Методическая разработка: «Комбинаторика, вероятность, статистика».

Подготовила: Краснопёрова Лариса Александровна

учитель математики МОУ «Колесниковская СОШ Вейделевского района Белгородской области

5,6 классы:

Мордкович А.Г., Зубарева И.И.

- 5 класс – элементы комбинаторики. События. Перебор вариантов. Дерево вариантов.
- 6 класс – первые представления о вероятности. Число возможных исходов. Правило произведения. Простейшие вероятности. Логическое умножение или конъюнкция.

Дорофеев Г.В., Шарыгин И.Ф. и др.

- 5 класс – Перебор вариантов. Случайные события. Таблицы и диаграммы. Опрос общественного мнения и составление таблиц.
- 6 класс – Проценты. Столбчатые и круговые диаграммы. Комбинаторика. Случайные события. Логика перебора. Правило умножения. Дерево вариантов. Понятие о вероятности.

5,6 классы

В этих классах задачи по темам комбинаторики, статистики и вероятности решаются с помощью схем, непосредственным переборов всех возможных вариантов, рассматриванием и анализом таблиц, диаграмм.

Пример 5.1. Сколько новых чисел можно получить из числа 546, переставляя его цифры?

Решение.

Переберем все возможные варианты.

Сначала используем циклическую перестановку:

546 654 465

Теперь поменяем два соседних числа и произведем их циклическую перестановку:

456 645 564

Получилось всего 6 вариантов (проверка для себя: 3!=6), новых из которых – 5.

5,6 классы

Пример 5.2. Среди следующих событий укажите случайные, достоверные, невозможные:

A: «попугай научился говорить»;

B: «на поезде доехали до Северного полюса»;

C: «наугад взятая с полки книга – учебник по математике»;

D: «в полдень бьют Кремлевские куранты»;

E: «вода в Тихом океане закипит».

5,6 классы

Пример 5.3. Используя диаграмму, ответьте на вопросы:

1) Сколько детей родилось в январе?
2) В какие месяца родилось 600 детей?
3) Сколько детей родилось зимой?
4) В какие месяцы родилось меньше 400 детей?
5) В какие месяцы родилось больше 600 детей?
6) В какие месяцы родилось одинаковое число детей?

5,6 классы

Пример 6.1. В школе 800 учащихся. В шестых классах учится 10% всех школьников, причем 45% из них – девочки. Сколько девочек и сколько мальчиков учится в шестых классах.

Решение.
В шестых классах учится $800 \cdot 0{,}1 = 80$ учеников, из них $80 \cdot 0{,}45 = 36$ девочек, тогда мальчиков в шестых классах $80 - 36 = 44$.
Ответ: в шестых классах учится 36 девочек и 44 мальчика.

5,6 классы

Пример 6.2. Каждый из двух друзей может получить любую отметку от 2 до 5. Сколько существует вариантов получения ими отметок?

Решение.

Выписываем все возможные варианты, фиксируя в столбце оценку первого учения, а в строке – оценку второго ученика:

22	32	42	52
23	33	43	53
24	34	44	54
25	35	45	55

Ответ: 16 (проверка для себя 2^4=16).

5,6 классы

Пример 6.3.

а) Сколько существует двухзначных четных чисел?

б) Сколько существует трехзначных четных чисел?

Решение.

а) Цифр 10, но ноль не может быть на первой позиции, из них четных − 5. По условию двузначное число должно содержать на первой позиции любую цифру *и* на второй только четное число. Тогда по правилу произведения, так как нас интересует «*и то, и то*», находим: $9 \cdot 5 = 45$.

б) Учитывая предыдущие рассуждения по правилу произведения, так как нас интересует «*и то, и то, и то*», находим: $9 \cdot 10 \cdot 5 = 450$.

Ответ: *а*) 45; *б*) 450.

7-9 классы

Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Ш. и др.

7 класс – статистические характеристики: среднее, мода, медиана, размах варьирования

8 класс – организация статистических исследований. Генеральная и выборочная совокупности. Статистические таблицы. Интервальные ряды. Относительная частота. Полигон и гистограмма.

9 класс – элементы комбинаторики и статистики. Перестановки, размещения и сочетания. Относительная частота и вероятность (классическая). Противоположные события. Сложение вероятностей. Совместные и несовместные события. Независимые события. Умножение вероятностей.

7 класс

Особенности предпрофильного (углубленного) уровня подготовки:

- вводится понятие *выборки*,
- ее элементы называют *вариантами*,
- в результате при определении числовых характеристик используется термин *варианта*.
- упорядоченный в порядке не убывания ряд чисел, как и положено, называют *вариационным рядом*.

Основные определения

Выборка – ряд данных, полученных в результате статистического исследования.

Варианта – число из этого ряда.

Объем выборки – количество чисел в выборке.

Частота – количество появлений одной и той же варианты (Макарычев).

7 класс

Термин	Базовый уровень	Передпрофильный уровень
Среднее арифметическое	Частное от деления суммы чисел ряда на число слагаемых	Частное от деления суммы всех вариант на количество вариант (объема выборки)
Размах	Разность между наибольшим и наименьшим из чисел ряда	Разность наибольшей и наименьшей вариант
Мода	Число, наиболее часто встречающееся в данном ряду	Варианта выборки, имеющая наибольшую частоту
Медиана	для нечетного числа членов упорядоченного ряда – это число записанное посередине; для четного числа членов упорядоченного ряда – это среднее арифметическое двух чисел, записанных посередине	для нечетного числа вариант ряда – это средняя по счету варианта; для нечетного числа вариант ряда – это среднее арифметическое двух средних по счету вариант

7 класс

Пример 7.1. Дан ряд чисел (выборка):
16, 22, 16, 13, 20, 17.
Найти среднее арифметическое, размах, моду и медиану.

Решение. Рекомендуется сначала упорядочить данный ряд чисел (т.е. составить вариационный ряд):
13, 16, 16, 17, 20, 22.
Среднее арифметическое: $\frac{13+16\cdot 2+17+20+22}{6}=\frac{104}{6}\approx 17.33$

Размах этого ряда равен 22−13=9.

Мода этого ряда равна 16, так как это число встречается 2 раза, а остальные числа – по одному.

Медиана этого ряда с четным числом членов (вариант) равна $\frac{16+17}{2}=16,5$

7 класс

Пример 7.2. В ряду чисел 12, 14, 15, 17, 17, 18 пропущено одно число. Найти его, если известно:

а) среднее арифметическое этого ряда равно 15;

б) размах ряда равен 8.

