Оценивание модели ARIMA

Лекция 13

Стационарен ли временной ряд?

Для принятия решения полезно:

1. Смотреть на график временного ряда
2. Использовать формальные статистические тесты

Тестирование стационарности для AR(1)

$$y_t = \theta y_{t-1} + \varepsilon_t$$

H_0: $\theta = 1$ – ряд является нестационарным

- содержит единичный корень;
- описывается процессом случайного блуждания.

H_1: $|\theta| < 1$ – ряд является стационарным

- не содержит единичный корень;
- описывается стационарным авторегрессионным процессом первого порядка

Тестирование стационарности для AR(1)

$$y_t = \theta y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$y_t - y_{t-1} = \theta y_{t-1} - y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Тестирование стационарности для AR(1)

$$y_t = \theta y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$y_t - y_{t-1} = \theta y_{t-1} - y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Delta y_t = (\theta - 1) \cdot y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Обозначим $(\theta - 1) = b.$ $\quad \boldsymbol{\Delta y_t = b \cdot y_{t-1} + \varepsilon_t}$

Тестирование стационарности для AR(1)

$$y_t = \theta y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$y_t - y_{t-1} = \theta y_{t-1} - y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Delta y_t = (\theta - 1) \cdot y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Обозначим $(\theta - 1) = b.$ $\quad \Delta \boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{y}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$

В этом случае:

H_0: $\theta = 1 \Longrightarrow b = 0$. Если ряд содержит единичный корень, то коэффициент ***b*** должен быть незначимым.

H_1: $|\theta| < 1 \Longrightarrow b < 0$. Если ряд стационарен, то коэффициент ***b*** должен быть значимым и отрицательным.

Тестирование стационарности для AR(1)

$$\Delta y_t = b \cdot y_{t-1} + \varepsilon_t$$

H_0: $b = 0$ H_1: $b < 0$

Идея теста: давайте оценим уравнение обычным МНК и проверим значимость коэффициента ***b*** при помощи обычной t-статистики:

$$\frac{b}{se(\hat{b})}$$

Тестирование стационарности для AR(1)

$$\Delta y_t = b \cdot y_{t-1} + \varepsilon_t$$

H_0: $b = 0$ H_1: $b < 0$

Идея теста: давайте оценим уравнение обычным МНК и проверим значимость коэффициента ***b*** при помощи обычной t-статистики:

$$\frac{b}{se(\hat{b})}$$

Проблема: если верна гипотеза H_0, то эта статистика не будет иметь t-распределение Стьюдента $\Longrightarrow$ нужны другие критические значения.

Тестирование стационарности для AR(1): тест Дики – Фуллера (DF)

Оцениваем уравнение:

$$\Delta y_t = b \cdot y_{t-1} + \varepsilon_t$$

H_0: $b = 0$. H_1: $b < 0$.

Расчетное значение статистики:

$$\frac{b}{se(\hat{b})}$$

Сравниваем расчетное значение с критическим значением из специальных таблиц Дики и Фуллера.

Тестирование стационарности для AR(1): тест Дики – Фуллера (DF)

Вычисляем расчетную статистику $\hat{\tau} = \dfrac{b}{se(\hat{b})}$

Сравниваем расчетное значение с критическим значением из специальных таблиц Дики и Фуллера.

Если расчетное значение отрицательное и меньше критического (то есть по модулю больше!), то гипотеза H0 отвергается $\Longrightarrow$ делаем вывод о том, что ряд стационарен.

В остальных модификациях теста процедура принятия решения будет аналогичной.

Тест Дики – Фуллера (DF) и его обобщения

Мы рассмотрели самый простой случай, когда тестируется стационарность AR(1) процесса без константы. В прикладных исследованиях важны и более общие случаи, которые будут рассмотрены далее:

- Тест Дики – Фуллера с константой
- Тест Дики – Фуллера с константой и трендом
- Расширенный тест Дики – Фуллера

  (augmented DF, ADF)

Тест Дики – Фуллера с константой

$$y_t = \delta + \theta y_{t-1} + \varepsilon_t$$

H_0: θ = 1 – ряд является нестационарным

- содержит единичный корень;
- описывается процессом случайного блуждания.

