Потоки в сетях

Дан ориентированный граф. Будем рассматривать его как сеть труб, по которым некоторое вещество движется от источника к стоку. Веса на рёбрах - пропускная способность трубы.

Задача о максимальном потоке для данной сети: найти максимально возможную скорость производства (и потребления) вещества, при которой его ещё можно доставить от истока к стоку при данных пропускных способностях труб.

Сетью называется ориентированный граф $G=(V,E)$, каждому ребру $(u,v)\in E$ которого поставлено в соответствие число $c(u,v) \geq 0$, называемое **пропускной способностью** ребра. В случае $(u,v)\notin E$, полагаем $c(u,v)=0$.

В графе выделены 2 вершины: источник s и сток t. Граф связен, т.е. $|E| = |V| - 1$

Пусть дана сеть G=(V,E), пропускная способность которой задаётся функцией c. **Потоком** в сети G назовём функцию $f : V \times V \to R$ обладающую следующими свойствами:

- Ограничение, связанное с пропускной способностью: $f(u,v) \le c(u,v)$ для всех u,v изV;
- Кососимметричность: для всех u,v из V; $f(u,v) = -f(u,v)$
- Сохранение потока: для всех u из V - {s,t}. $\sum_{v \in V} f(u,v) = 0$

Величина потока определяется как сумма потоков по всем рёбрам выходящим из истока.

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v)$$

<u>Задача</u> <u>о</u> <u>максимальном</u> <u>потоке</u> состоит в следующем: для данной сети G с истоком s и стоком t найти поток максимальной величины.

Метод Форда – Фалкерсона

Основные понятия метода: остаточные сети, дополняющие пути и разрезы. Основная теорема – теорема Форда-Фалкерсона (о максимальном потоке и минимальном разрезе).

Поиск максимального потока производится по шагам. Вначале поток нулевой. На каждом шаге находим «дополняющий путь», по которому можно пропустить ещё немного вещества, и используем его для увеличения потока. Этот шаг повторяется до тех пор, пока есть дополняющие пути.

Пусть дана сеть и поток в ней. Остаточная сеть состоит из тех рёбер, поток по которым можно увеличить.

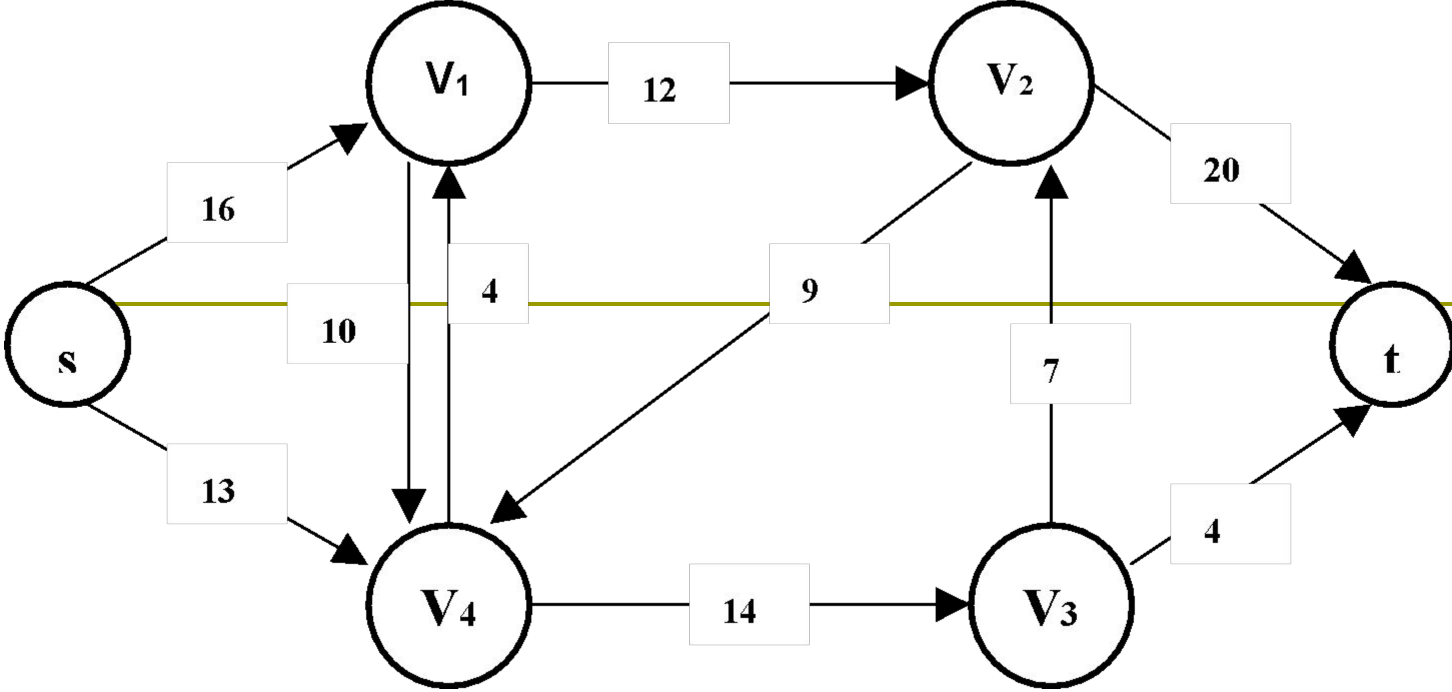
Пусть G=(V,E) – сеть с истоком s и стоком t. Пусть f – поток в этой сети.