Решение. Пусть x – искомое пропущенное число.

а) Так как среднее арифметическое этого ряда:

$$\frac{x+12+14+15+17\cdot 2+18}{7}=15 \Rightarrow \frac{x+93}{7}=15 \Rightarrow x+93=15\cdot 7 \Rightarrow$$

$$x+93=105 \Rightarrow x=105-93=12$$

б) Так как размах меньше наименьшего числа ряда, то возможны два варианта:

1) к наименьшей варианте прибавляем 8: 12+8=20;
2) из наибольшей варианты вычитаем 8: 18−8=10.

8 класс

Пример 8.1. Для выборки 3, 8, –1, 3, 0, 5, 3, –1, 3, 5 составить таблицы (распределения) частот и относительных частот, построить полигон частот, найти среднее арифметическое и моду.

Решение. Число элементов в выборке 10. Число –1 наблюдалось 2 раза, число 0 наблюдалось 1 раз, и т.д. Полученные данные записываются в виде таблицы частот:

Число	–1	0	3	5	8
Частота	2	1	4	2	1

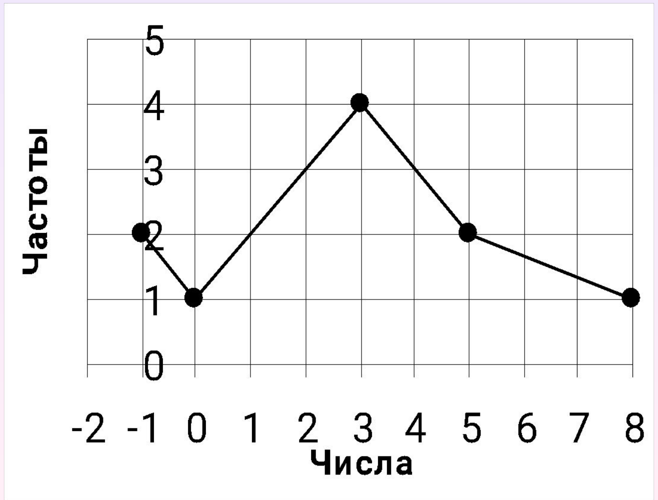
Для контроля найдем сумму всех частот: 2+1+4+2+1=10.

Среднее арифметическое: $\dfrac{-1\cdot 2+0\cdot 1+3\cdot 4+5\cdot 2+8\cdot 1}{10}=\dfrac{28}{10}=2.8$

Мода равна 3, так как это число встречается наибольшее количество раз.

8 класс

По таблице распределения частот строится полигон частот



Для составления таблицы относительных частот каждую частоту следует разделить на общее количество чисел (объем выборки). Полученные данные записываются в виде таблицы относительных частот:

Число	–1	0	3	5	8
Относительная частота	0.2	0.1	0.4	0.2	0.1

Для контроля найдем сумму всех относительных частот: 0.2+0.1+0.4+0.2+0.1=1.

8 класс

Пример 8.2. С опытной делянки собран урожай свеклы. Данные взвешивания (в граммах) случайно отобранных корнеплодов:

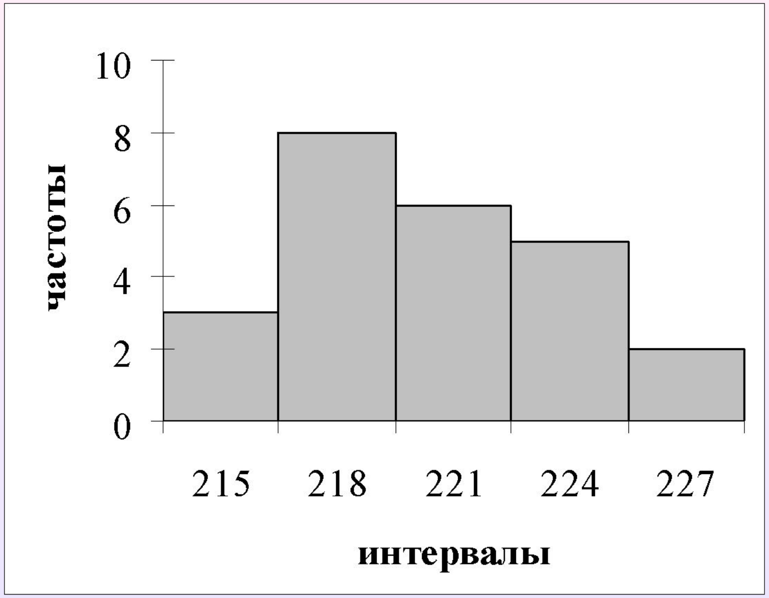
218	221	215	225	225	217
224	220	220	219	221	219
222	226	218	220	223	230
223	216	224	227	220	222

Составить интервальный ряд (распределение) с интервалами длиною 3.
Построить гистограмму.
Найти средний вес корнеплодов.

8 класс

Решение. Группируем данные в интервалы длиною 3: [215,218), [218,221), [221,224), [224,227), [227,230]. Подсчитываем количества чисел, попавших в эти интервалы (помня, что количество чисел, совпадающих с правым концом данного интервала, относится в следующий интервал): в 1-ом интервале [215,218) содержится 3 числа, во 2-ом интервале [218,221) содержится 8 чисел, в 3-ем интервале [221,224) содержится 6 и т.д. Полученные данные записываем в виде интервальной таблицы:

интервал	частота
215-218	3
218-221	8
221-224	6
224-227	5
227-230	2



8 класс

Для вычисления среднего веса корнеплодов интервалы заменяются их срединами. Полученные данные записываем в виде таблицы (для удобства расчетов можно добавить столбец):

интервал	средина	частота	Произведение средины на частоту
215-218	216,5	3	649,5
218-221	219,5	8	1756
221-224	222,5	6	1335
224-227	225,5	5	1127,5
227-230	228,5	2	457
суммы		24	5325

С помощью посчитанных по столбцам сумм легко вычисляется средний вес: 5325/24=221.875 г.

9 класс

Пример 9.1. В кафе имеются 3 первых блюда, 5 вторых и 2 третьих. Сколькими способами посетитель кафе может выбрать обед, состоящих их первого, второго и третьего блюд?

Решение. Эта комбинаторная задача на правило умножения. Так как все три блюда выбираются *одновременно*, то следует перемножить количества этих блюд: $3 \cdot 5 \cdot 2=30$.

Ответ: 30.