H_1: |θ|< 1 – ряд является стационарным

- не содержит единичный корень;
- описывается стационарным авторегрессионным процессом первого порядка

Тест Дики – Фуллера с константой

$$y_t = \delta + \theta y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$y_t - y_{t-1} = \delta + \theta y_{t-1} - y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Delta y_t = \delta + (\theta - 1) \cdot y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Обозначим $(\theta - 1) = b$.

Оцениваем уравнение $\boldsymbol{\Delta y_t = \delta + b \cdot y_{t-1} + \varepsilon_t}$

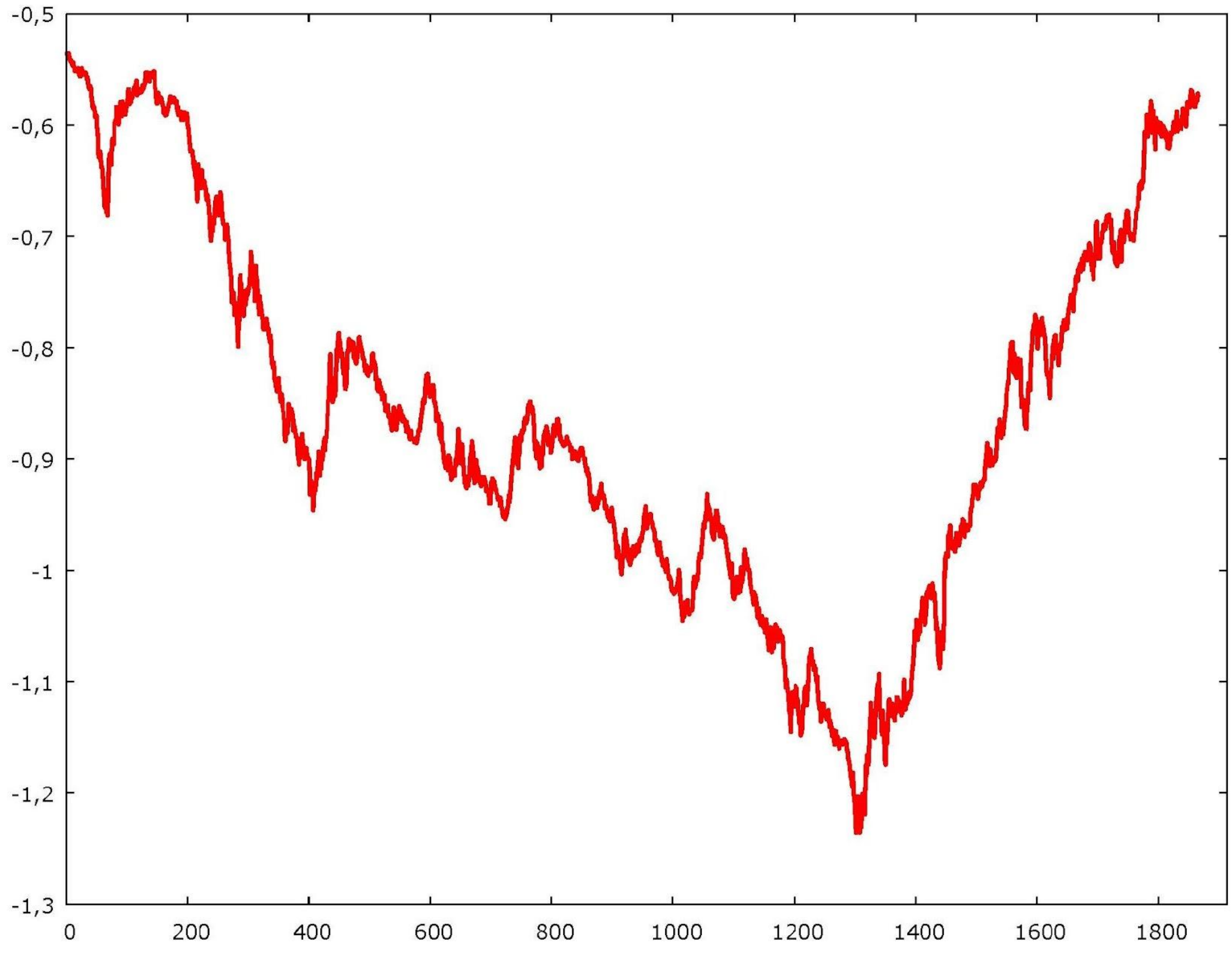
Расчетное значение статистики:

$$\hat{\tau} = \frac{b}{se(\hat{b})}$$

Сравниваем расчетное значение с критическим значением из специальных таблиц Дики и Фуллера (для теста с константой)