Для любой пары вершин u и v рассмотрим **остаточную пропускную способность** из u в v, определяемую как

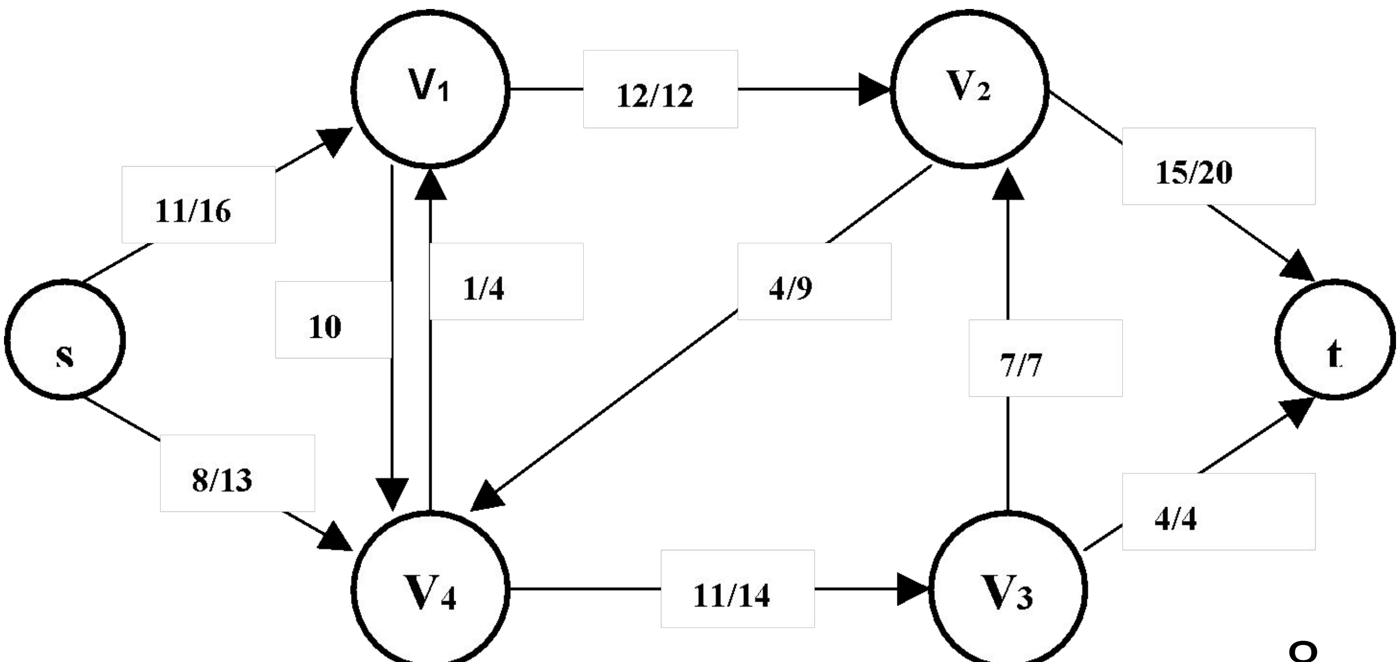
$$c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$$

Остаточная пропускная способность $c_f(u,v)$ может превосходить $c(u,v)$, если в данный момент поток f(u,v) отрицателен.