Пример 9.2. Двое размещаются в пустом купе. Сколькими способами они могут выбрать себе места.

Решение. Представим себе, что существует очередность выбора. Первые пассажир выберет себе место 4-мя способами. Тогда второй может выбирать только из оставшихся трех мест. Поэтому, по правилу умножения (так *и* первый *и* второй должны выбрать места) $4 \cdot 3=12$.

Ответ: 12.

9 класс

Пример 9.3. За круглый стол с 5-ю местами садятся 5 человек.

а) Сколькими способами они могут это сделать?

б) Сколькими способами они могут это сделать при условии что два определенных человека должны сеть рядом?

Решение.

а) Так как 5 человек произвольным образом рассаживаются по 5 местам, то число всех таких способов равно числу перестановок 5 элементов: $5!=120$.

б) Первый человек может выбрать себе место 5 способами, второй определенный может занять рядом с ним только одно из 2-х мест (слева или справа от первого), а оставшиеся 3 человека могут занять места $3!=6$ способами. Тогда по правилу произведения (они *все в конечном итоге* должны занять места) находим: $5 \cdot 2 \cdot 6=60$.

Ответ: *а*) 120; *б*) 60.

9 класс*

Пример 9.4. В 9-м классе изучают 7 учебных дисциплин. Сколькими способами можно составить расписание занятий на понедельник, если в этот день недели должно быть 4 урока?

Решение.

Из 7 дисциплин нужно выбрать 4 и распределить (разместить) по 4 урокам. Число способов, которыми это можно сделать равно числу размещений из 7 элементов по 4:

$$A_7^4 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$$

Ответ: 840.

9 класс*

Пример 9.5. Сколько матчей будет сыграно в футбольном чемпионате с участием 16 команд, если каждые 2 команды встречаются между собой 1 раз?

Решение.

Число матчей равно числу способов выбора двух элементов из 16 элементов без учета их расположения, т. е. числу сочетаний из 16 по 2:

$$C_{16}^{2} = \frac{16 \cdot 15}{2} = 120$$

Ответ: 120.

9 класс

Пример 9.6. Найти вероятность выпадения нечетного числа очков при бросании одной игральной кости.

Решение.

Общее число исходов данного испытания равно 6. Пусть A − выпало нечетное число очков, тогда этому благоприятствуют 3 исхода: выпадение очков 1, 3, 5.

По классическому определению вероятности находим, что вероятность выпадения нечетного числа очков при бросании кости равна

$$P(A)=3/6=0.5.$$

Ответ: 0.5.

9 класс

Пример 9.7. Из урны, в которой находятся 5 белых и 3 чёрный шара, вынимают один шар. Найти вероятность того, что шар окажется чёрным.

Решение.

Пусть A − вынут черный шар. Общее число исходов данного испытания 5+3=8. Число исходов, благоприятствующих наступлению A, равно 3, так черный шар можно взять только из имеющихся 3-х черных шаров. Тогда по классическому определению вероятности: $P(A)=3/8$.

Ответ: 3/8.

9 класс

Пример 9.8. На пяти одинаковых карточках написаны буквы О, П, Р, С, Т. Перемешанные карточки вынимаются наудачу и располагаются в одну линию. Какова вероятность, что получится слово СПОРТ?

Решение.

Пусть A − получилось слово СПОРТ. Этому событию благоприятствует только одни единственный исход. Общее число исходов равно числу способов, которыми можно разложить 5 букв в различном порядке. Это число есть количество перестановок 5 элементов, равное $5!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120$. Отсюда находим искомую вероятность $P(A)=1/120$.

Ответ: 1/120.

9 класс*

Пример 9.9. Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры и, помня лишь, что они различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что абонент набрал нужный ему номер.

Решение.

Пусть A набраны нужные две цифры, тогда ему благоприятствует только один исход. Общее число исходов рассматриваемом испытании равно числу размещение из 10 цифр по 2:

$$A_{10}^{2} = 10 \cdot (10 - (2 - 1)) = 10 \cdot 9 = 90$$

Отсюда находим искомую вероятность: $P(A)$=1/90.

Ответ: 1/90.

9 класс*

Пример 9.10. Из урны, в которой находятся 12 белых и 8 чёрных шаров, вынимают наудачу два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся чёрными?

Решение.

Пусть A – вынуто два черных шара. Общее число исходов равно числу способов, которыми можно извлечь пару шаров из всех имеющихся, то есть равно числу сочетаний из 20 по 2:

$$C_{20}^{2} = \frac{20 \cdot 19}{2} = 190$$

Число исходов, благоприятствующих наступлению A, равно числу способов, которыми можно извлечь пару черных шаров из имеющихся 8 черных шаров, то есть равно числу сочетаний из 8 по 2:

$$C_{8}^{2} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$$

Тогда по классическому определению вероятности: $P(A)=28/190=14/95$.

Ответ: 14/95.

9 класс*

Пример 9.11. В бассейне содержится 8 лещей и 12 карпов. Какова вероятность того, что из 5 наугад пойманных рыб две окажутся лещами?

Решение.

Пусть A – из 5 наугад пойманных рыб две окажутся лещами. Число n всех возможных исходов равно числу сочетаний из 20 рыб по 5:

$$n = C_{20}^{5} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 15504$$

При подсчете числа благоприятствующих событию A исходов следует учесть, что каждая пара лещей может сочетаться с каждой тройкой карпов. Таким образом, число благоприятствующих исходов, по правилу произведения равно $m=m_1 \cdot m_2$, где m_1 – число способов отбора пары лещей, и m_2 – число способов отбора тройки карпов. Число m_1 равно число сочетаний из 8 лещей по 2: $m_1 = C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$

Число m_2 равно числу сочетаний из 12 карпов по 3: $m_2 = C_{12}^3 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{2 \cdot 3} = 220$

Поэтому $m=m_1 \cdot m_2=28 \cdot 220=6160$. Тогда по классическому определению вероятности: $P(A)=m/n=6160/15504=385/969$.

Ответ: 385/969.

10-11 классы

Мордкович А.Г., Семенов П.В. (профильный уровень)

10 класс – статистические характеристики: среднее, мода, медиана, размах варьирования.

11 класс – Классическая вероятностная схема. Геометрические вероятности. Независимые повторения испытаний с двумя исходами. Формула Бернулли. Биномиальное распределение. Статистические методы обработки данных. Графическое представление рядов. Среднее и его свойства. Дисперсия. Нормальное распределение. Гауссова кривая. Приближенные вычисления в испытаниях Бернулли. Закон больших чисел (ЗБЧ).