Тест Дики — Фуллера с константой

Пример: Логарифм обменного курса доллара США к немецкой марке (2 января 1980 — 21 мая 1987)



Тест Дики – Фуллера с константой

Пример: Логарифм обменного курса доллара США к немецкой марке (2 января 1980 – 21 мая 1987)

Результаты оценивания в Gretl

Тест Дики-Фуллера для l_DM
Объем выборки 1866
нулевая гипотеза единичного корня: a = 1

тест с константой
модель: (1-L)y = b0 + (a-1)*y(-1) + e
коэф. Автокорреляции 1-го порядка для e: -0,059
оценка для (a-1): -0,00125568
тестовая статистика: tau_c(1) = -1,19626
P-значение 0,6782

Тест Дики – Фуллера с константой

Пример: Логарифм обменного курса доллара США к немецкой марке (2 января 1980 – 21 мая 1987)

Результаты оценивания в Gretl

Тест Дики-Фуллера для l_DM
Объем выборки 1866
нулевая гипотеза единичного корня: a = 1

тест с константой
модель: (1-L)y = b0 + (a-1)*y(-1) + e
коэф. Автокорреляции 1-го порядка для e: -0,059
оценка для (a-1): **-0,00125568**
тестовая статистика: tau_c(1) = -1,19626
Р-значение 0,6782

Тест Дики – Фуллера с константой

Пример: Логарифм обменного курса доллара США к немецкой марке (2 января 1980 – 21 мая 1987)

Результаты оценивания в Gretl

Тест Дики-Фуллера для l_DM
Объем выборки 1866
нулевая гипотеза единичного корня: a = 1

тест с константой
модель: (1-L)y = b0 + (a-1)*y(-1) + e
коэф. Автокорреляции 1-го порядка для e: -0,059
оценка для (a-1): -0,00125568
тестовая статистика: **tau_c(1) = -1,19626**
P-значение 0,6782

Тест Дики – Фуллера с константой

Пример: Логарифм обменного курса доллара США к немецкой марке (2 января 1980 – 21 мая 1987)

Результаты оценивания в Gretl

Тест Дики-Фуллера для l_DM
Объем выборки 1866
нулевая гипотеза единичного корня: a = 1

тест с константой
модель: (1-L)y = b0 + (a-1)*y(-1) + e
коэф. Автокорреляции 1-го порядка для e: -0,059
оценка для (a-1): -0,00125568
тестовая статистика: tau_c(1) = -1,19626
Р-значение 0,6782 => нестационарность

Тест Дики – Фуллера с константой и трендом

$$y_t = \delta + \theta y_{t-1} + \varphi t + \varepsilon_t$$

H$_0$: θ = 1 – ряд является нестационарным, описывается процессом случайного блуждания с дрейфом

Также в этом случае говорят, что ряд содержит стохастический тренд.

H$_1$: |θ|< 1 – ряд является стационарным.

