Применение метода рационализации при решении неравенств и систем неравенств

Метод рационализации

заключается в замене сложного выражения $F(x)$ на более простое выражение $G(x)$, при котором неравенство $G(x)>0$ равносильно неравенству $F(x)>0$ в области определения выражения F(x).

	Выражение F	Выражение G
1 1а 1б	$log_a f - log_a g$ $log_a f - 1$ $log_a f$	$(a-1)(f-g)$ $(a-1)(f-a)$ $(a-1)(f-1)$
2 2а 2б	$log_h f - log_h g$ $log_h - 1$ $log_h f$	$(h-1)(f-g)$ $(h-1)(f-h)$ $(h-1)(f-1)$
3	$log_f h - log_g h$ $(g \neq 1, f \neq 1)$	$(f-1)(g-1)(h-1)(g-f)$
4 4а	$h^f - h^g \ (h > 0)$ $h^f - 1$	$(h-1)(f-g)$ $(h-1)f$
5	$f^h - g^h$ $(f > 0, g > 0)$	$(f-g)h$
6	$\|f\| - \|g\|$	$(f-g)(f+g)$

Теоретического обоснования метода рационализации:

Если f(x) монотонно возрастающая функция и:

1. f(a) >f(b), то a>b;
2. f(a) - f(b) >o, то a-b>0.
3. f(a) - f(b) < o, то a-b< 0.

$$\frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(a)}>0$$

4. Неравенство $\frac{x-b}{x-a}>0$ можно заменить неравенством

которое можно решить методом интервалов.

Пример 1. Решите неравенство $\log_{2x+3} x^2 < 1$.

1.ОДЗ: $\begin{cases} 2x+3>0, \\ 2x+3\neq 1, \\ x^2\neq 0. \end{cases}$ $\left(-\frac{3}{2};-1\right)\cup(-1;0)\cup(0;+\infty)$.

2.Решим неравенство:

$\log_{2x+3} x^2 - 1 < 0.$

Перейдём к основанию 10: $\frac{\lg x^2}{\lg(2x+3)}-1<0,\ \frac{\lg x^2-\lg(2x+3)}{\lg(2x+3)}<0,$

$$\frac{\lg x^2-\lg(2x+3)}{\lg(2x+3)-\lg 1}<0 \qquad \frac{x^2-2x-3}{2x+3-1}<0,$$

Получим:(-∞; -1)U (-1; 3). Учтём ОДЗ.

ОТВЕТ. **(-1,5; -1)U(-1; 0)U(0; 3).**

Пример 2. Решите неравенство

$$\log_{x^2+x-1}\left(x^2-2x-9\right)\geq\log_{x^2+x-1}\left(x+1\right)$$

1. ОДЗ $\begin{cases} x^2-2x-9>0, \\ x^2+x-1>0, \\ x^2+x-1\neq 1, \\ x+1>0/ \end{cases}$ $(1+\sqrt{10}\ ;\ +\infty).$

$$\frac{\lg\left(x^2-2x-9\right)}{\lg\left(x^2+x-1\right)}-\frac{\lg(x+1)}{\lg\left(x^2+x-1\right)}\geq 0,\quad \frac{\lg\left(x^2-2x-9\right)-\lg(x+1)}{\lg\left(x^2+x-1\right)}\geq 0,$$

$$\frac{\lg\left(x^2-2x-9\right)-\lg(x+1)}{\lg\left(x^2+x-1\right)-\lg 1}\geq 0,\quad \frac{\left(x^2-2x-9\right)-(x+1)}{\left(x^2+x-1\right)-1}\geq 0,$$

$$\frac{x^2-3x-10}{x^2+x-2}\geq 0,$$

(-∞;-2)U(-2;1)U[5;+∞) .

С учётом ОДЗ: [5;+∞).