Никольский С.М. и др.

10 класс – Вероятность и события. Действия с событиями. Свойства вероятности. Частота. Условная вероятность. Независимые события. Случайные величины*. Мат.ожидание.* Формула Бернулли*. ЗБЧ*.

10 класс

Бином Ньютона: $$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots +$$
$$+ C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots + C_n^{n-2}a^2 b^{n-2} + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^n b^n$$

Биномиальные коэффициенты

Число размещений:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(m-1)) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Число сочетаний:

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(m-1))}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Полезные формулы:

$$C_n^0 = 1, \quad C_n^n = 1, \quad C_n^1 = n, \quad C_n^{n-k} = C_n^k,$$

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}, \quad C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1},$$

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n.$$

10 класс

Треугольник Паскаля

$$C_1^0 \quad C_1^1$$

$$C_2^0 \quad C_2^1 \quad C_2^2$$

$$C_3^0 \quad C_3^1 \quad C_3^2 \quad C_3^3$$

$$C_4^0 \quad C_4^1 \quad C_4^2 \quad C_4^3 \quad C_4^4$$

$$C_5^0 \quad C_5^1 \quad C_5^2 \quad C_5^3 \quad C_5^4 \quad C_5^5$$

……………………………………....

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

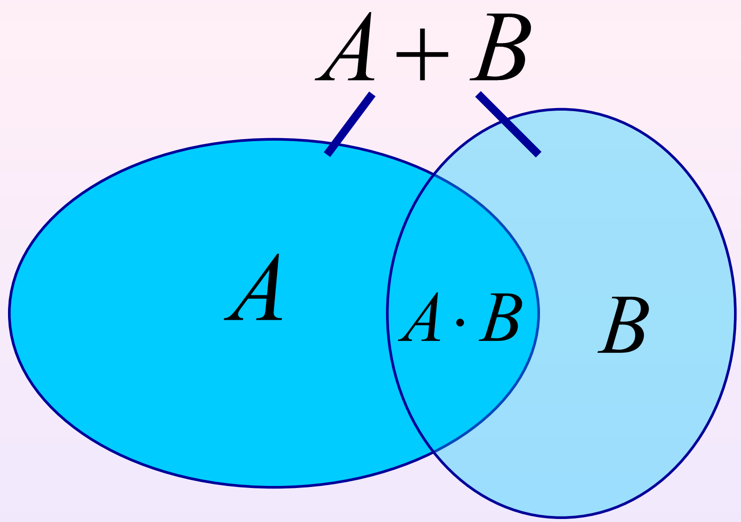
…………………………

Каждое число равно сумме двух соседних чисел, стоящих над ним в предыдущей строке

10 класс

Сумма событий $A+B$ – это событие, состоящее в том, что произойдет хотя бы одно из событий A ***или*** B в данном испытании.

Произведение событий $A \cdot B$ – это событие, состоящее в том, что произойдут оба события A ***и*** B в данном испытании.



Количество элементов в $A+B$ равно сумме количества элементов в A и B за вычетом количества элементов в $A \cdot B$.

10 класс

Основные формулы:

1) $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

2) $P(A+B)=P(A)+P(B)$ – для несовместных A и B

3) $\boldsymbol{P}(A)+\boldsymbol{P}(\overline{A})=1$

4) $P(A\cdot B)=P(A)P(B)$ – для независимых A и B

10 класс

Пример 10.1. В бассейне содержится 9 карасей, 4 окуня и 3 карпа. Какова вероятность того, что случайно выловленная рыба окажется окунем или карпом.

Решение.

Пусть A − первая выловленная рыба оказалась окунем,

B − первая выловленная рыба оказалась карпом, причём A и B – несовместны.

Тогда по классическому определению вероятностей $P(A)=4/16=1/4$, $P(B)=3/16$.

Событие «первая выловленная рыба оказалась карпом ***или*** окунем» есть сумма событий $A+B$, поэтому, используя формулу сложения вероятностей несовместных событий, находим искомую вероятность: $P(A+B)=P(A)+P(B)=7/16$.

Ответ: 7/16.

10 класс

Пример 10.2. Из колоды 36 карт наудачу вынимается одна. Какова вероятность вытянуть даму или карту пиковой масти.

Решение.

Пусть A − вытянута карта дама,

B − вытянута карта пиковой масти.

Вероятности этих событий: $P(A)=1/4$, $P(B)=1/9$.

$A+B$ − вытянута дама ***или*** карта пиковой масти.

Но события A и B совместны (но независимы), так как есть возможность вытянуть даму пик, причем это событие есть произведение AB (т.е. одновременное наступление событий A ***и*** B), причем его вероятность $P(AB)=1/36$.

Далее следует использовать формулу сложения вероятностей совместных событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=1/4+1/9-1/36=1/3.$$

Ответ: 1/3.

10 класс

Пример 10.3. Вероятность получения икры от самки лосося в условиях рыбозавода равна 0.74. В среднем из 18% икры лосося личинок не появляется. Какова вероятность получения личинок лосося в искусственных условиях рыбозавода?

Решение.

Пусть A – получение икры лосося в условиях рыбозавода, B – появление личинки лосося и C – получение личинок лосося на рыбозаводе, причем $C=AB$ (так как должна быть *и* икра *и* личинки).

По условию $P(A)=0.74$. Если количество икры, из которой личинок не появится, составляет 18%, то личинки могут появиться из 82% икры и, следовательно, вероятность появления личинки $P(B)=0.82$.

По умножения вероятностей

$P(C)=P(A)P(B)=0.74\cdot 0.82=0.61$.

Ответ: 0.61.

10 класс

Пример 10.4. В корзине с луковицами гладиолусов 6 корней белых гладиолусов, 11 корней – цветных и 3 − черных. Из корзины наугад вынимаются друг за другом две луковицы и высаживаются. Какова вероятность того, что из двух посаженых луковиц вырастут либо оба черных, либо оба белых гладиолуса?

Решение.

Пусть A_1 − первый посаженый цветок белый, A_2 – второй посаженый цветок белый, тогда $A=A_1A_2$ – оба посаженных цветка белые. Вероятности этих событий:

$P(A_1)=6/20=3/10$, $P(A_2)=(6-1)/(20-1)=5/19$,

$P(A)=P(A_1)P(A_2)=3/10\cdot 5/19=15/190=3/38$.