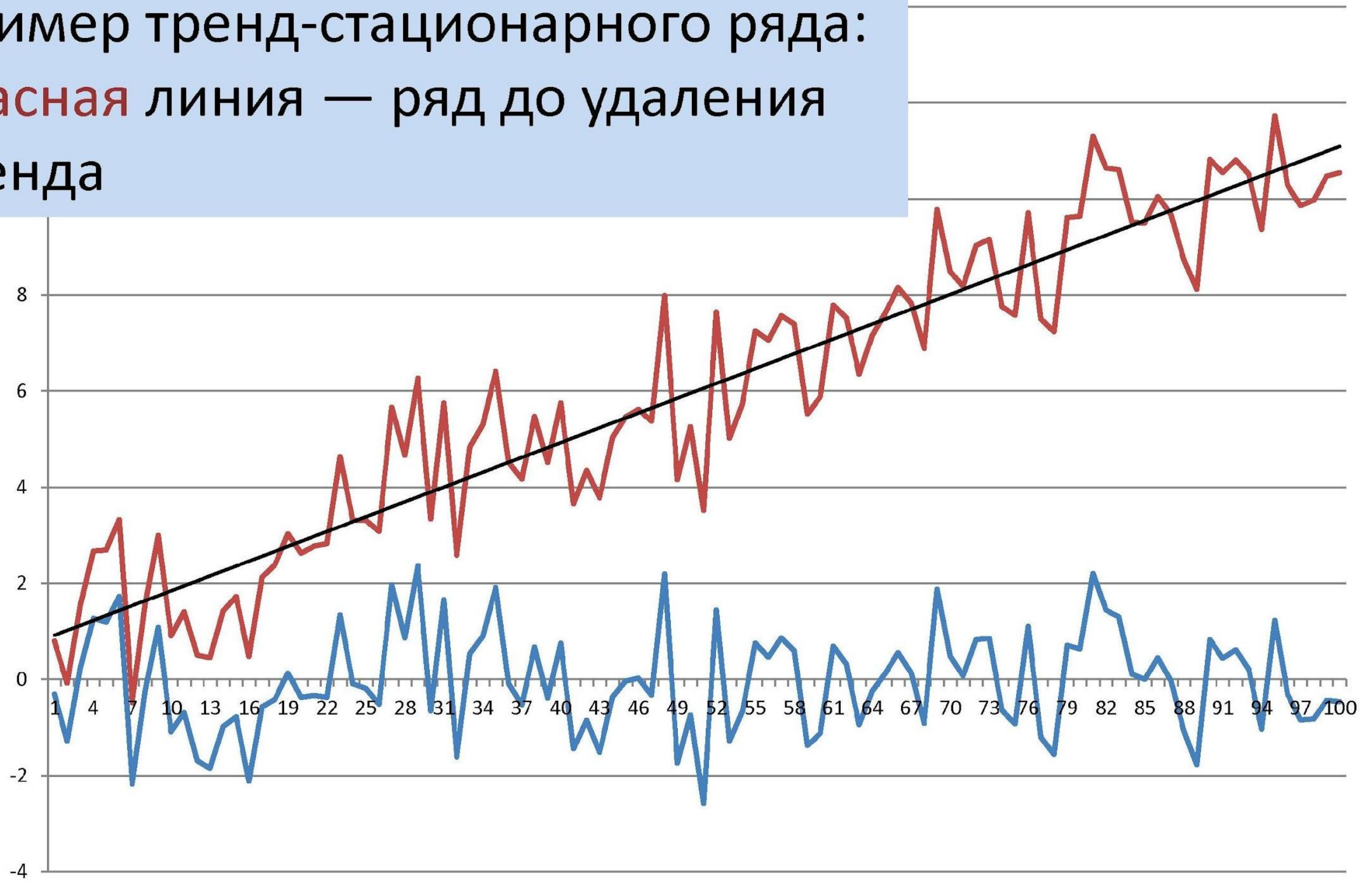
При |θ|< 1 и φ ≠ 0 ряд y_t называется стационарным относительно линейного тренда (тренд-стационарным, trend-stationary).

Также в этом случае говорят, что ряд содержит только детерминированный тренд.

В этом случае ряд $z_t = y_t - \varphi t$ стационарен.

Тест Дики — Фуллера с константой и трендом

Пример тренд-стационарного ряда:
красная линия — ряд до удаления тренда



Тест Дики – Фуллера с константой и трендом

$$y_t = \delta + \theta y_{t-1} + \varphi t + \varepsilon_t$$

$$y_t - y_{t-1} = \delta + \theta y_{t-1} - y_{t-1} + \varphi t + \varepsilon_t$$

$$\Delta y_t = \delta + (\theta - 1) \cdot y_{t-1} + \varphi t + \varepsilon_t$$

Обозначим $(\theta - 1) = b$.

Оцениваем уравнение $\boldsymbol{\Delta y_t = \delta + b \cdot y_{t-1} + \varphi t + \varepsilon_t}$

Расчетное значение статистики $\hat{\tau} = \dfrac{b}{se(\hat{b})}$

Сравниваем расчетное значение с критическим значением из специальных таблиц Дики и Фуллера (для теста с константой и трендом).