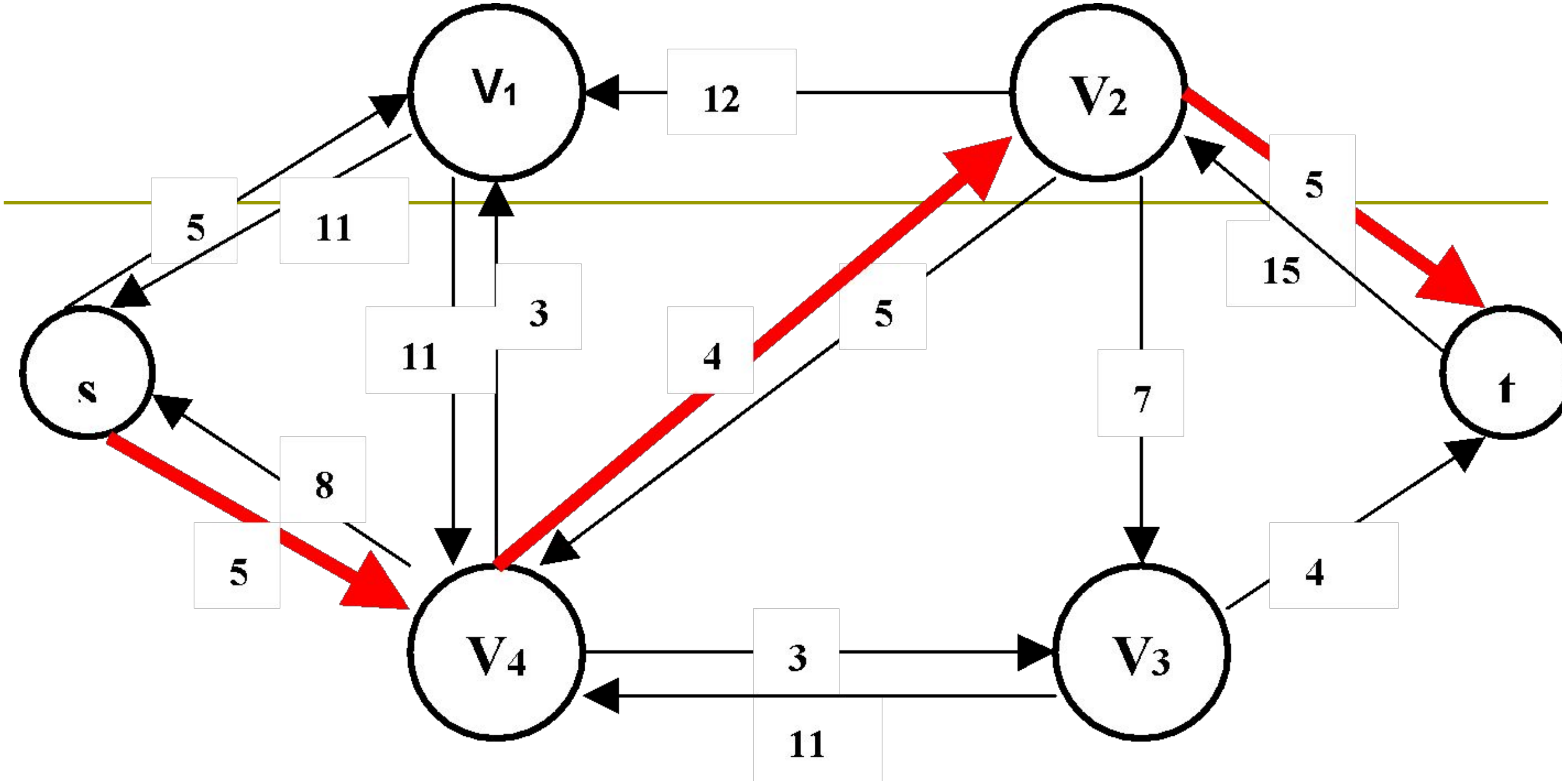
Сеть $G_f = (V, E_f)$, где $E_f = \{(u,v) \in V \times V : c_f(u,v) > 0\}$, называется **остаточной сетью** сети G, порождённой потоком f. Её рёбра, называемые **остаточными рёбрами**, допускают положительный поток.