Аналогично, пусть B_1 – первый посаженый цветок черный, B_2 – второй посаженый цветок черный, тогда $B=B_1B_2$ – оба цветка черные.

Вероятности этих событий:

$P(B_1)=3/20$, $P(B_2)=(3-1)/(20-1)=2/19$, $P(B)=P(B_1)P(B_2)=3/20\cdot 2/19=3/190$.

Событие $C=A+B$ – оба цветка белые <u>*или*</u> оба черные, вероятность его находится по формуле сложения вероятностей несовместных событий:

$P(C)=P(A)+P(B)=3/38+3/190=9/95$.

Ответ: 9/95.

10 класс

Пример 10.5. Три автоматических ракетных комплекса одновременно делают залп по воздушной цели противника. Найти вероятность того, что цель будет поражена, если каждое попадание полностью ее разрушает, а и вероятность попадания для каждого комплекса равна 0.6.

Решение.

Промах есть событие противоположное попаданию. По условию задачи вероятности попадания каждого попадания для каждого комплекса одинаковы и равны 0.6. Следовательно, равны и вероятности промаха для каждого комплекса: 1−0.6=0.4.

Цель будет поражена, если произойдет событие A – будет *хотя бы одно* попадание. Противоположное ему событие − *ни одного* попадания, т.е. все три комплекса промахнулись.

Тогда находим вероятности:

$$P(\overline{A}) = 0.4 \cdot 0.4 \cdot 0.4 = 0.064 \quad \Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0.064 = 0.936$$

Ответ: 0.936.

10 класс

Пример 10.6. Первое орудие поражает цель в 80% случаев, второе − в 70%, третье − в 90%. Найти вероятности:

1) поражения цели из всех трех орудий;

2) не попали ни из одного;

3) хотя бы одного попадания при залпе из всех орудий.

Решение.

Пусть A_1 − попали из первого орудия, A_2 − попали из второго, A_3 − попали из третьего. Эти события независимы и по условию

$P(A_1)=0.8$; $P(A_2)=0.7$; $P(A_3)=0.9$.

1) Пусть A − попали из всех трех орудий. Тогда $A=A_1A_2A_3$. По формуле умножения вероятностей независимых событий

$$P(A)=P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)=0.8\cdot 0.7\cdot 0.9=0.504.$$

10 класс

2) Пусть B − не попали ни из одного, то есть ни из первого <u>*и*</u> ни из второго <u>*и*</u> ни из третьего, поэтому $B = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_2$

Вероятности промахов из орудий соответственно:

$$P(\overline{A}_1) = 1 - 0.8 = 0.2,\ \ P(\overline{A}_2) = 1 - 0.7 = 0.3,\ P(\overline{A}_3) = 1 - 0.9 = 0.1$$

$$\Rightarrow \quad P(B) = P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3) = 0.2 \cdot 0.3 \cdot 0.1 = 0.006$$

3) Пусть C − хотя бы один раз попали при залпе из трех орудий. Это событие противоположно тому, что не попали ни из одного орудия:

$$C = \overline{B} \quad \Rightarrow \quad P(C) = P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.006 = 0.994$$

Ответ: 1) 0.504; 2) 0.006: 3) 0.994.

.

11 класс

Пример 11.1. Случайным образом выбирается одно из решений неравенства $\sqrt{x} \le 10$.

Найти вероятность того что оно является решение неравенства $\sqrt{x} \le 1$.

Решение.

Эта задача на геометрическую вероятностью. Сначала определим множества всех исходов и благоприятствующих исходов. Неравенство $\sqrt{x} \le 10$ эквивалентно $0 \le x \le 100$

Мера этого множества есть длина отрезка и она равна 100.

Неравенство $\sqrt{x} \le 1$ эквивалентно $0 \le x \le 1$

Мера этого множества есть длина отрезка и она равна 1.

Тогда по геометрическому определению вероятности находим, что искомая вероятность равна 1/100=0.01.

Ответ: 0.01.

11 класс

Пример 11.2. Имеется таблица частот:

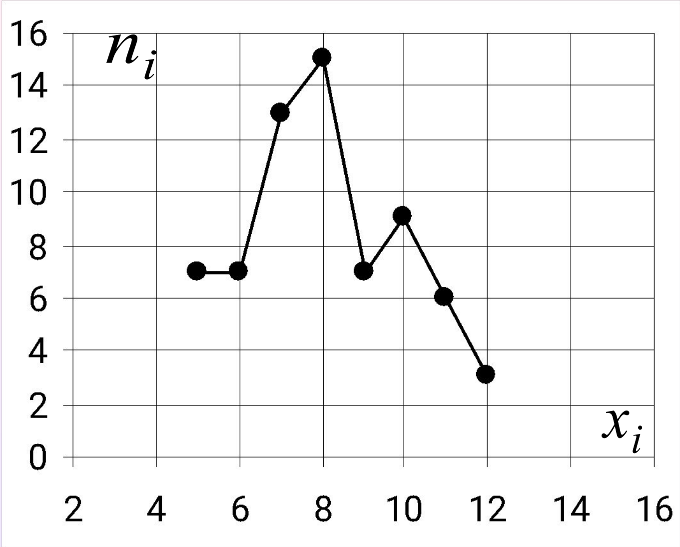
x_i	5	6	7	8	9	10	11	12
n_i	4	7	13	15	7	9	6	3

Построить полигон частот. Найти среднее арифметическое, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду, медиану, размах.

Решение.

Сначала строится полигон.

Так как мода равна варианте с наибольшей частотой, то наибольшей частоте $n_4=15$ соответствует варианта $x_4=8$, которая и является модой. Поэтому мода равна 8.



11 класс

Так как медиана равна варианте, делящей вариационный ряд на две равные по количеству вариант части и в нашем случае количество вариант равно k=8 – четное число, то медиана равна среднему двух соседних срединных вариант $(x_4+x_5)/2=(8+9)/2=8.5$.

Так как в нашей упорядоченной выборке $x_{max}=x_8=12$ и $x_{min}=x_1=5$, то размах варьирования равен $x_{max}-x_{min}=12-5=7$.

Для удобства составляется расчетная таблица. Из нее находим:

1) среднее: $M=528/64=8.25$;

2) дисперсия:

$D=4574/64-(8.25)^2=3.41$;

3) среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma=\sqrt{D}=\sqrt{3.41}=1.85$$

x_i	n_i	$x_i n_i$	x_i^2	$n_i x_i^2$
5	4	20	25	100
6	7	42	36	252
7	13	91	49	637
8	15	120	64	960
9	7	63	81	567
10	9	90	100	900
11	6	66	121	726
12	3	36	144	432
суммы	64	528	-	4574

11 класс*

Повторение независимых испытаний

Формула Бернулли:

$$\boldsymbol{P}_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$$

Она описывает вероятность появления события A m раз в последовательности n *независимых* испытаний, причем вероятность наступления A во всех испытаниях *одинакова* и равна p. Принято обозначение $q=1-p$.