Расширенный тест Дики – Фуллера
(Augmented DF-test, ADF-test)

Рассмотрим более общий случай авторегрессионного процесса:

$$y_t = \theta_1 \cdot y_{t-1} + \cdots + \theta_p \cdot y_{t-p} + \varepsilon_t$$

H_0: ряд является нестационарным, содержит единичный корень

H_1: ряд является стационарным процессом AR(p)

Расширенный тест Дики – Фуллера

Оцениваем уравнение:

$$\Delta y_t = b y_{t-1} + c_1 \Delta y_{t-1} + \cdots + c_{p-1} \Delta y_{t-p+1} + \varepsilon_t$$

Расчетное значение статистики:

$$\hat{\tau} = \frac{b}{se(\hat{b})}$$

- Аналогично можно осуществлять ADF-тест с добавлением константы и тренда.
- Порядок лага для ADF-теста можно выбирать при помощи информационного критерия Шварца, который мы обсудим на следующей лекции.

Тест Kwiatkowski, Phillips, Schmidt, Shin (KPSS)

Альтернативным тестом для проверки стационарности является KPSS-тест.

H_0: Ряд является тренд-стационарным

H_1: Ряд является нестационарным

Обратите внимание, что в этом тесте нулевая гипотеза (в отличие от нулевой гипотезы ADF-теста) соответствует стационарности

Тест Kwiatkowski, Phillips, Schmidt, Shin (KPSS)

1. Оцениваем регрессию $y_t = \delta + \varphi t + \varepsilon_t$
2. Вычисляем остатки $e_1, e_2, \dots, e_T$
3. Вычисляем вспомогательные суммы (T штук):

$$S_t = \sum_{m=1}^{T} e_m$$

4. Вычисляем р ачение статистики:

$$KPSS = \sum_{t=1}^{T} \frac{S_t^2}{\widehat{\sigma^2}}$$

где $\widehat{\sigma^2}$ - оценка дисперсии случайной ошибки

Тест Kwiatkowski, Phillips, Schmidt, Shin (KPSS)

5. Если расчетное значение статистики меньше критического значения, равного **0,146**, то нулевая гипотеза принимается. Можно сделать вывод о стационарности ряда.

Замечание: если нулевой гипотезой является стационарность (а не тренд-стационарность), то процедура теста аналогична, только на первом шаге оценивается урав $y_t = \delta + \varepsilon_t$, а критическое значение равно **0,463**.

Методология Бокса-Дженкинса

Рассмотрим решение следующей задачи:

Имеется ***T*** наблюдений временного ряда:

$$y_1, y_2, \dots, y_T$$

Необходимо подобрать ***ARIMA(p,d,q)*** модель, которая хорошо описывает динамику этого временного ряда.

Методология Бокса-Дженкинса

Шаг 1. Определение порядка интегрированности ряда и переход к стационарным разностям

Шаг 2. Анализ автокорреляционной функции и частной автокорреляционной функции

Шаг 3. Оценивание и проверка адекватности модели

Шаг 4. Прогнозирование

Шаг 1. Определение порядка интегрированости ряда и переход к стационарным разностям

1. Тестируем ряд на стационарность, используя тесты, которые мы обсудили ранее
2. Если ряд оказался стационарным, то переходим к шагу 2. Если нет – то переходим к разностям ряда и тестируем стационарность
3. И так до тех пор, пока не получим стационарный ряд
4. Таким образом, га этом шаге определяется параметр ***d*** модели ***ARIMA (p,d,q)***, то есть порядок интегрированности ряда
5. Далее в рамках шагов 2 и 3 следует работать со стационарными разностями ряда

Шаг 2. Анализ автокорреляционной функции и частной автокорреляционной функции

Эмпирическая автокорреляционная функция временного ряда (ACF) – выборочный аналог теоретической автокорреляционной функции – рассчитывается на основе выборочных коэффициентов автокорреляции:

$$ACF(k) = \widehat{\rho_k} = \widehat{Corr}(y_t, y_{t-k})$$

Шаг 2. Анализ автокорреляционной функции и частной автокорреляционной функции

Эмпирическая частная автокорреляционная функция временного ряда (PACF) рассчитывается на основе выборочных частных коэффициентов корреляции.

Определим выборочный частный коэффициент корреляции *k*-го порядка как МНК-оценку для θ_k в модели AR(*k*):

$$PACF(k) = \widehat{\theta_k}$$

Шаг 2. Анализ автокорреляционной функции и частной автокорреляционной функции

На шаге 2 следует построить и проанализировать графики ACF и PACF для рассматриваемого временного ряда.

