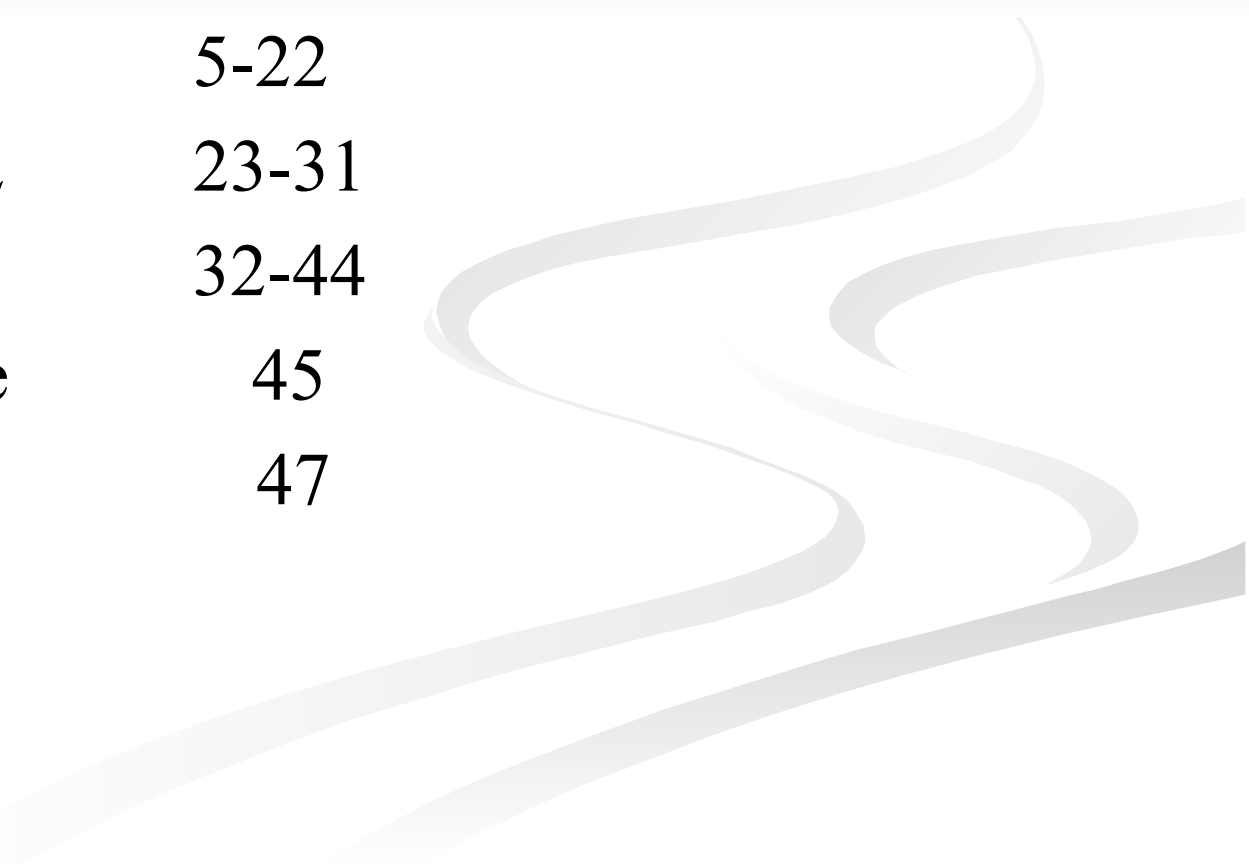


**Проект «Разработка заданий и
методических рекомендаций для
решения задач с параметрами при
подготовке к ЕГЭ по математике»**

*Выполнена учителем математики
МБОУ СОШ №14 г. Красногорска
Беляевской С. В.*

Оглавление:

1. Введение 3
 2. Особенности заданий с параметрами 4-5
 3. Занятие №1 5-22
 4. Занятие №2 23-31
 5. Занятие №3 32-44
 6. Заключение 45
 7. Источники 47
- 

Введение:

Известно, что в программах по математике в неспециализированных классах задачам с параметрами отводится незначительное место. С параметрами учащиеся встречаются при введении линейной функции $y = kx + b$, уравнения первой степени $ax + b = 0$ и квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Понятие параметра позволяет решать поставленные задачи не в частном, а в общем виде. Позволяет посмотреть на проблему более широко.

Владение приемами решения задач с параметрами можно считать критерием знаний основных разделов школьной математики, уровня математического и логического мышления.

Задачи с параметрами дают прекрасный материал для настоящей учебно-исследовательской работы.

Особенности заданий с параметрами

В самом начале знакомства с параметрами у учеников возникает психологический барьер, который обусловлен противоречивыми характеристиками параметра. С одной стороны, параметр следует считать величиной известной, а с другой — конкретное значение параметра не дано. С одной стороны, параметр является величиной постоянной, а с другой — может принимать различные значения.

Получается, что параметр в условии — это «неизвестная величина», «переменная постоянная». Этот «каламбур» довольно точно отражает суть тех сложностей, которые нужно преодолеть ученикам.