ПРИМЕР 3 Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{1-3x}-1}{\sqrt{2+x}-1} \le 1$$

1. ОДЗ: $\begin{cases} 1-3x \ge 0, \\ 2+x \ge 0, \\ \sqrt{2+x}-1 \ne 0. \end{cases}$ **[-2; $\frac{1}{3}$]**

$$\frac{\sqrt{1-3x}-1}{\sqrt{2+x}-1}-1 \le 0, \quad \frac{\sqrt{1-3x}-1-\sqrt{2+x}+1}{\sqrt{2+x}-1} \le 0$$

$$\frac{\sqrt{1-3x}-\sqrt{2+x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{1}} \le 0, \quad \frac{1-3x-2-x}{2+x-1} \le 0,$$

(-∞;-1)U[-$\frac{1}{4}$;+∞).

С учётом ОДЗ: [-2;-1)U[-$\frac{1}{4}$; $\frac{1}{3}$].

ПРИМЕР 4 **Решить систему неравенств**

$$\begin{cases} \log_{6-x} \dfrac{x^4}{x^2-12x+36} \le 0 \\ \dfrac{25\cdot 0{,}5^{x-1} - 2^{x-2}}{2^{x+2} - 4^x} \ge 0{,}5^{x+2}, \end{cases}$$

Решим первое неравенство

ОДЗ: **(-∞;-5)U(-5;0)U(0;6).**

$$\frac{\lg x^4 - \lg\left(x^2-12x+36\right)}{\lg(6-x) - \lg 1} \le 0, \quad \frac{x^4 - \left(x^2-12x+36\right)}{(6-x)-1} \le 0, \quad \frac{x^4 - (x-6)^2}{5-x} \le 0,$$

[-3;2]U(5;+∞).

Решим второе неравенство

$$\frac{25\cdot 2^{-x+1} - 2^{x-2}}{2^{x+2} - 2^{2x}} - 2^{-x-2} \ge 0.$$

$$\frac{25\cdot 2^{-x+1} - 2^{x-2} - 2^0 + 2^{x-2}}{2^{x+2} - 2^{2x}} \ge 0. \quad \frac{25\cdot 2^{-x+1} - 2^0}{2^{x+2} - 2^{2x}} \ge 0.$$

Так как 25 =$2^{\log_2 25}$,то получим:

$$\frac{2^{-x+1+\log_2 25} - 2^0}{2^{x+2} - 2^{2x}} \ge 0. \quad \frac{-x+1+\log_2 25}{x+2-2x} \ge 0.$$

(-∞;2)U[$\log_2 50$;+∞)

Решение системы с учётом ОДЗ: **[-3;0)U(0;2)U(5;6].**

Алгоритм

1. Перенеси всё в левую часть.
2. Приведи к общему знаменателю, если это нужно.
3. Если неравенство логарифмическое или показательное, приведи его к одному основанию.
4. Получи в числителе и знаменателе разность.
5. Замени неравенство на рациональное
6. Реши его.
7. Найди пересечение его решения с областью определения.

Пример 1.

Решить неравенство:

$$\log_x (x^2 - 3) < 0$$

ОТВЕТ: (-∞;-2)U(1;2)

Пример 2.

Решить неравенство:

$$\log_{x+3}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right) > 0$$

Решение:

ОДЗ: (-1;1)

ОТВЕТ: (-1;0) U(0;1)

Решить неравенства:

Пример 3.

$$\log_{2x}(2x^2 - 4x + 6) \le \log_{2x}(x^2 + x)$$

ОТВЕТ

Пример 4.

$$\frac{\log_x(x-3) - \log_x(9-x)}{\log_{x-1} x} < 0$$

ОТВЕТ

Пример 5.

$$\log_{\frac{1}{x}}\left(\frac{x}{x+1}\right) \cdot \log_{x-2}(x^2 + 1) \le 0$$

ОТВЕТ

Пример 6.

