Лекция 16

11. СТАЦИОНАРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

11.1. Основные понятия и определения СП

Вещественную переменную t будем называть временем; вещественную функцию x(t) – процессом; график функции x(t) – траекторией процесса. Множество возможных значений t обозначим T. Пусть X_t или X(t) – случайная величина, определенная на вероятностном пространстве {Ω, F, P} и зависящая от $t \in T$. Множество $\{X_t\}$ случайных величин, соответствующих различным $t \in T$, будем называть случайным процессом; случайную величину X_t – сечением случайного процесса в момент времени t. Реализацию сечения X_t будем обозначать x_t или x(t). В соответствии с определением случайных величин $x(t)=X(t, \omega)$, где $\omega \in \Omega$. Функцией распределения сечения X_t называют одномерной функцией распределения случайного процесса (СП) и обозначают $F(x; t)=P(X_t < x)$. Одномерной плотностью СП будем называть функцию

$$f(x; t)=\partial F(x; t) / \partial x.$$

n-мерной функцией и n-мерной плотностью распределения СП X_t назовем

$$F(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n) = P\left[\bigcap_{i=1}^{n}(X_{ti} < x_i)\right]$$

(*)

$$f(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n) = \frac{\partial^n F(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n)}{\partial x_1\ldots\partial x_n}$$

Множество всех конечномерных законов распределения (*) будем называть законом распределения СП X_t. Математическим ожиданием, дисперсией и средним квадратическим отклонением СП X_t будем называть функции (1)

$$\mathrm{m(t)} = \mathrm{M}(\mathrm{X_t}) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x;t)\,dx$$

$$\mathrm{D(t)} = \sigma_x^2(t) = D(X_t) = M(X_t^2) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_x(t)]^2 f(x;t)\,dx$$

$$\sigma(t)=\sqrt{D(X_t)\geq 0}$$

$$(\mathring{X}_t)=\mathring{X}(t)=X_t - m_x(t)=X(t)-m_x(t)$$

– центрированный СП. Ковариационным и корреляционным моментами СП X_t называются функции (2)

$$R(t,t')=M(X_t,X_{t'})=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}xx'\,f(x,x';t,t')dxdx'$$

$$K(t,t')=M(\mathring{X}_t,\mathring{X}_{t'},)=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}[x-m_x(t)][x'-m_x(t')]f(x,x';t,t']dxdx'$$

Нормированной корреляционной функцией сечений $X_{t'}$, $X_{t'}$ СП X_t будем называть функцию

$$\rho(t,t') = \frac{K(t,t')}{\sigma(t)\sigma(t')}$$

Числовые характеристики получены для СВ Xt и $X_{t'}$ - сечений СП, то операции M, D, R, K, ρ обладают свойствами, установленными в теоремах о числовых характеристиках СВ и векторов

Если X(t) и Y(t) – два СП, определенные на {Ω, F, P} и T, то их взаимной корреляционной функцией будем называть

$$K_{xy}(t,t') = M[\overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{Y}(t')]$$

$$\overset{\circ}{Y}(t') = Y(t') - m_y(t')$$

$$m_y(t') = M[Y(t')]$$

СП X(t) называют гильбертовым, если существует для любого t∈T

$$M(X_t^2)$$

Теорема: СП $X(t)$ является гильбертовым тогда и только тогда, когда существует $R(t, t')$ для всех $(t, t') \in T \times T$.

Множество T может быть дискретным и континуальным. В первом случае СП X_t называют процессом с дискретным временем, во втором – с непрерывным временем.

СП $X(t)$ называется выборочно непрерывным, дифференцируемым и интегрируемым в точке $\omega \in \Omega$, если его реализация $x(t)=x(t, \omega)$ соответственно непрерывна, дифференцируема и интегрируема.

СП X(t) называется непрерывным:

почти наверное (п.н.), если P(A)=1

$$A=\{\omega\in\Omega:\lim_{t_n\to t} x(t_n)=x(t)\}$$

в среднем квадратическом (с.к.), если

$$\lim_{t_n\to t} M[(X(t_n)-X(t))^2]=0$$

по вероятности (п.в.), если

$$\forall\delta\ge 0:\lim_{t_n\to t} P[\left|X(t_n)-X(t)\right|>\delta]=0$$

Каноническим разложением СП X(t) называют его представление в виде

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{i=1}^{n} V_i \varphi_i(t)$$

где V_i – коэффициенты – СВ с характеристиками $M(V_i)=0$, $D(V_i)= D_i$, $M(V_i V_j)=0$, которые называют элементарными; а $\phi_i(t)$ – координатные функции канонического разложения процесса X(t).

11.2. Основные понятия и определения стационарных СП

СП $X(t)$ называют стационарным в узком смысле, если $F(x_1,\dots,x_n;\ t_1,\dots,t_n)= F(x_1,\dots,x_n;\ t_1+\Delta,\dots,\ t_n+\Delta)$ при произвольных $n\geq 1$, $x_1,\dots,x_n$, $t_1,\dots,t_n$, Δ; t_1, $t_i+\Delta \in T$. Здесь $F(x_1,\dots,x_n;\ t_1,\dots,t_n)$ – n-мерная ФР СП $X(t)$.