Далее описано поведение типичных графиков для разных видов временных рядов.

Шаг 2. Анализ автокорреляционной функции и частной автокорреляционной функции

Случай А. Процесс AR(***p***)

1. ACF бесконечна по протяженности и только в пределе при k→∞ сходится к нулю
2. PACF равна (или близка) к нулю для лагов, больших, чем ***p***

Случай Б. Процесс MA(***q***)

1. ACF равна (или близка) к нулю для лагов, больших, чем ***q***
2. PACF бесконечна по протяженности и только в пределе при k→∞ сходится к нулю

Случай В. Если не А и не Б, то у вас ARMA(p,q)

Шаг 2. Анализ автокорреляционной функции и частной автокорреляционной функции

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.539	0.539	116.40	0.000
		2	0.319	0.041	157.37	0.000
		3	0.190	0.004	171.91	0.000
		4	0.092	-0.029	175.35	0.000
		5	0.014	-0.044	175.43	0.000
		6	0.012	0.033	175.50	0.000
		7	-0.013	-0.026	175.56	0.000
		8	0.025	0.059	175.81	0.000
		9	0.042	0.018	176.52	0.000
		10	0.069	0.042	178.47	0.000
		11	0.027	-0.051	178.78	0.000
		12	0.036	0.028	179.32	0.000

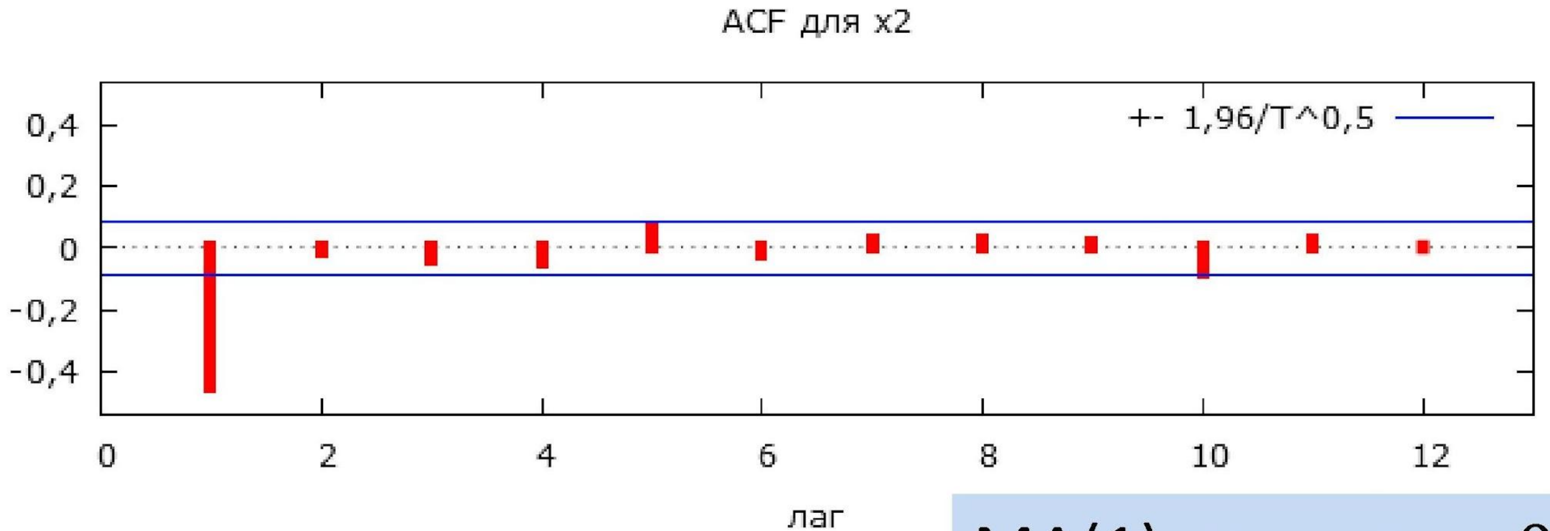
AR(1). $Y_t = 0.5Y_{t-1} + \varepsilon_t$. Корень $\mu = 2$