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x^2} > \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x-2}$$

ОТВЕТ

Пример 7.

$$\log_{|x+2|}(4 + 7x - 2x^2) \le 2$$

ОТВЕТ

Пример 8.

$$\log_{\frac{x}{3}}(\log_x \sqrt{3 - x}) \ge 0$$

ОТВЕТ

Пример 9.

$$\log_{2x+1}(4x - 5) + \log_{4x-5}(2x + 1) \le 2$$

ОТВЕТ

Решить неравенство (из сборника МИОО):

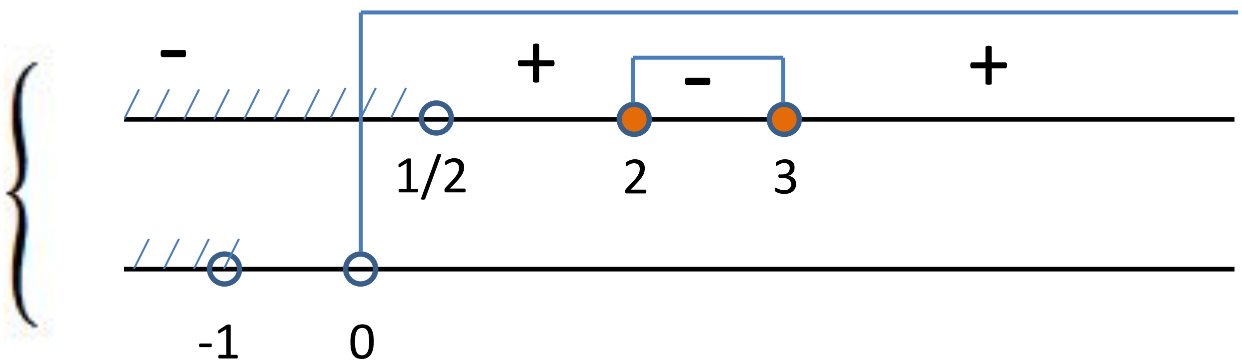
$$\log_{\left(\frac{16}{25-x^2}\right)}\left(\frac{14}{24-2x-x^2}\right) > 1$$

$$\begin{cases}(x-1)\lg 2+\lg\left(2^{x+4}+1\right)<\lg\left(7\cdot 2^{x}+12\right)\\ \log_{x}(x+2)>2\end{cases}$$

$$\begin{cases}25^{x}+3\cdot 10^{x}-4\cdot 4^{x}>0\\ \log_{1-\frac{x^2}{37}}\left(x^2-12|x|+37\right)-\log_{1+\frac{x^2}{37}}\left(x^2-12|x|+37\right)\geq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\log_{\log_{x}3x}(4x-1)\geq 0\\ 21^{x}-9\cdot 7^{x}-3^{x}+9\leq 0\end{cases}$$