К задачам с параметрами, рассматриваемым в школьном курсе, можно отнести, например, поиск решений линейных и квадратных уравнений в общем виде, исследование количества их корней в зависимости от значений параметров.

Такой небольшой класс задач многим не позволяет усвоить главное: параметр, будучи фиксированным, но неизвестным числом, имеет как бы двойственную природу. Во-первых, предполагаемая известность позволяет «общаться» с параметром как с числом, а во-вторых, - степень свободы общения ограничивается его неизвестностью.

Основное, что нужно усвоить при работе с параметром, - необходимость осторожного обращения с фиксированным, но неизвестным числом.

Рассмотрим решение некоторых задач с параметрами на уроках повторения, обобщения и систематизации знаний, состоящих из трёх занятий по два часа на данную тему.

Занятие №1 (2 часа)

- Главное, что должен усвоить школьник это то, что параметр – это число, хоть и неизвестное, но фиксированное, имеющее двойственную природу. После этих вступительных слов можно спросить у школьников встречались ли они с параметрами. Это линейная функция $y=kx+b$, где x и y – переменные, k и b – параметры; квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$, где x - переменная a, b, c , - параметры.
- Задачи надо начинать решать с очень простых, постепенно усложняя их.

Пример №1. Сравнить $-a$ и $5a$

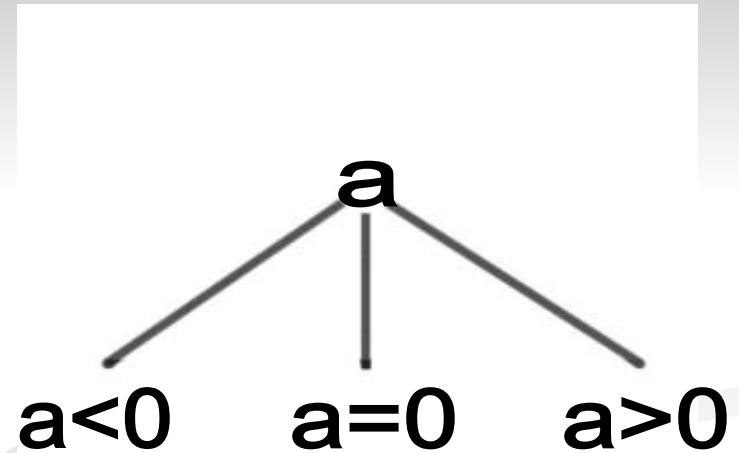
■ Решение:

1) если $a < 0$, то $-a > 0$, $5a < 0$, значит $-a > 5a$

2) если $a = 0$, то $-a = 0$, $5a = 0$, значит $-a = 5a$

3) если $a > 0$, то $-a < 0$, $5a > 0$, значит $-a < 5a$.

- ## ■ Ответ:
- если $a < 0$, то $-a > 5a$
если $a = 0$, то $-a = 5a$
если $a > 0$, то $-a < 5a$.



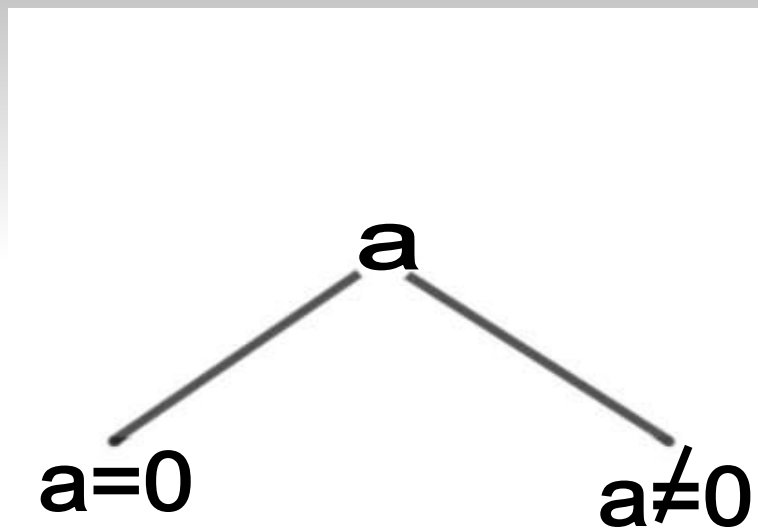
Пример №2. Решить уравнение $ax=2$

■ Решение:

1) если $a=0$, то $0x=2$, решений нет

2) если $a \neq 0$, то $x = \frac{2}{a}$

■ Ответ: если $a=0$, то решений нет, если $a \neq 0$, то $x = \frac{2}{a}$



Пример №3 Решить уравнение

$$(a^2-9)x=a+3$$

■ Решение:

