Математика

10 «А» класс

Обобщение и систематизация знаний по теме:

«Координатно-векторный метод решения стереометрических задач»

учитель: Королева Е.В.

Векторы и угол между ними

1. Координаты точки $M(x_M; y_M; z_M)$ $N(x_N; y_N; z_N)$
2. Координаты вектора

$$\overrightarrow{MN}\{x_N - x_M; y_N - y_M; z_N - z_M\} \qquad \vec{a}\{x_a; y_a; z_a\}$$

3. Длина вектора

$$|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2 + (z_N - z_M)^2}, \; |\overrightarrow{a}| = \sqrt{x_a{}^2 + y_a{}^2 + z_a{}^2}$$

4. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$$ где α – угол между векторами

5. Скалярное произведение в координатах

$$\vec{a}\vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$$

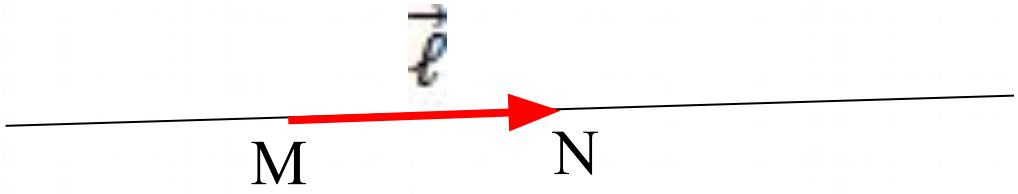
6. **Угол** между векторами

$$\cos\alpha = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a{}^2 + y_a{}^2 + z_a{}^2}\sqrt{x_b{}^2 + y_b{}^2 + z_b{}^2}}$$

Т.о. зная координаты точек можно найти координаты векторов и пользуясь формулой (п.6) косинус угла между этими векторами.

Пряма

Через любые две точки проходит прямая и притом только одна.



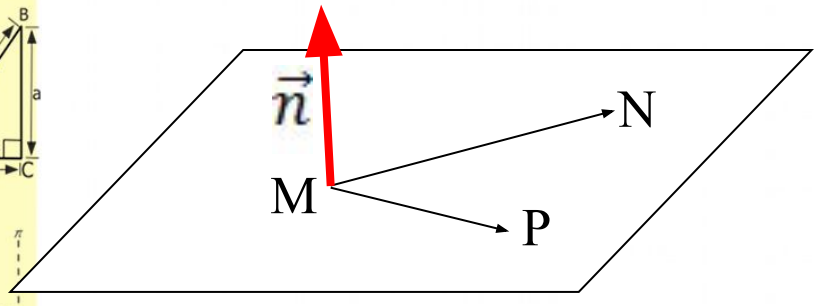
$\vec{\ell}$ - направляющий вектор прямой MN.

Уравнение прямой MN:

$$\frac{x-x_M}{x_N-x_M}=\frac{y-y_M}{y_N-y_M}=\frac{z-z_M}{z_N-z_M}$$

Плоскость

Через любые три точки проходит плоскость и притом только одна.



$\vec{n}$ – вектор нормали плоскости – это вектор перпендикулярный этой плоскости

$\vec{n} \perp \overrightarrow{MN}$ и $\vec{n} \perp \overrightarrow{MP}$

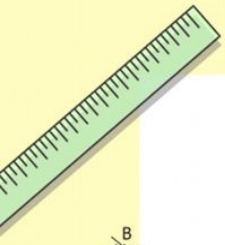
Уравнение плоскости: $Ax + By + Cz + D = 0$

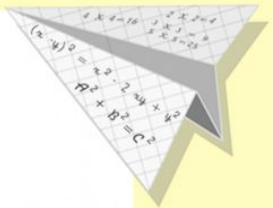
где A, B, C – координаты вектора нормали плоскости, т.е. $\vec{n}\{A, B, C\}$

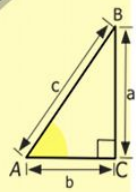
* Если плоскость проходит через начало координат, то **D = 0**, если нет, то **D = 1**.