s
V1
V2
V3
V4
t
16
13
12
10
4
9
7
20
4
14

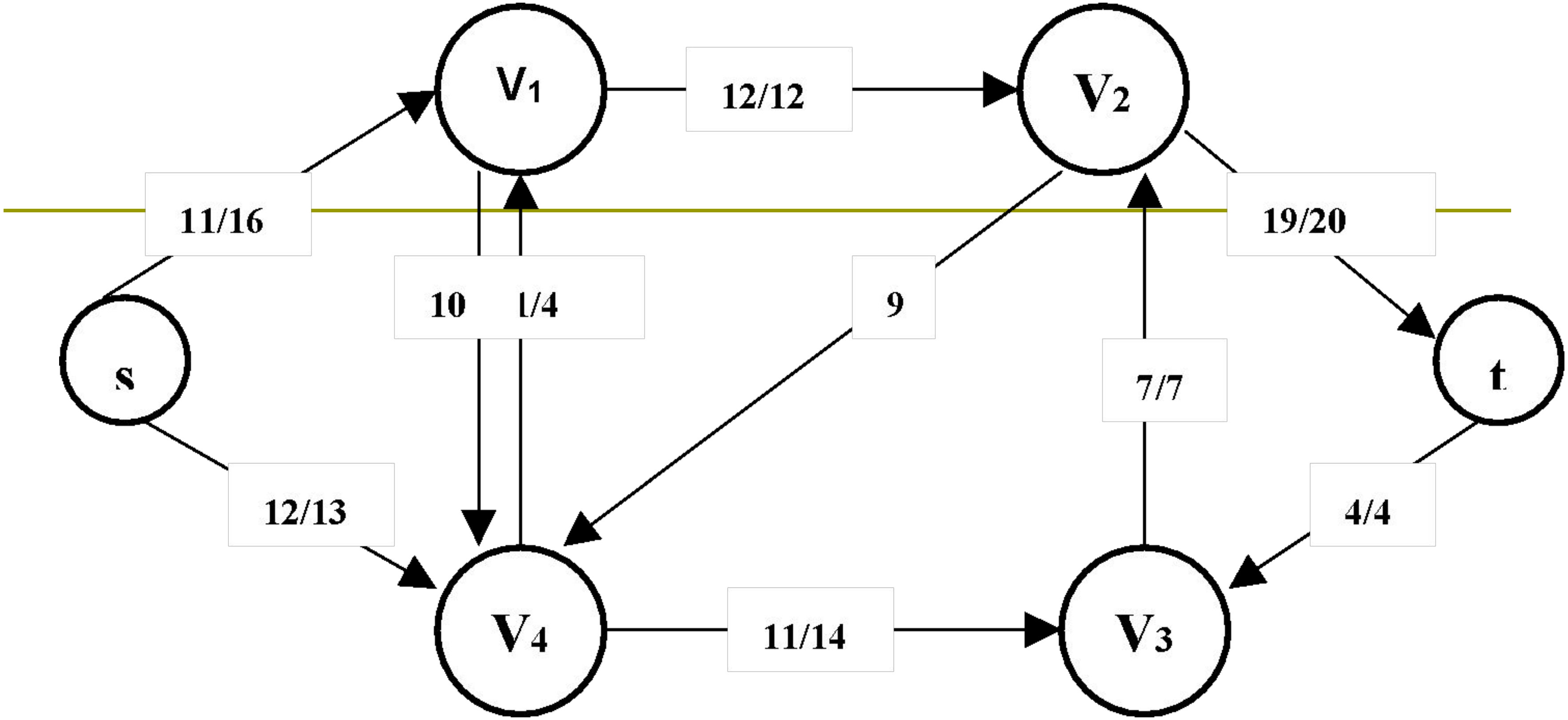
Сеть


s
V1
V2
V3
V4
t
11/16
8/13
12/12
10
1/4
4/9
7/7
15/20
4/4
11/14

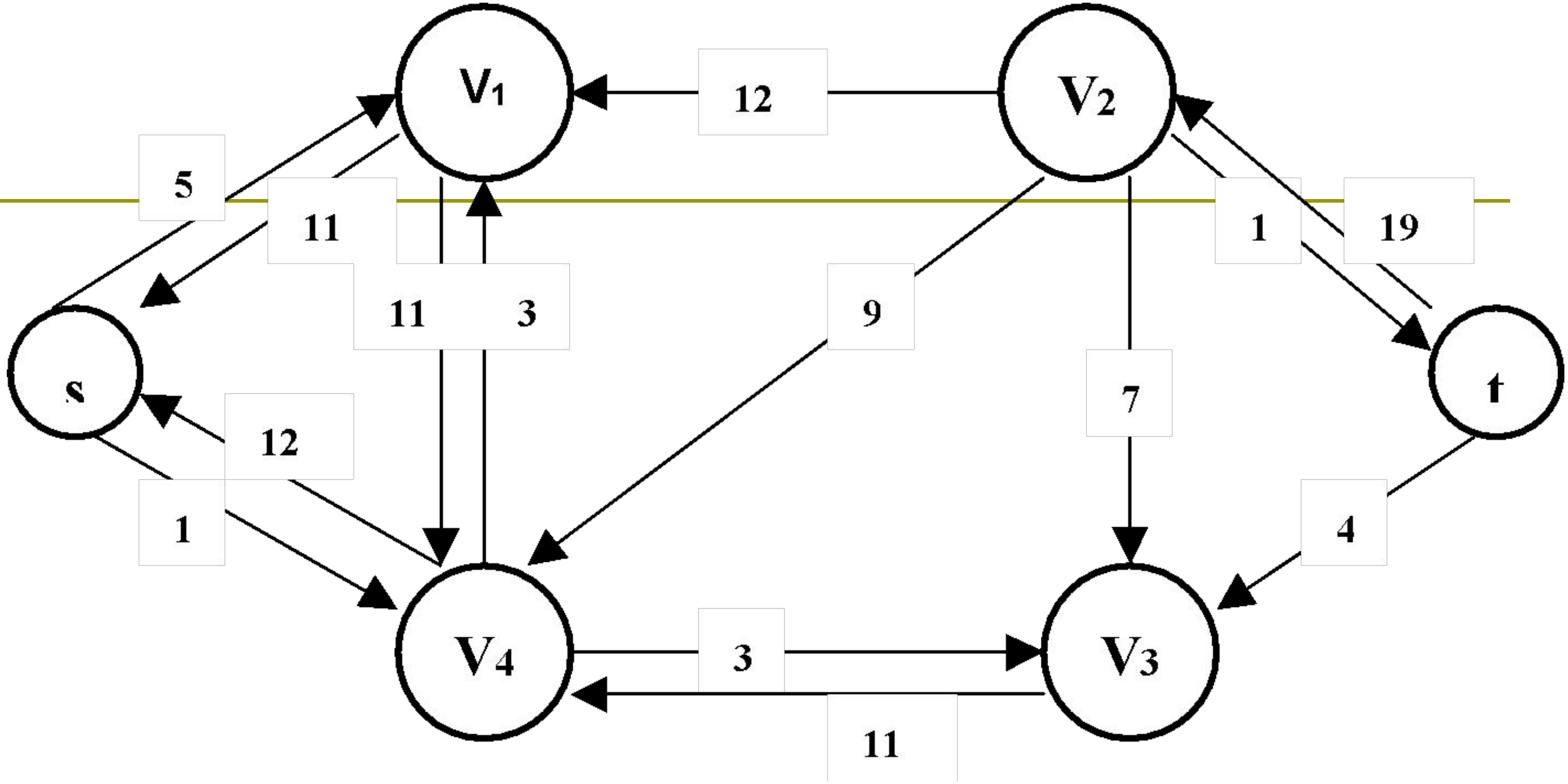
а)Поток



Б) Остаточная сеть G_f. Выделен дополняющий путь р. Его остаточная пропускная способность $c_f(p)$ равна $c(v_2,v_3)=4$



В) Результат добавления потока величины 4, проходящего вдоль пути p



Г) Остаточная сеть, порождённая потоком в).

Остаточное ребро (u,v) не обязано быть ребром сети G. Может оказаться, что $E_f \not\subset E$.

Рёбер (v_1, s) и (v_2, v_3) на рис.б) не было в исходной сети. Такое ребро появляется, когда $f(u,v) < 0$, т.е. когда имеется поток вещества в обратном направлении (по ребру (v, u)) – ведь этот поток можно уменьшить. Таким образом, если ребро (u, v) принадлежит остаточной сети, то хотя бы одно из рёбер (u, v) и (v, u) было в исходной сети.

Пусть f – поток в сети G=(V, E). Назовём **дополняющим путём** простой путь из истока s в сток t в остаточной сети G_f . Из определения остаточной сети вытекает, что по всем рёбрам (u, v) дополняющего пути можно переслать ещё сколько-то вещества, не превысив их пропускную способность.