Такое число появлений события A в n независимых испытаниях, вероятность которого самая большая, называется *наивероятнейшим* (или *модальным*) числом и обозначается m_0.

Наивероятнейшее число определяется из неравенства:

$$np-q \le m_0 \le np+p,$$

причем, если

$np-q$ – дробное, то m_0 единственное;

$np-q$ – целое, то наивероятнейшими числами будут m_0 и m_0+1;

np – целое, то $m_0=np$.

11 класс*

Пример 11.3. В результате многолетних наблюдений установлено, что в данной местности вероятность выпадения осадков в течение 1 июля равна 4/17. Найти наивероятнейшее число дождливых дней 1 июля за ближайшие 50 лет.

Решение.

По условию $p=4/17$ и $n=50$. Найдем:

$$q=1-p=1-4/17=13/17;\ np=50\cdot 4/17=200/17.$$

Отсюда находим величину:

$$np-q=200/17-13/17=11.$$

Так как $np-q$ – целое, то наивероятнейшими числами будут $m_0=np-q=11$ и $m_0+1=12$.

Ответ: Наивероятнейшими числами дождливых дней 1 июля за ближайшие 50 лет будут 11 и 12.

11 класс*

Пример 11.4. Вероятность опечатки на одной странице оценивается в 1%. Оцените общее количество напечатанных в типографии страниц, если число страниц с опечатками оказалось равным 5.

Решение. Эта задача на наивероятнейшее число успехов в схеме Бернулли.

По условию p=0.01, тогда q=0.99, а одно наивероятнейшее число успехов равно 5.

Так как наивероятнейшее число успехов содержится в интервале $[np-q, np+p,]$, то один раз используем его нижнюю границу: $5=n\cdot 0.01-0.99$, а другой – его верхнюю границу: $5=n\cdot 0.01+0.01$. Из этих уравнений находим два значения n:

1) $n\cdot 0.01=5+0.99 \Rightarrow n\cdot 0.01=5.99 \Rightarrow n=5.99/0.01=599$;

2) $n\cdot 0.01=5-0.01 \Rightarrow n\cdot 0.01=4.99 \Rightarrow n=4.99/0.01=499$.

Ответ: от 499 до 599.

11 класс*

Пример 11.5. Всхожесть семян некоторого растения составляет 90%. Какова вероятность того, что из 4 посеянных семян взойдут: *а*) 3; *б*) хотя бы 1; *в*) не менее 3.

Решение. Так как вероятность всхожести семян одинакова и равна p=0,9, общее число независимых испытаний равно n=4, то следует использовать формулу Бернулли. Найдем q=1−p=1−0,9=0,1.

а) Количество взошедших семян равно 3, поэтому число успехов в n=4 независимых испытаниях есть m=3. Тогда по формуле Бернулли находим искомую вероятность:

$$P_4(3) = C_4^3 p^3 q^{4-3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} \cdot (0.9)^3 \cdot 0.1 = 0.2916$$

11 класс*

б) Пусть A – взошло хотя бы одно растение. Оно противоположно событию $\overline{A}$, состоящему в том, что ни одно не взошло. Для $\overline{A}$ число успехов в n=4 независимых испытаниях есть m=0. Тогда вероятность этого события легко найти по формуле Бернулли:

$$P(\overline{A}) = P_4(0) = C_4^0 p^0 q^{4-0} = 1 \cdot 1 \cdot (0.1)^4 = 0.0001$$

$$\Rightarrow \quad P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0.0001 = 0.9999$$

в) Путь B – из 4 посеянных семян взошли не мене 3, т.е. взошли или 3 или 4. Тогда по теореме сложения вероятностей несовместных событий и формуле Бернулли найдем:

$$P_4(4) = C_4^4 p^4 q^{4-4} = 1 \cdot (0.9)^4 \cdot 1 = 0.6561 \Rightarrow$$

$$P(B) = P_4(3) + P_4(4) = 0.2916 + 0.6561 = 0.9477$$

11 класс*

Приближенные вычисления в схеме Бернулли

Функция Гаусса (нечетная) $$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Функция Лапласа (четная) $$\Phi(x)=\int_0^x \varphi(t)dt$$ При $x>5$ $\Phi(x)=0.5$

При большом числе испытаний и при выполнении условия $npq \geq 10$ применяются приближенные формулы:

$$P_n(m)\approx\frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}},\quad x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}$$

$$P_n(m_1\leq m<m_2)\approx\Phi(x_2)-\Phi(x_1)$$

$$x_1=\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}},\quad x_2=\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}$$

11 класс*

Пример 11.6. Вероятность рождения мальчика равна 0.515. Найти вероятность того, что

1) среди 200 новорожденных детей будет ровно 95 девочек;

2) среди 1000 новорожденных детей мальчиков будет от 455 до 545;

3) не менее 545.

Решение.

1) По условию n=200, вероятность рождения одного мальчика q=0.515, а так как требуется определить вероятность рождения m=95 девочек, то вероятность рождения одной девочки $p=1-q=0.485$. Так как n достаточно велико, то находим npq $=200\cdot 0.485\cdot 0.515$ $=49.955\geq 10$, поэтому можно использовать приближенные формулы.