1) если $a=3$, то $0x=6$,
решений нет

2) если $a=-3$, то $0x=0$, $x \in R$

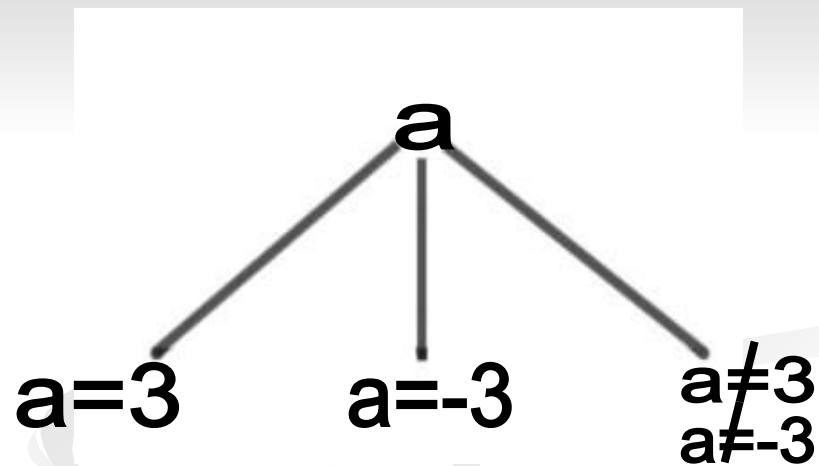
3) если $a \neq \pm 3$, то $a^2-9 \neq 0$, $x = \frac{a+3}{a^2-9}$

$$x = \frac{1}{a-3}$$

■ Ответ: если $a=3$, то
решений нет

если $a=-3$, то $x \in R$

если $a \neq \pm 3$, то $x = \frac{1}{a-3}$



Пример №4 Решить неравенство:

$$ax < 7$$

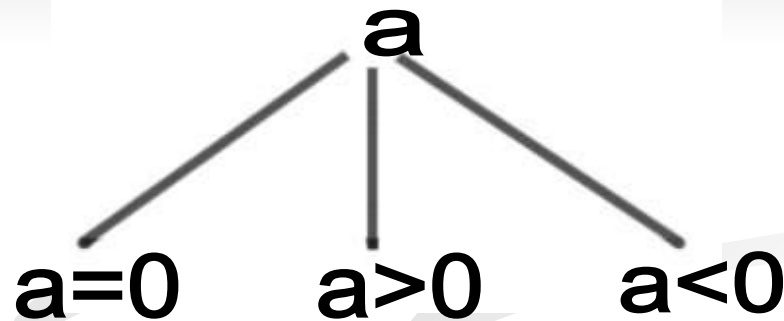
■ Решение:

1) если $a > 0$, то $x < \frac{7}{a}$

2) если $a < 0$, то $x > \frac{7}{a}$

3) если $a = 0$, то $0 \cdot x < 7$
 $\Rightarrow x \in R$

■ Ответ: если $a > 0$, то $x < \frac{7}{a}$
если $a < 0$, то $x > \frac{7}{a}$
если $a = 0$, то $x \in R$



Пример №5 Решить уравнение $\frac{x - a}{x + 3} = 0$

■ **Решение:**

$$\frac{x - a}{x + 3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - a = 0, \\ x + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a, \\ x \neq -3. \end{cases}$$

■ **Ответ:** если $a = -3$, то решений нет
если $a \neq -3$, то $x = a$.

Пример №6 Решить уравнение

$$(a + 1)x^2 - 2x + 1 - a = 0$$

■ Решение:

1) если $a = -1$, то $-2x + 1 + 1 = 0$; $x = 1$

2) если $a \neq -1$, то $x = 1$ или $x = \frac{1 - a}{a + 1}$

■ Ответ: если $a = -1$, то $x = 1$

если $a \neq -1$, то $x = 1$ или $x = \frac{1 - a}{a + 1}$

Пример №7 Решить уравнение

$$\sqrt{x - b}(x + 4) = 0$$

■ Решение:

$$\sqrt{x - b}(x + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - b \geq 0 \\ x + 4 = 0, \\ x - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq b \\ x = -4, \\ x = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = b, \forall b \\ x = -4, b \leq -4. \end{cases}$$

■ Ответ: если $b < -4$, то $x = -4$ или $x = b$

если $b = -4$, то $x = -4$

если $b > -4$, то $x = b$.

Пример №8 Решить уравнение

$$|x^2 - 1| + |a(x - 1)| = 0$$

■ Решение:

$$|x^2 - 1| + |a(x - 1)| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |a(x - 1)| = 0, \\ |x^2 - 1| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0, \\ a(x - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(x - 1) = 0, \\ \begin{cases} x = 1, \\ x = -1. \end{cases} \end{cases}$$

1) если $a \neq 0$, то $x = 1$

2) если $a = 0$, то $x \in \mathbb{R}$ значит $x = 1$ или $x = -1$

- ## ■ Ответ: если $a \neq 0$, то $x = 1$ если $a = 0$, то $x = \pm 1$

Пример №9 Решить неравенство

$$(1 - b^2)x^2 + 2bx + 1 \geq 0.$$

■ Решение:

1) а) если $b=1$, то $2x + 1 \geq 0$; $x \geq -\frac{1}{2}$

б) если $b=-1$, то $-2x + 1 \geq 0$; $x \leq \frac{1}{2}$.