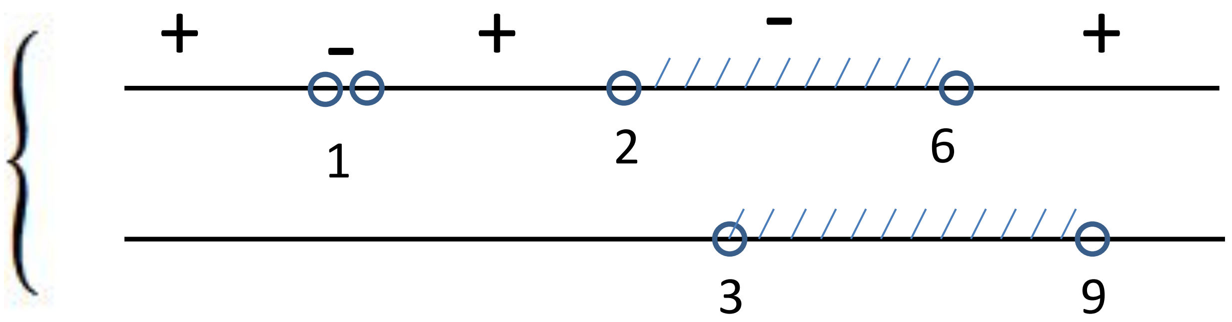
Пример 3



ОТВЕТ: $\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup [2; 3]$

НАЗАД

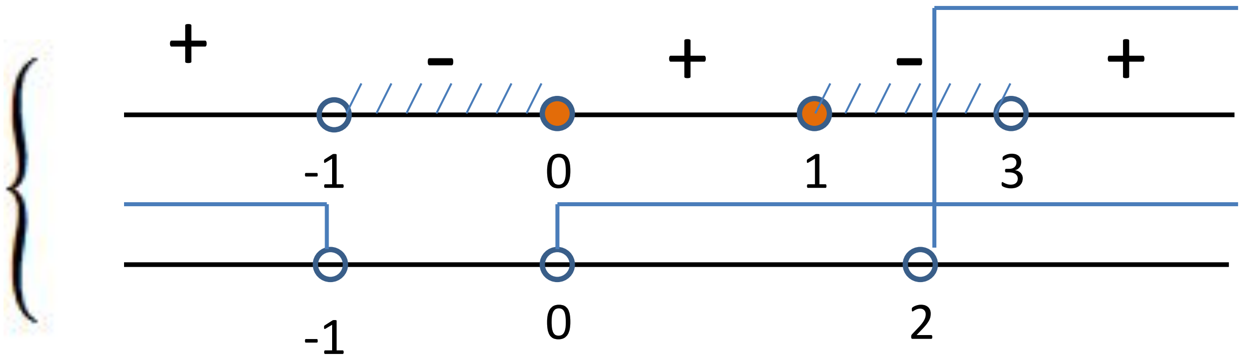
Пример 4



ОТВЕТ: $(3; 6)$

НАЗАД

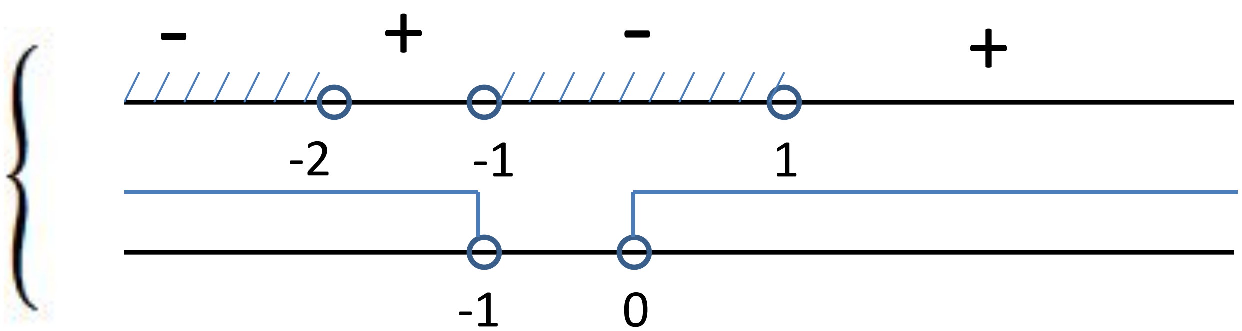
Пример 5



ОТВЕТ: (2;3)