11 класс*

Находим сначала аргумент

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{95 - 97}{\sqrt{49.955}} \approx \frac{-2}{7.07} \approx -0.28$$

По таблицам находим (отбросив знак с учетом четности):

$\phi(0.28)=0.38.$

Вычисляем вероятность по первой приближенной формуле:

$$P_n(m) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}} = \frac{0.38}{7.07} \approx 0.054$$

11 класс*

2) По условию n=1000, вероятность рождения одного мальчика p=0.515, то вероятность рождения одной девочки $q=1-p=0.485$. Очевидно, что условие применимости приближенных формул выполнено для большего n и тех же вероятностей. Находим сначала аргументы

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{455-515}{15.8} \approx -3.79,\ x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{545-515}{15.8} \approx 1.89$$

По таблицам находим (с учетом нечетности):

$$\Phi(1{,}89) \approx 0.47,\ \Phi(-3{,}79) = -0{,}49.$$

Тогда искомая вероятность:

$$P_{1000}(455 < m < 545) \approx \Phi(1{,}89) - \Phi(-3{,}79) \approx 0.47 + 0.49 = 0.96.$$

11 класс*

3) Обозначения сохраняются из предыдущего задания. Так как по условию максимально возможное число новорожденных детей равно 1000, то событие – среди 1000 новорожденных детей мальчиков будет не менее 545 – равносильно попаданию числа m в интервал (545; 1000). Поэтому можно применить вторую приближенную формулу:

$$P_{1000}(545<m<1000)\approx\Phi(x_3)-\Phi(x_2),$$

где x_2=1,89 было вычислено равнее, а x_3=(1000–515)/15,8=30,6. По свойству функции Лапласа при x_3=30,6>5 полагаем Ф(30,6) ≈0,5. Значит искомая вероятность:

$$P_{1000}(545<m<1000)\approx 0.5-0.47=0.03$$

ГИА 2012

Кодификатор элементов содержания по МАТЕМАТИКЕ для составления контрольных измерительных материалов ГИА выпускников IX классов ОУ 2012 г. содержит следующие темы по комбинаторике, статистике и теории вероятностей:

8	**Статистика и теория вероятностей**
8.1	*Описательная статистика*
8.1.1	Представление данных в виде таблиц, диаграмм, графиков
8.1.2	Среднее результатов измерений
8.2	*Вероятность*
8.2.1	Частота события, вероятность
8.2.2	Равновозможные события и подсчет их вероятности
8.2.3	Представление о геометрической вероятности
8.3	*Комбинаторика*
8.3.1	Решение комбинаторных задач: перебор вариантов, комбинаторное правило умножения

Задачи демонстрационного варианта экзаменационной работы для проведения ГИА

11. (2012) На тарелке лежат пирожки, одинаковые на вид: 4 с мясом, 8 с капустой и 3 с вишней. Петя наугад выбирает один пирожок. Найдите вероятность того, что пирожок окажется с вишней.

Решение.

Пусть A – Петя взял пирожок с вышней.

Этому событию благоприятствует 3 элементарных исхода, так как всего было 3 пирожка с вишней из общего числа 4+8+3=15 пирожков.

По классическому определению вероятности находим:

$$P(A)=3/15=1/5=0,2$$

Ответ: 0,2.

Задачи демонстрационного варианта экзаменационной работы для проведения ГИА

17. (2011) На 1000 электрических лампочек в среднем приходится 5 бракованных. Какова вероятность купить исправную лампочку?

Решение.

Пусть A – купить исправную лампочку.

Этому событию благоприятствует $1000-5=995$ элементарных исходов, так как из 1000 лампочек в среднем 5 бракованных.

По классическому определению вероятности находим:

$$P(A)=995/1000=0{,}995$$

Ответ: 0,995.

Задачи демонстрационного варианта экзаменационной работы для проведения ГИА

18. (2011) Записан рост (в сантиметрах) 5 учащихся: 158, 166, 134, 130, 132. На сколько среднее арифметическое этого набора чисел отличается от его медианы?

Решение.

Сначала следует упорядочить в порядке неубывания данный набор чисел: 130, 132, 134, 158, 166.

Теперь видно, что медиана равна 134.

Находим среднее арифметическое:

$$\frac{130+132+134+158+166}{5}=\frac{720}{5}=144$$

Разность меду средним арифметическим и медианой:

144 −134=10.

Ответ: 10 см.

ЕГЭ 2012

Кодификатор элементов содержания по МАТЕМАТИКЕ для составления контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена 2012 г. содержит следующие темы по комбинаторике, статистике и теории вероятностей:

6	**Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей**
6.1	*Элементы комбинаторики*
6.1.1	Поочередный и одновременный выбор
6.1.2	Формулы числа сочетаний и перестановок. Бином Ньютона
6.2	*Элементы статистики*
6.2.1	Табличное и графическое представление данных
6.2.2	Числовые характеристики рядов данных
6.3	*Элементы теории вероятностей*
6.3.1	Вероятности событий
6.3.2	Примеры использования вероятностей и статистики при решении прикладных задач

ЕГЭ 2012

Кодификатор требований к уровню подготовки выпускников по МАТЕМАТИКЕ для составления контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена 2012 г. содержит следующие требования по комбинаторике, статистике и теории вероятностей:

6	**Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни**
6.1	Анализировать реальные числовые данные; осуществлять практические расчеты по формулам, пользоваться оценкой и прикидкой при практических расчетах
6.2	Описывать с помощью функций различные реальные зависимости между величинами и интерпретировать их графики; извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках
6.3	Решать прикладные задачи, в том числе социально-экономического характера, на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение скорости и ускорения

ЕГЭ 2012

Спецификация контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена 2012 г. по МАТЕМАТИКЕ содержит следующее распределение заданий экзаменационной работы по проверяемым умениям и видам деятельности (по комбинаторике, статистике и теории вероятностей):

Содержательные блоки по кодификатору КЭС	Число заданий	Максимальный первичный балл	Процент максимального первичного балла за задания данного блока содержания от максимального первичного балла за всю работу, равного 32
Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей	1	1	3,1%

ЕГЭ 2012

Обобщенный план контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена 2010 г. по МАТЕМАТИКЕ (по комбинаторике, статистике и теории вероятностей):

Обозначения в работе	Коды проверяемых элементов содержания (по КЭС)	Уровень сложности задания	Макс. балл за выполнение задания	Примерное время выполнения задания, учащимся, изучавшим математику на базовом уровне	Примерное время выполнения задания, учащимся, изучавшим математику на профильном уровне
В10	**6.3**	**Б**	**1**	**10**	**3**

Задачи демонстрационного варианта контрольных измерительных материалов 2012

B10. В сборнике билетов по биологии всего 25 билетов, в двух из которых встречается вопрос о грибах. На экзамене школьнику достается случайно выбранный билет. Найдите вероятность того, что в этом билете не будет вопроса о грибах.

Решение.

Пусть A – случайный выбор билета, в котором нет вопроса о грибах.

Этому событию благоприятствует 23 элементарных исхода, так как из общего их числа (25 билетов) в двух содержатся вопрос о грибах.

По классическому определению вероятности находим:

$$P(A)=23/25$$

Ответ: 23/25

Задачи демонстрационного варианта контрольных измерительных материалов 2010-2011

В1. Билет на автобус стоит 15 рублей. Какое максимальное число билетов можно будет купить на 100 рублей после повышения цены билета на 20%?