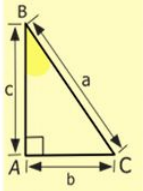
Чтобы найти координаты вектора нормали (составить уравнение плоскости(MNP)) надо подставить координаты точек M, N, и P и решить систему из трех уравнений с тремя неизвестными A, B, C.

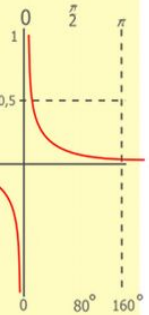
Плоскость



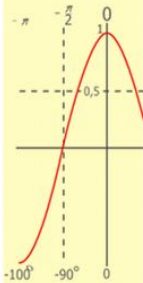








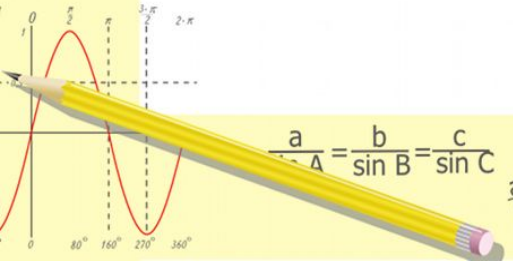
y = 1 / x



y = co

$$\begin{array}{r} 25\,00 \\ \times\ 42 \\ \hline 210 \\ +\ 84 \\ \hline 105\,00 \end{array}$$

2 x 2 = 4
3 x 3 = 9
4 x 4 = 16
5 x 5 = 25
6 x 6 = 36
7 x 7 = 49
8 x 8 = 64
9 x 9 = 81



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

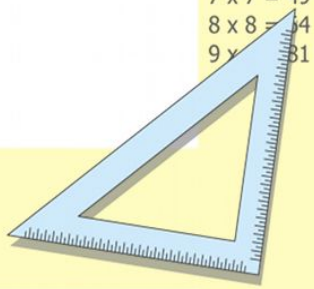
$\sin 90° = 1$

$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$x = 70$

$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$



I. Углы

$$\cos\alpha = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}\sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}$$

1. Угол между прямыми – это угол между их направляющими векторами $(\cos\alpha)$

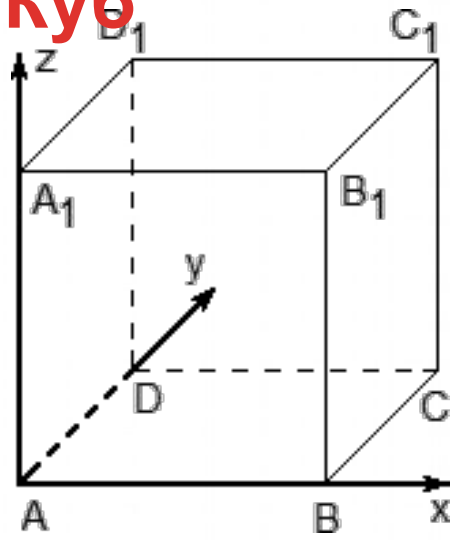
2. Угол между плоскостями – это угол между их нормалями $(\cos\alpha)$

3. Угол между прямой и плоскостью – это угол, равный разности 90°–угол между их направляющим вектором и нормалью $(\sin\alpha)$!!!

Введение системы координат

В задачах типа С2 никаких координат и векторов нет. Поэтому их придется вводить самостоятельно.

1. Куб



Стандартное введение системы координат для куба показано на рис.

Теперь у каждой вершины куба есть координаты.