Шаг 2. Анализ автокорреляционной функции и частной автокорреляционной функции

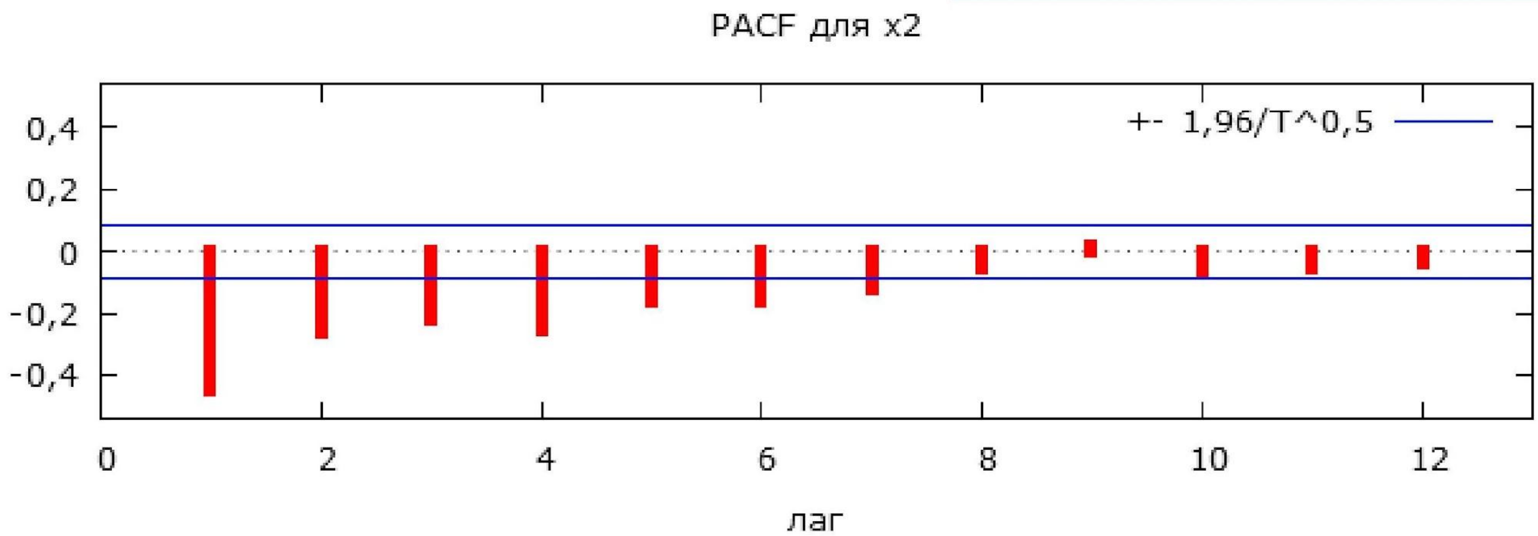
Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	-0.500	-0.500	100.19	0.000
		2	0.281	0.041	131.88	0.000
		3	-0.125	0.041	138.15	0.000
		4	0.104	0.063	142.49	0.000
		5	-0.106	-0.049	147.01	0.000
		6	0.090	0.009	150.33	0.000
		7	-0.096	-0.043	154.11	0.000
		8	0.080	0.011	156.70	0.000
		9	-0.068	-0.010	158.57	0.000
		10	0.103	0.074	162.91	0.000
		11	-0.081	0.009	165.60	0.000
		12	0.063	-0.002	167.23	0.000

$$\mathrm{AR}(1).\quad Y_t = -0.5Y_{t-1} + \varepsilon_t.\ \text{Корень}\ \mu = -2$$

Шаг 2. Анализ автокорреляционной функции и частной автокорреляционной функции



MA(1): $y_t = \varepsilon_t - 0{,}8\varepsilon_{t-1}$



Шаг 2. Анализ автокорреляционной функции и частной автокорреляционной функции

- Анализ коррелограмм на втором шаге позволяет сделать предварительные предположения о возможных порядках авторегрессии $\boldsymbol{p}$ и скользящего среднего $\boldsymbol{q}$.
- Эмпирические ACF и PACF не обязаны в точности совпадать с теоретическими, но должны быть похожи на них.
- По возможности рекомендуется использовать экономичные модели: $\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q} \leq 3$ (если нет сезонной компонеты)