Решение.

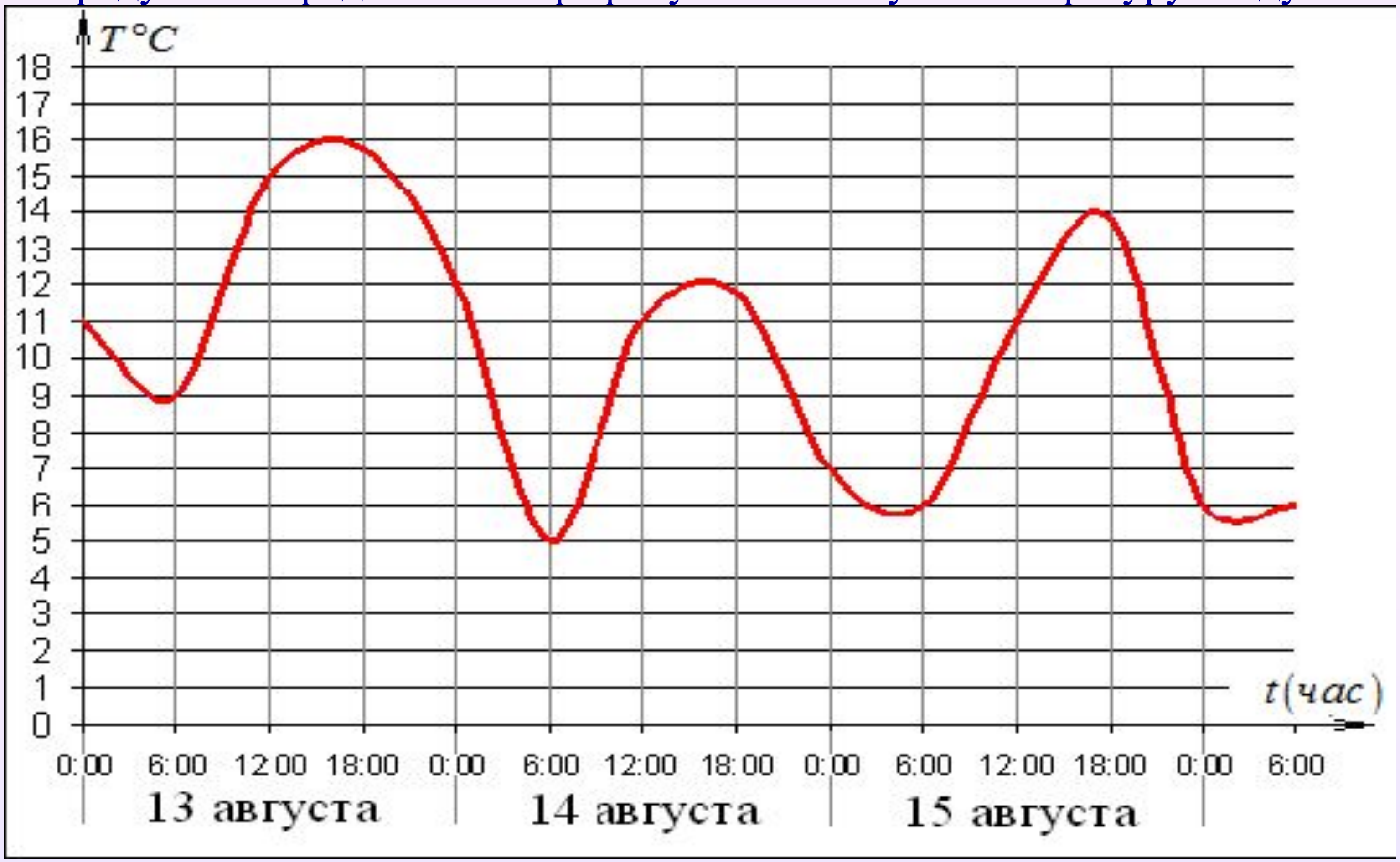
Определяем абсолютную величину повышения стоимости в рублях: 15 руб. · 20% / 100% = 3 руб. Тогда новая цена билета 15 + 3 =18 руб.

Так как 100 / 18 ≈ 5.56, то на 100 руб. можно купить не более 5 билетов

Ответ: 5.

Задачи демонстрационного варианта контрольных измерительных материалов 2010-2011

B2. На графике показано изменение температуры воздуха на протяжении трех суток. На оси абсцисс отмечается время суток в часах, на оси ординат – значение температуры в градусах. Определите по графику наибольшую температуру воздуха 15 августа.



Ответ: 14.

Задачи демонстрационного варианта контрольных измерительных материалов 2010-2011

В5. Строительная фирма планирует купить 70 пеноблоков у одного из трех поставщиков. Цены и условия доставки приведены в таблице. Сколько рублей нужно заплатить за самую дешевую покупку с доставкой?

Поставщик	Стоимость пеноблоков (руб. за 1 $м^3$)	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия доставки
1	2600	10000	
2	2800	8000	При заказе товара на сумму свыше 150000 рублей доставка бесплатная.
3	2700	8000	При заказе товара на сумму свыше 200000 рублей доставка бесплатная.

Задачи демонстрационного варианта контрольных измерительных материалов 2010-2011

Решение.

Стоимости 70 пеноблоков от поставщиков соответственно:

- без поставки: 1 – 182000; 2 – 196000; 3 – 189000;
- с поставкой: 1 – 192000; 2 – 196000; 3 – 197000;

Здесь учтено из дополнительного условия, что от второго поставщика доставка бесплатная.

Ответ: 192000.

Задачи демонстрационного варианта контрольных измерительных материалов 2010-2011

B10. Камень брошен вертикально вверх. Пока камень не упал, высота, на которой он находится, описывается формулой $h(t) = -5t^2 + 18t$ (h – высота в метрах, t – время в секундах, прошедшее с момента броска). Найдите, сколько секунд камень находился на высоте не менее 9 метров.

Решение.

Составляем уравнение $9 = -5t^2 + 18t$ и находим его корни: t_1=0.6 *с* (это момент времени на высоте 9 *м* при полете вверх) и t_2=3 *с* (это момент времени на высоте 9 *м* при падении вниз). Искомое время нахождения на высоте не менее 9 *м* представляет собой разность $t_2 - t_1 = 3 - 0.6 = 2.4$ *с*.

Ответ: 2.4

Спасибо за внимание!