Выпишем их:

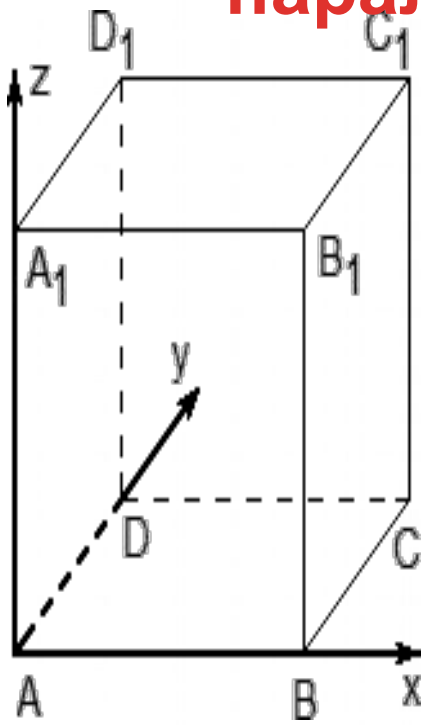
A(0; 0; 0) B(1; 0; 0) C(1; 1; 0) D(0; 1; 0)

$A_1(0; 0; 1)$ $B_1(1; 0; 1)$ $C_1(1; 1; 1)$ $D_1(0; 1; 1)$

Заметим, что координаты точек верхней плоскости отличаются от соответствующих координат точек нижней плоскости только координатой z.

Введение системы координат

2. Прямоугольный параллелепипед



Обозначим $AB = a$, $AD = b$, $AA_1 = c$.

Выпишем координаты точек:

$A(0; 0; 0)$ $B(a; 0; 0)$ $C(a; b; 0)$ $D(0; b; 0)$

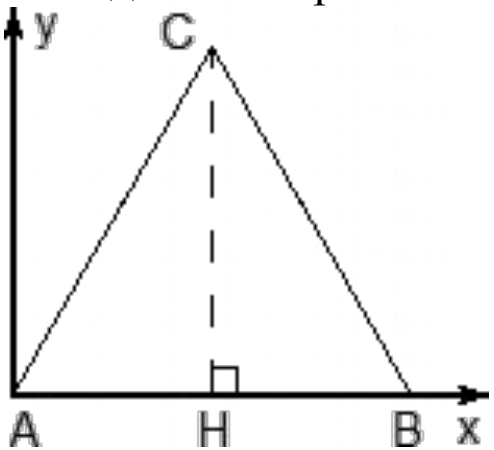
$A_1(0; 0; c)$ $B_1(a; 0; c)$ $C_1(a; b; c)$ $D_1(0; b; c)$

Введение системы координат

3. Правильная треугольная призма

Вводим систему координат:

1. Начало координат — в точке A;
2. Сторону призмы принимаем за единичный отрезок, если иное не указано в условии задачи;
3. Ось x направляем по ребру AB, z — по ребру AA_1, а ось y расположим так, чтобы плоскость OXY совпадала с плоскостью основания ABC. ГЛАВНОЕ учесть, что ось y НЕ совпадает с ребром AC, т.к. треугольник ABC — равносторонний, в нем все углы по 60°. А углы между осями координат должны быть по 90°, поэтому вид сверху будет выглядеть так: рис.1.



Проведем в этом треугольнике высоту CH. Треугольник ACH — прямоугольный, причем AC = 1, поэтому

$AH = 1 \cdot \cos A = \cos 60°$;

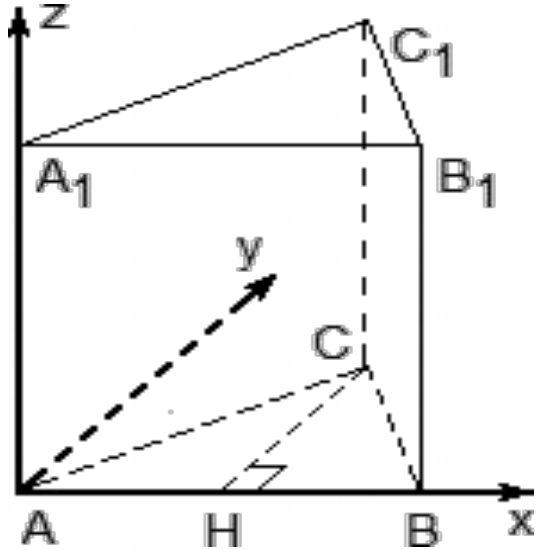
$CH = 1 \cdot \sin A = \sin 60°$.