Величину наибольшего потока, который можно переслать по дополняющему пути p, назовём **остаточной пропускной способностью пути**:

$$c_f(p) = \min\{c_f(u,v) : (u,v) \in p\}$$

ЛЕММА:

Пусть f – поток в сети G=(V, E) и p – дополняющий путь в G_f . Определим функцию $f_p : V \times V \to R$ так:

$$f_p(u,v) = \begin{cases} c_f(p) & \text{если } (u,v) \in p \\ -c_f(p) & \text{если } (v,u) \in p \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

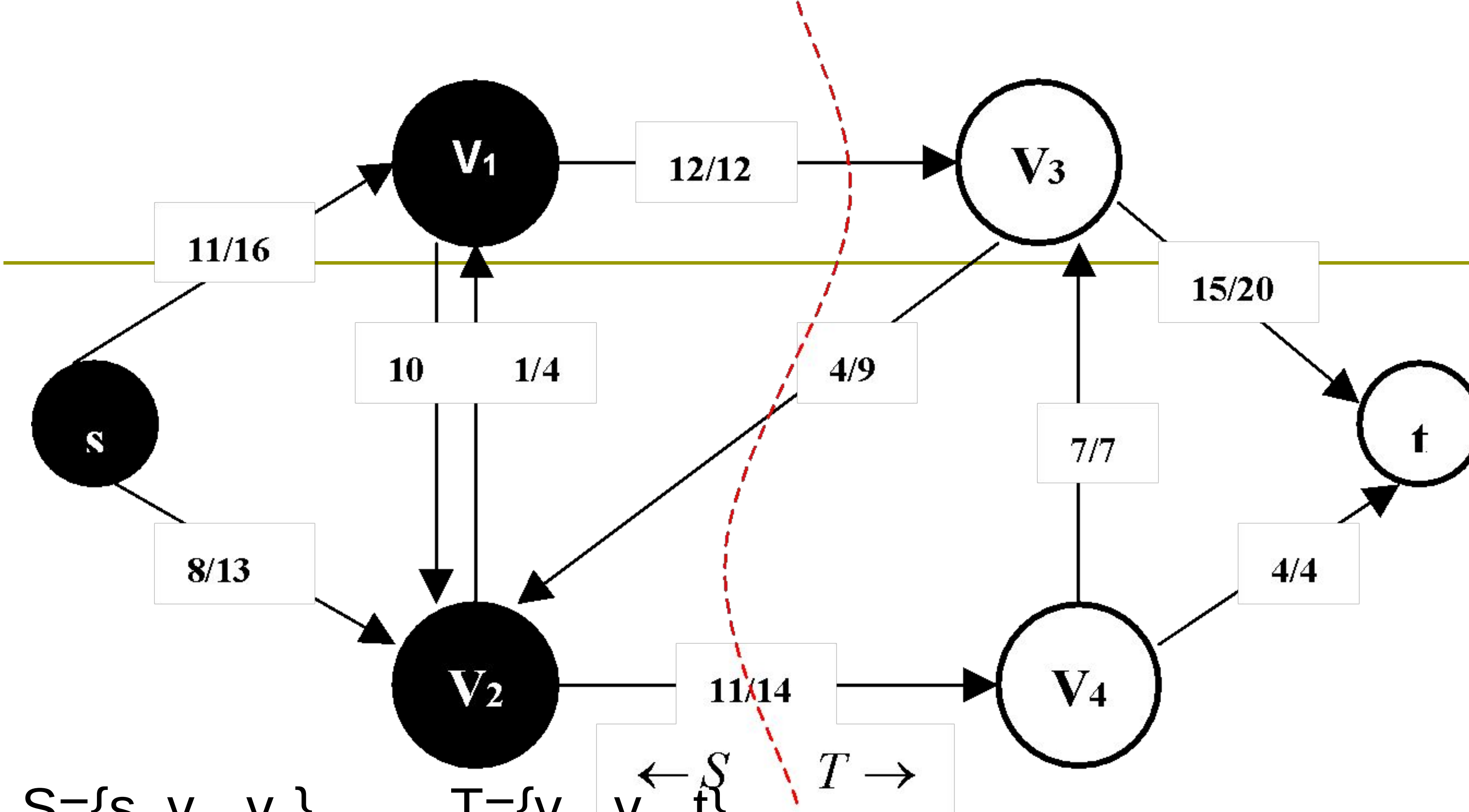
Тогда f_p – поток в сети G_f и $\left| f_p \right| = c_f(p) > 0$

Назовём **разрезом** сети G=(V, E) разбиение множества V на две части S и T=V \ S, для которых $s \in S$ и $t \in T$.