2) если $b \neq \pm 1$, то неравенство квадратное

$$\frac{D}{4} = b^2 - (1 - b^2) = 2b^2 - 1$$

$$\frac{D}{4} = 0 \Leftrightarrow 2b^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ b = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases},$$

$$\text{a) } 1 - b^2 > 0 \Leftrightarrow b \in (-1; 1)$$

$$\frac{D}{4} > 0 \Leftrightarrow b \in \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \boxtimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \infty\right)$$

$$x \in \left(-\infty; \frac{-b - \sqrt{2b^2 - 1}}{1 - b^2}\right] \boxtimes \left[\frac{-b + \sqrt{2b^2 - 1}}{1 - b^2}; \infty\right)$$

$$\frac{D}{4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ b = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad x \in R$$

$$\frac{D}{4} < 0 \Leftrightarrow b \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad x \in R$$

$$\text{б) } 1 - b^2 < 0 \Leftrightarrow b \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$$

учитывая, что при $b \in (-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}}; \infty) \frac{D}{4} > 0,$

то $x \in \left[\frac{-b - \sqrt{2b^2 - 1}}{1 - b^2}; \frac{-b + \sqrt{2b^2 - 1}}{1 - b^2} \right]$

Ответ: если $b=1$, то $x \in \left[-\frac{1}{2}; \infty \right)$

если $b=-1$, то $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2} \right]$

если $b \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$ то $x \in \left[\frac{-b - \sqrt{2b^2 - 1}}{1 - b^2}; \frac{-b + \sqrt{2b^2 - 1}}{1 - b^2} \right]$

если $b \in (-1; -\frac{1}{\sqrt{2}}) \boxtimes (\frac{1}{\sqrt{2}}; 1)$ то

$$x \in \left(-\infty; \frac{-b - \sqrt{2b^2 - 1}}{1 - b^2} \right] \boxtimes \left[\frac{-b + \sqrt{2b^2 - 1}}{1 - b^2}; \infty \right)$$

если $b \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$ то $x \in R$

Рассмотренные выше задачи требовалось просто решить. В следующих задачах будет поставлено какое-то более «узкое», конкретное условие.

Пример №10 При каких a уравнение имеет единственное решение?

$$ax^2 - x + 3 = 0$$

■ Решение:

1) если $a=0$, то $x=3$

2) если $a \neq 0$, то уравнение квадратное и оно имеет единственное решение при $D=0$

$$D=1-12a$$

$$D=0 \Leftrightarrow 1-12a=0 \Leftrightarrow a=\frac{1}{12}$$

■ Ответ: при $a=0$ или $a=\frac{1}{12}$

Пример №11 При каких a уравнение имеет единственное решение?

$$(a - 2)x^2 + (4 - 2a)x + 3 = 0$$

■ Решение:

1) если $a=2$, то решений нет

2) если $a \neq 2$, то уравнение имеет единственное решение при $D=0$

$$\frac{D}{4} = (2 - a)^2 - (a - 2)3 = a^2 - 7a + 10$$

$$\frac{D}{4} = 0 \Leftrightarrow a^2 - 7a + 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ a = 2 \end{cases}$$

■ Ответ: при $a=5$

Задачи для самостоятельного домашнего решения задаются с ответами для самоконтроля

1) **При каких a уравнение имеет решения, найти их**

$$\frac{a+3}{x+1} - \frac{5-3a}{x-2} = \frac{ax+3}{x^2-x-2}$$

$$\left(x = \frac{14-a}{3a-2} \text{ при } a \in (-\infty; -6) \cup \left(-6; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; \frac{18}{7}\right) \cup \left(\frac{18}{7}; \infty\right)\right)$$

2) **Решить уравнение:**

а)
$$\frac{x-a}{x^2-4x+3} = 0$$

(при $a=1$ или $a=3$ решений нет; при $a \neq 1$ и $a \neq 3$ $x=a$)