НАЗАД

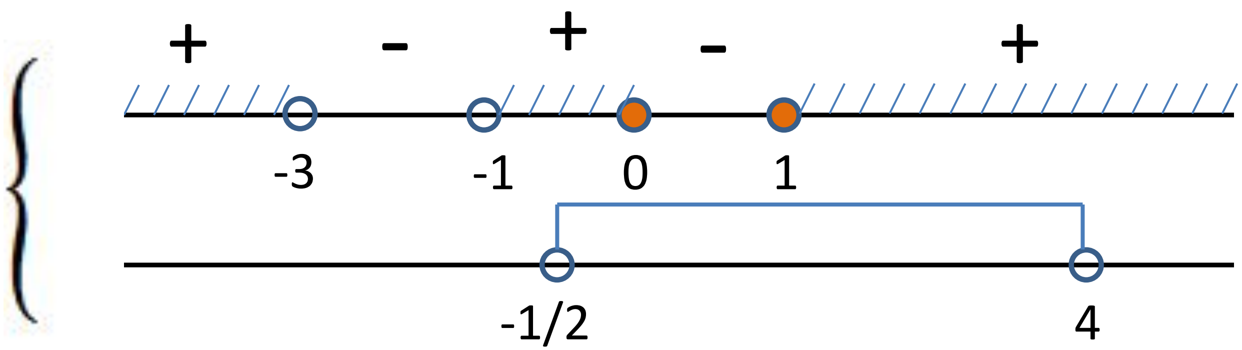
Пример 6



ОТВЕТ: $(-\infty; -2) \cup (0; 1)$

НАЗАД

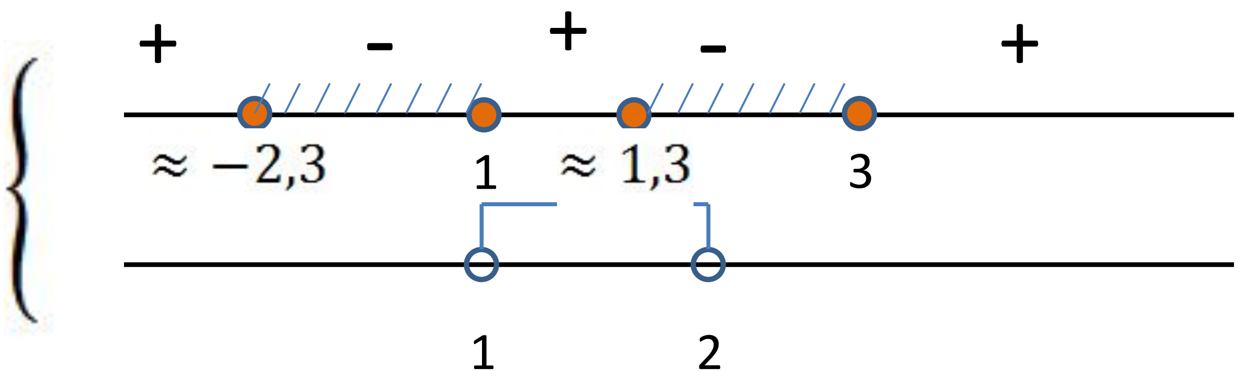
Пример 7



ОТВЕТ: $(-\frac{1}{2};0]\cup[1;4)$

НАЗАД

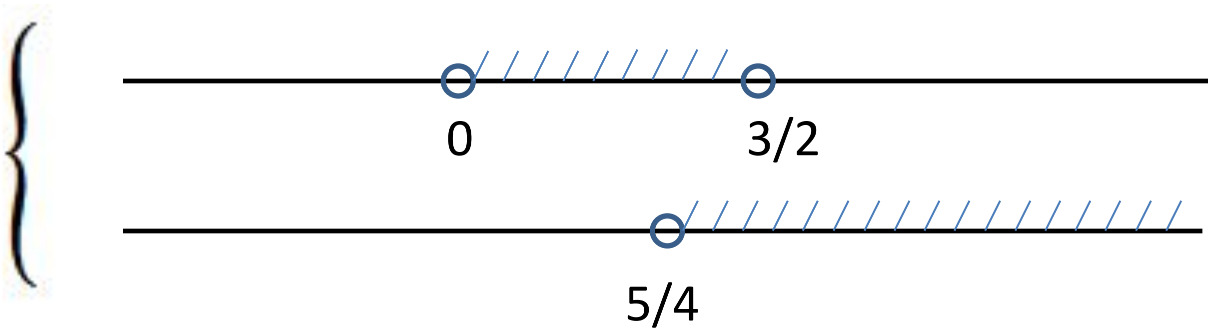
Пример 8



ОТВЕТ: $\left[\frac{\sqrt{13}-1}{2};2\right)$

НАЗАД

Пример 9



ОТВЕТ: $x \in \left(\frac{5}{4};\frac{3}{2}\right) \cup \{3\}$

НАЗАД