СП $X(t)$ называют стационарным в широком смысле, если $m(t)=m(t+\Delta)$, $K(t,t')=K(t+\Delta,\ t'+\Delta)$, $t'+\Delta$, $t+\Delta$, t, $t' \in T$ (3).

Для процесса, стационарного в широком смысле, можно записать

$m(t)= m_x(0)=const$, $D(t)=K(t, t)=K(0,0)=const$, $K(t, t')=K(t-t',0)=K(0, t'-t)$.

$K(t,t')=k(\tau)=k(-\tau)$, $\tau = t'-t$.

$k(\tau)$ – четная функция, при этом $k(0)=D=\sigma^2$; $|k(\tau)| \leq k(0)$, D – дисперсия СП $X(t)$.

11.3. Спектральное разложение стационарных СП

$X(t)$ – стационарный СП, определенный на отрезке времени [0,T] с корреляционной функцией k(т), определенной на отрезке
[-T, T]. Поскольку k(т) – четная функция, то ее можно разложить в ряд Фурье (4)

$$\mathrm{k}(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos \lambda_k \tau$$

$$\tau = t' - t$$

$$D_0 = \frac{1}{T}\int_0^T k(\tau)d\tau$$

$$D_k = \frac{2}{T}\int_0^T k(\tau)\cos\lambda_k\tau d\tau$$

$$\lambda_k = k\pi/T$$ (k=1, 2,…)

$$k(t'-t) = K(t,t') = \sum_{k=0}^{\infty} D_k(\cos\lambda_k t'\cos\lambda_k t + \sin\lambda_k t'\sin\lambda_k t)$$ (5)

координатные функции cos λ_kt, sin λ_kt (k=0, 1,…) и коэффициенты канонического разложения U_k, V_k (k=0, 1,…) с характеристиками

$M(U_k)=M(V_k)=0$, $D(U_k)=D(V_k)=D_k$,

$M(U_i\ U_j)=M(V_i\ V_j)=0$, $M(V_i\ U_j)=0$ (6)

$$X(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(U_k\cos\lambda_k t+V_k\cos\lambda_k t) \quad (7)$$

$$(0 \le t \le T)$$

Это выражение называют дискретным спектральным разложением стационарного СП.

Полагая t'=t и учитывая формулу

K(t, t) =D[X(t)], найдем $\mathrm{D}[\mathrm{X}(\mathrm{t})]=\sum_{k=0}^{\infty} D_k$

Множество пар $\{(\lambda_k, D_k)\}$ называют спектром дисперсий спектрального разложения (4).

Если $T=\infty$, то вместо дискретного применяется так называемое непрерывное или интегральное каноническое разложение стационарного СП.

$$\overset{\circ}{X}(t) = \int_0^{\infty} [U(\lambda)\cos\lambda t + V(\lambda)\sin\lambda t]\,d\lambda \qquad (8)$$

$U(\lambda)$, $V(\lambda)$ – случайные функции вещественной переменной λ: $0 \le \lambda \le \infty$ с характеристиками

$M[U(\lambda)]=M[V(\lambda)]=0,\ K_U(\lambda,\lambda')=M[U(\lambda)U(\lambda')]=s(\lambda)\delta(\lambda-\lambda'),$ (9)

$K_V(\lambda,\lambda')=M[V(\lambda)V(\lambda')]=s(\lambda)\delta(\lambda-\lambda'),\ K_{UV}(\lambda,\lambda')=M[U(\lambda)V(\lambda)]=0$

s(λ) – некоторая вещественная функция, называемая спектральной плотностью стационарного СП; δ(λ) – функция Дирака; U(λ), V(λ) – так называемые некоррелированные белые шумы с интенсивностью s(λ).

$$s(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty k(\tau)\cos\lambda\tau\,d\tau \qquad (10)$$

$$k(\tau) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} s(\lambda)\cos\lambda\tau\, d\tau \tag{11}$$

s(λ) и k(т)

$$S(\lambda) = \int_0^{\lambda} s(\lambda')\,d\lambda'$$

- спектральная функция.

Термин «шум» обозначает нежелательные электрические сигналы, которые всегда присутствуют в электрических системах. Наличие шума, наложенного на сигнал, «затеняет», или маскирует, сигнал, это ограничивает способность приемника принимать точные решения о значении символов, а следовательно, ограничивает скорость передачи информации. Природа шумов различна и включает как естественные, так искусственные источники. Искусственные шумы – это шумы от родственных источников электромагнитного излучения (искровое зажигание). Естественные шумы исходят из атмосферы, солнца и др. галактических источников. Хорошее техническое проектирование может устранить большинство шумов или нежелательные эффекты посредством фильтрации, экранирования и т.д. Но существует один естественный шум, называемый тепловым, который устранить нельзя. Тепловой шум вызывается тепловым движением электронов. Тепловой шум можно описать как гауссов случайный процесс с нулевым средним. Основной спектральной характеристикой теплового шума является то, что его спектральная плотность мощности одинакова для всех частот. Когда мощность шума имеет единообразную спектральную плотность, то шум называется белым. Прилагательное «белый» используется в том смысле, что и для белого света содержащего равные доли всех частот видимого диапазона электромагнитного излучения. Белый шум представляет собой весьма полезную абстракцию, но ни один случайный процесс в действительности не может быть белым; впрочем, шум, появляющийся во многих реальных системах можно предположительно считать белым.