б)
$$\frac{x-2}{x+a} = 0$$

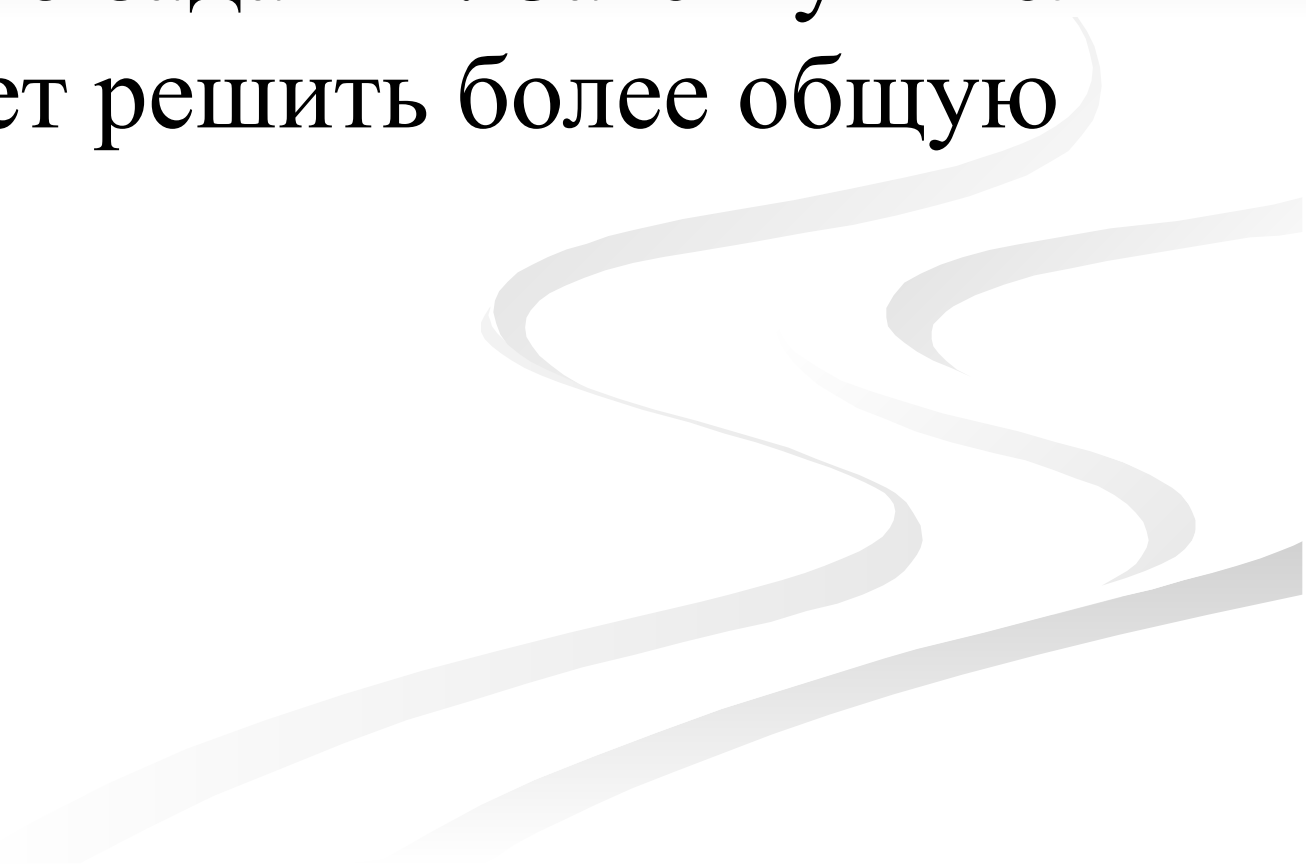
(при $a = -2$ решений нет; при $a \neq -2$ $x=2$)

3) При каких a уравнение имеет ровно три корня

$$x^3 - x = a(x^3 + x)$$

(при $a \in (-1; 1)$)

Занятие №2 (2 часа)

- Урок начинается с разбора домашнего задания. Затем учитель предлагает решить более общую задачу.
- 

Пример №12 Выяснить, при каких значениях параметра a уравнение $5(4 - a)x^2 - 10x - a = 0$ имеет:

- 1) два различных корня;
- 2) не более одного корня;
- 3) два корня различных знаков;
- 4) два положительных корня.

■ **Решение:**

1) уравнение имеет два различных корня тогда и только тогда, когда оно квадратное и $D > 0$.

$$\begin{cases} 4 - a \neq 0, \\ \frac{D}{4} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - a \neq 0, \\ 25 + 5a(4 - a) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 4, \\ a^2 - 4a - 5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 4, \\ a \in (-1; 5) \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-1; 4) \cup (4; 5)$$

2) а) если $a=4$, то $x = -\frac{2}{3}$

б)

$$\begin{cases} a \neq 4, \\ D \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 4, \\ a^2 - 4a - 5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 4, \\ a \in (-\infty; -1] \cup [5; \infty) \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-\infty; -1] \cup [5; \infty)$$

3) уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня различных знаков тогда и только тогда, когда $\frac{c}{a} < 0$ значит

$$\frac{-a}{5(4-a)} < 0 \Leftrightarrow a \in (0;4)$$

4) уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два положительных корня тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ 4 - a \neq 0, \\ \frac{c}{a} > 0, \\ \frac{b}{a} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - a \neq 0, \\ a^2 - 4a - 5 \leq 0, \\ \frac{-a}{5(4-a)} > 0, \\ \frac{-10}{5(4-a)} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in [-1;5], \\ a \neq 4, \\ a \in (-\infty;0) \cap (4;\infty), \\ a < 4 \end{cases} \Leftrightarrow a \in [-1;0)$$

Самостоятельная работа.

Вариант I

- 1. Для всякого a решить уравнение

$$x^2 - (2a + 1)x + 2a = 0$$

Решение: Т.к. сумма коэффициентов равна 0, то $x=1$ или $x=2a$

Ответ: 1; $2a$.

- 2. При каких b уравнение имеет единственный корень?
Для каждого b найти этот корень.

Решение: Квадратное уравнение имеет единственный корень тогда и только тогда, когда $D=0$

$$D = b^2 - 144$$

$$D = 0 \Leftrightarrow b^2 - 144 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 12, \\ b = -12 \end{cases}$$

1) если $b=12$, то $x = \frac{-12}{6}; x = -2$

2) если $b=-12$, то $x = \frac{12}{6}; x = 2$

Ответ: при $b=12$ $x=-2$
при $b=-12$ $x=2$.

