфа нанесены 12 букв, а секретное слово состоит из 5 букв. Сколько неудачных попыток может быть сделано человеком, не знающим секретного слова?

Решение:

Общее число комбинаций можно вычислить по формуле

$$\overline{A}_n^k = n^k = 12^5 = 248832$$

Значит, неудачных попыток может быть 248831. Впрочем, обычно делают сейфы так, что после первой же неудачной попытки открыть их раздается сигнал тревоги.

Задача 6. Пять человек вошли в лифт на 1-м этаже девятиэтажного дома. Сколькими способами пассажиры могут выйти из лифта на нужных этажах?

Решение:

Каждый из 5 пассажиров может выйти на любом из восьми этажей со 2-го по 9-ый включительно. Возможными вариантами их выхода являются, например, 2-3-5-5-5 (это значит, что на 2-ом этаже вышел один пассажир, на 3-ем – один, а трое вышли на 5-ом этаже) или 9-9-9-9-9, или 4-5-6-7-9 и т.д.

Общее число выходов пассажиров, по формуле равно

$$\overline{A}_8^5 = 8^5 = 32768$$

Этот же результат можно получить, используя правило умножения: для 1-го пассажира имеется 8 вариантов выхода на этаже, для 2-го тоже 8, и для 3-го тоже 8, и для 4-го – 8, и для 5-го – 8. Всего получается $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^5$ вариантов для выхода 5-ти пассажиров.

Задача 7. Сколько различных «слов» (под «словом» понимается любая комбинация букв) можно составить, переставляя буквы в слове АГА? MISSISSIPPI?

Решение:

Из трех букв можно составить $P_3=3!=6$ различных трехбуквенных «слов». В слове АГА буква А повторяется, а перестановка одинаковых букв не меняет «слова». Поэтому число перестановок с повторениями меньше числа перестановок без повторений во столько раз, сколько можно переставлять повторяющиеся буквы. В данном слове две буквы (1-ая и 3-я) повторяются; поэтому различных трехбуквенных «слов» из букв АГА можно составить столько: $\dfrac{P_3}{P_2}=\dfrac{3!}{2!}=\dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2}=3$

Впрочем, ответ можно получить и проще: каждое слово из букв А, Г и А однозначно определяется положением буквы Г; их всего три, поэтому и различных слов будет тоже три.

Результат можно получить другой формулой:

$$P_3(2,1) = \frac{3!}{2!1!} = 3$$

По этой же формуле найдем число одиннадцатибуквенных «слов» при перестановке букв в слове MISSISSIPPI. Здесь n=11, n_1=1, n_2=4 (4 буквы S), n_3=4 (4 буквы I), n_4=2 (2 буквы P), поэтому

$$P_{11}(1,4,4,2) = \frac{11!}{1!\cdot 4!\cdot 4!\cdot 2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 10\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 1\cdot 2} = 34650.$$