Пропускной способностью разреза (S,T) называют сумму пропускных способностей, пересекающих разрез рёбер.

Кроме того, для заданного потока f **величина потока через разрез** (S,T) определяется как сумма f(S,T) по пересекающим разрез рёбрам.

Минимальным разрезом называется разрез наименьшей пропускной способности (среди всех разрезов сети).



$S=\{s, v_1, v_2\}$ $T=\{v_3, v_4, t\}$

При этом

$f(S,T) = 12+(-4)+11=19$ – поток через разрез

$c(S, T) = 12+14=26$ – пропускная способность разреза

Поток через разрез в отличие от пропускной способности может включать и отрицательные слагаемые

ТЕОРЕМА (о максимальном потоке и минимальном разрезе):

Пусть f – поток в сети G = (V, E). Тогда следующие утверждения равносильны:

1. Поток f максимален в сети G.
2. Остаточная сеть G_f не содержит дополняющих путей.
3. Для некоторого разреза (S, T) сети G выполнено равенство $|f| = c(S,T)$.

В этом случае разрез является минимальным.

Общая схема алгоритма Форда-Фалкерсона

- На каждом шаге выбираем произвольный дополняющий путь p и увеличиваем поток f, добавляя поток величины $c_f(p)$ по пути p.
- Алгоритм использует массив f [u, v] для хранения текущих значений потока. Функция c(u, v) вычисляется за время O (1), при этом c(u, v)=0, если (u, v)$\notin$E. (При естественной реализации значение c(u, v) хранится рядом с рёбрами в списках исходящих рёбер.)

В строке 5 величина $c_f(u, v)$ понимается в соответствии с формулой

$$c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$$

Символ $c_f(p)$ означает локальную переменную, в которую помещается остаточная пропускная способность пути p.

FORD-FULKERSON (G, s,t)

for каждого ребра $(u, v) \in E[G]$
  do $f[u, v] \leftarrow 0$
   $f[u, u] \leftarrow 0$
while в остаточной сети G_f существует путь p из s в t
  do $c_f(p) \leftarrow \min \{c_f(u, v)$: (u, v) входит в p}
   for каждого ребра (u, v) пути p
    do $f[u, v] \leftarrow f[u, v]+c_f(p)$
     $f[V,u] \leftarrow - f[u,v]$

В лабораторной № 6 используется понятие увеличивающей цепи:

Рассмотрим произвольную последовательность вершин x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}. *Цепью* называется любая последовательность дуг $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, такая, что концевыми точками дуги α_i являются вершины x_i и x_{i+1}, т. е. $\alpha_i = (x_i, x_{i+1})$ или $\alpha_i = (x_{i+1}, x_i)$ для $i = 1, 2, \ldots, n$.

Дуги, в которых поток меньше пропускной способности, называются **увеличивающими**.

Каждая цепь из s в t, по которой могут быть дополнительно посланы единицы потока, называется **увеличивающей цепью**.

Алгоритм поиска увеличивающей цепи:

Используемые множества:

N- дуги, имеющие нулевую пропускную способность;

I- дуги, в которых поток меньше пропускной способности;

R- дуги, по которым уже проходит некоторый поток.

1. Определить состав множеств N, I, R. Дуги, принадлежащие N из дальнейшего рассмотрения исключить. ОКРАСИТЬ вершину s.
2. Окрашивать дуги и вершины в соответствии с правилами до тех пор, пока либо не будет окрашена вершина t, либо окраска новых вершин будет невозможна.

<u>Правила окрашивания вершины y и дуги (x,y) при уже окрашенной вершине x:</u>

1. Если $(x,y)\in I$, то окрашивается вершина y и дуга (x,y)
2. Если $(y,x)\in R$, то окрашивается вершина y и дуга (y,x)
3. В противном случае окрашивание вершины y и дуги (x,y) не производится.

В случае окрашивания вершины t в сети находится единственная цепь из s в t, включающая окрашенные дуги. (Эта цепь является увеличивающей).

В противном случае, т.е. когда по окончании процедуры окрашивания вершина t не окрашивается, в сети отсутствуют увеличивающие цепи из s в t.