- 3. Для каждого значения параметра решить неравенство:

$$(x^2 - 4)(x - b) \geq 0.$$

Решение:

$$(x^2 - 4)(x - b) \geq 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 2)(x - b) \geq 0$$

Решим неравенство методом интервалов, рассмотрим

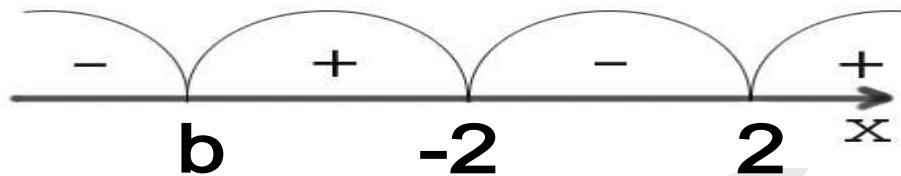
$$\text{функцию } f(x) = (x - 2)(x + 2)(x - b)$$

непрерывную на \mathbb{R} , имеющую нули $2, -2, b$

Рассмотрим три случая:

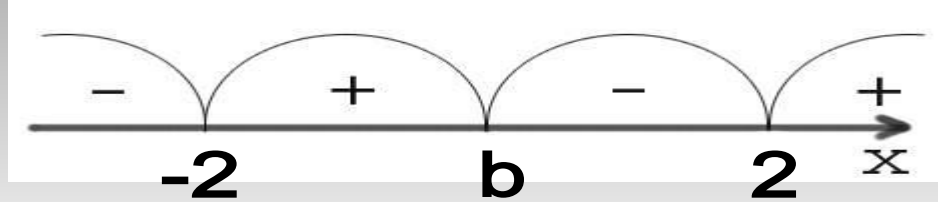
1) $b \leq -2$

$$x \in [b; -2] \cup [2; \infty)$$



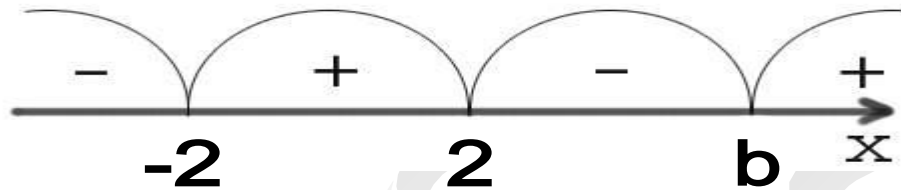
$$2) -2 < b < 2$$

$$x \in [-2; b] \cup [2; \infty)$$



$$3) b \geq 2$$

$$x \in [-2; 2] \cup [b; \infty)$$



Ответ: если $b \leq -2$ то $x \in [b; -2] \cup [2; \infty)$

если $-2 < b < 2$, то $x \in [-2; b] \cup [2; \infty)$

если $b \geq 2$ то $x \in [-2; 2] \cup [b; \infty)$

Вариант II

Задания аналогичны заданиям варианта I.

■ 1. $x^2 - (3a - 1)x - 3a = 0$

Ответ: $-1; 3a$.

■ 2. $5x^2 + bx + 20 = 0$

Ответ: при $b=20$ $x=-2$
при $b=-20$ $x=2$.

■ 3. $(x^2 - 1)(x - a) \leq 0$

Ответ: если $a \leq -1$, то
если $-1 < a < 1$, то
если $a \geq 1$, то

$$x \in (-\infty; a] \boxtimes [-1; 1]$$

$$x \in (-\infty; -1] \boxtimes [a; 1]$$

$$x \in (-\infty; -1] \boxtimes [1; a]$$

Занятие №3 (2 часа)

- Теперь можно приступать к решению задач ЕГЭ с параметрами.

Пример №1. Найти все значения параметра p , при которых уравнение $7 - 4 \cos x = p(1 + \operatorname{tg}^2 x)$ имеет хотя бы один корень.

■ **Решение:**

$$7 - 4 \cos x = p(1 + \operatorname{tg}^2 x) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x \neq 0, \\ 7 \cos^2 x - 4 \cos^3 x = p. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos^2 x \neq 0, \\ \cos x = a, \\ 7a^2 - 4a^3 = p; \end{cases} \begin{cases} a \neq 0, \\ -1 \leq a \leq 1, \\ 7a^2 - 4a^3 = p. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $f(a) = 7a^2 - 4a^3$, определённую на $[-1; 0) \cup (0; 1]$ и найдём её область значений.

$$f(-1) = 11; f(1) = 3; \text{ при } a \rightarrow 0 \quad f(a) \rightarrow 0$$

$$f'(a) = 14a - 12a^2;$$

$$f'(a)=0 \quad \Leftrightarrow 14a - 12a^2 = 0 \Leftrightarrow 2a(7 - 6a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, \\ a = \frac{7}{6} \end{cases}$$

Т.к. $0 \notin D(f)$; $\frac{7}{6} \notin D(f)$ то экстремумов у функции нет, следовательно $E(f) = (0; 11]$.

Чтобы уравнение $7a^2 - 4a^3 = p$, а значит и данное уравнение имело хотя бы один корень, необходимо и достаточно, чтобы $p \in (0; 11]$.

Ответ: $(0; 11]$

Пример №2. Найти все значения a , при которых область определения функции

$$y = ((\sqrt{a})^{2x+10} + (x^2 \sqrt{x})^2 a^3 - x^{5+x \log_x a} - (a^2)^{\log_2 16})^{-0,5}$$

содержит ровно одно двузначное натуральное число.

■ **Решение:**

$$D(y): \begin{cases} (\sqrt{a})^{2x+10} + (x^2 \sqrt{x})^2 a^3 - x^{5+x \log_x a} - (a^2)^{\log_2 16} > 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Решим первое неравенство системы:

$$(\sqrt{a})^{2x+10} + (x^2 \sqrt{x})^2 a^3 - x^{5+x \log_x a} - (a^2)^{\log_2 16} > 0$$

$$a^x a^5 + x^5 a^3 - x^5 a^x - a^8 > 0;$$

$$a^5 (a^x - a^3) - x^5 (a^x - a^3) > 0;$$

$$(a^x - a^3)(a^5 - x^5) > 0;$$

$$\begin{cases} a^x - a^3 > 0, \\ a^5 - x^5 > 0; \\ a^x - a^3 < 0, \\ a^5 - x^5 < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^x > a^3, \\ a^5 > x^5; \\ a^x < a^3, \\ a^5 < x^5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^x > a^3, \\ a > x; \\ a^x < a^3, \\ a < x. \end{cases}$$

1) если $0 < a < 1$, то

$$\begin{cases} x < 3, \\ a > x; \\ x > 3, \\ a < x; \end{cases} \quad \begin{cases} x < a, \\ x > 3; \end{cases} \quad x \in (0; a) \boxtimes (3; \infty).$$

Решение не удовлетворяет условию задачи.

2) если $a > 1$, то

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x > 3, \\ a > x; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x < 3, \\ a < x; \end{array} \right. \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} 3 < x < a, \\ a < x < 3; \end{array} \right. \quad x \in (3; a).$$

Чтобы решение удовлетворяло условию задачи, необходимо и достаточно, чтобы $a \in (10; 11]$.

- **Ответ:** $(10; 11]$

Пример №3. Найти все значения параметра a , при каждом из которых множество решений неравенства

$$a^2 + 8a < \frac{4a^2}{x} - x(x - 2a - 4)$$

содержит какой-нибудь отрезок длиной 2, но не содержит никакого отрезка длиной 3

■ **Решение:**

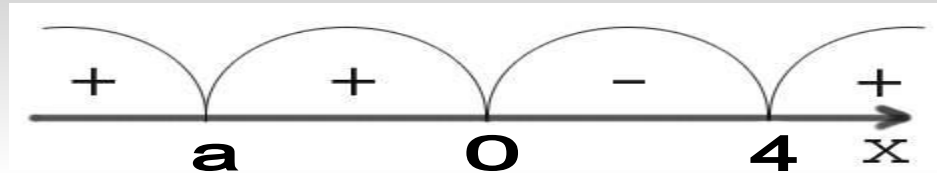
$$a^2 + 8a < \frac{4a^2}{x} - x(x - 2a - 4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 8a - \frac{4a^2}{x} + x^2 - 2a^2x - 4x < 0 \Leftrightarrow \frac{ax^2 + 8ax - 4a^2 + x^3 - 2a^2x^2 - 4x^2}{x} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2(x-4) - 2ax(x-4) + x^2(x-4)}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{(x-4)(x-a)^2}{x} < 0.$$

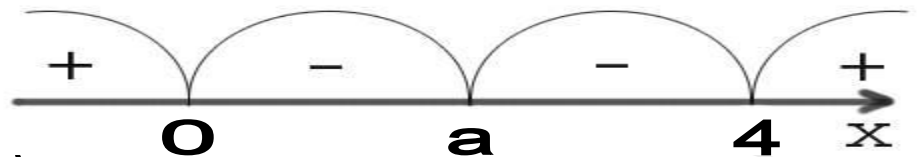
Решим неравенство методом интервалов, рассмотрев функцию $f(x) = \frac{(x-4)(x-a)^2}{x}$ непрерывную на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, имеющую нули 4, a :

1) если $a \leq 0$



$x \in (0; 4)$ решение содержит отрезок длиной 3, что не удовлетворяет условию задачи.

2) если $0 < a < 4$



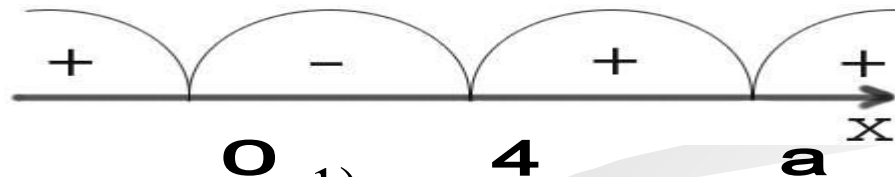
$x \in (0; a) \cup (a; 4)$

Чтобы решение удовлетворяло условию задачи, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\begin{cases} a \geq 1, \\ a < 2; \\ a > 2, \\ a \leq 3; \end{cases}$$

т.е. $a \in [1;2) \boxtimes (2;3]$

3) если $a \geq 4$



$x \in (0;4)$ - аналогично случаю 1)

■ **Ответ:** $[1;2) \boxtimes (2;3]$

Пример №4. Найти все значения параметра p , при которых уравнение

$$(2p + 3)x^2 + (p + 3)x + 1 = 0$$

имеет хотя бы один корень, и число различных корней этого уравнения равно числу различных корней уравнения

$$\frac{2x + 1}{21 - p} = \frac{1}{\sqrt{x - 3} + 3}$$

■ **Решение:**

$$1) \quad \frac{2x + 1}{21 - p} = \frac{1}{\sqrt{x - 3} + 3}$$

Пусть $\sqrt{x - 3} = t$, $t \geq 0$ тогда $2x + 1 = 2t^2 + 7$

$$\frac{2t^2 + 7}{21 - p} = \frac{1}{t + 3};$$

$$2t^3 + 6t^2 + 7t + 21 = 21 - p;$$

$$-2t^3 - 6t^2 - 7t = p.$$

Рассмотрим функцию $f(t) = -2t^3 - 6t^2 - 7t$:

$$D(f) = [0; \infty)$$

$$f(t) = 0 \quad -t(2t^2 + 6t + 7) = 0 \Leftrightarrow t = 0. \Leftrightarrow$$

$$E(f) = (-\infty; 0]$$

$$f'(t) = -6t^2 - 12t - 7 \Rightarrow f'(t) < 0 \Rightarrow f \downarrow$$

Значит графики функций $f(t) = -2t^3 - 6t^2 - 7t$ и $y = p$ могут иметь только одну общую точку, т.е. уравнение

$$-2t^3 - 6t^2 - 7t = p \quad \text{а значит и уравнение} \quad \frac{2x + 1}{21 - p} = \frac{1}{\sqrt{x - 3} + 3}$$

может иметь ровно один корень при

$$p \leq 0.$$

2) Узнаем при каких p уравнение $(2p + 3)x^2 + (p + 3)x + 1 = 0$ имеет ровно один корень:

а) если $2p + 3 = 0$ ($p = -\frac{3}{2}$), то $x = -\frac{2}{3} \Rightarrow p = -\frac{3}{2}$ - удовлетворяет условию.

б) если $2p + 3 \neq 0$, то уравнение $(2p + 3)x^2 + (p + 3)x + 1 = 0$ имеет единственный корень при $D = 0$.

$$D = (p + 3)^2 - 4(2p + 3) = p^2 - 2p - 3.$$

$$D = 0 \Leftrightarrow p^2 - 2p - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p = -1, \\ p = 3. \end{cases}$$

Итак, уравнение $(2p + 3)x^2 + (p + 3)x + 1 = 0$ имеет ровно

один корень при $p \in \left\{ -\frac{3}{2}; -1; 3 \right\}$.

Но уравнению $\frac{2x+1}{21-p} = \frac{1}{\sqrt{x-3}+3}$ удовлетворяют только $p \leq 0$,

т.е. при $p = -\frac{3}{2}$ и $p = -1$ уравнения $\frac{2x+1}{21-p} = \frac{1}{\sqrt{x-3}+3}$ и

$(2p+3)x^2 + (p+3)x + 1 = 0$ имеют равное число корней, а именно, по одному.

■ **Ответ:** $-\frac{3}{2}$; -1

Заключение

- Все рассмотренные упражнения имеют дидактическую цель — помочь учащимся составить представление о параметре, о том, что значит решить уравнение (неравенство) с параметром. Предложенные упражнения помогают им осмыслить всего несколько строк определения: «Пусть дано уравнение (неравенство) $f(x; a) = (>) 0$ с переменными x , a . Если ставится задача для каждого значения a решить это уравнение (неравенство) относительно x , то уравнение (неравенство) $f(x; a) = (>) 0$ называется уравнением (неравенством) с переменной x и параметром a . Решить уравнение (неравенство) с параметром a — это значит для каждого значения a найти значение x , удовлетворяющее этому уравнению (неравенству)».

Задачи с параметрами обладают большим потенциалом в развитии интеллектуальных качеств личности, так как развивают исследовательские способности, учат творчески мыслить, помогают сформировать и развить творческое мышление. Эти задачи должны включаться в школьный курс математики начиная с 7 класса. Конечно, уровень сложности заданий должен определяться уровнем подготовки всего класса в целом и каждого ученика в отдельности.

В своей работе я постаралась составить версию обучения учащихся решению уравнений и неравенств с параметрами с подборкой основных заданий разного уровня, а также продемонстрировать важность обучения учащихся таким задачам, обосновать целесообразность обучения умению их решать, проанализировать подходящие для этого задания.

Основной вывод работы-такие задачи должны составлять самостоятельную линию обучения в математике.

Используемые источники:

- 1. Гронштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С. - Задачи с параметрами – «Илекса», «Гимназия» - Москва-Харьков, 1999год.
- 2. Шахмейстер А.Х. – Задачи с параметрами, 1-е издание СПб: «ЧеРо-на-Неве», 2004год.
- 3. Ященко И.В., Семенова А.Л. – Материалы ЕГЭ, издательство «Экзамен» Москва, 2011год.
- 4. Интернет сайты:

www.dvoek-net.ru

www.ege-trener.ru