Это надо для вычисления координат точки C.

Введение системы координат

3. Правильная треугольная призма

Теперь рассмотрим вопрос задачу вместе с построенной системой координат рис.2:



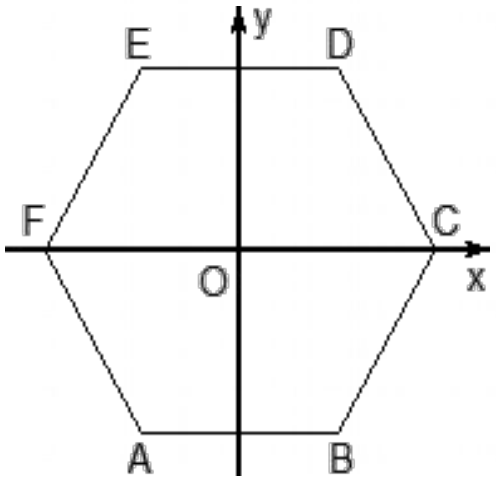
Получаем следующие координаты точек:

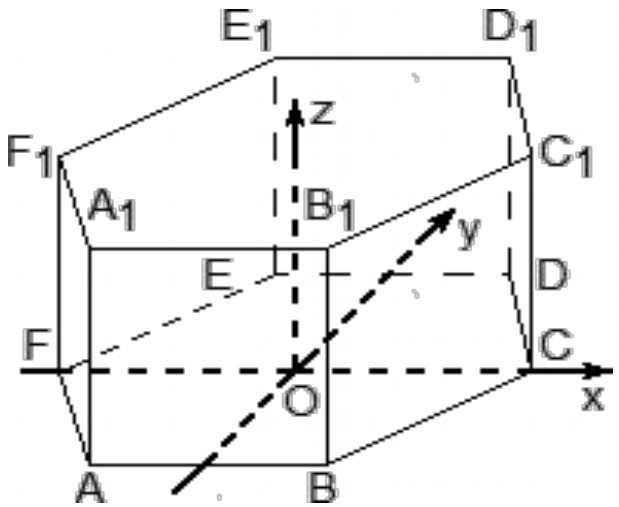
A	B	C	A_1	B_1	C_1
$(0;0;0)$	$(1;0;0)$	$\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$	$(0;0;1)$	$(1;0;1)$	$\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$

Введение системы координат

4. Правильная треугольная призма

Введем систему координат как показано на рис.
Пусть все ребра равны 1.





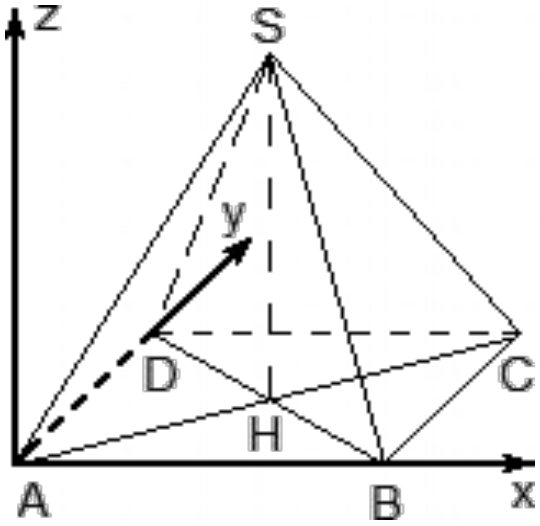
A	B	C	D	E	F
$\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$	$\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$	(1;0;0)	$\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$	$\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$	(- 1; 0; 0)

A_1	B_1	C_1	D_1	E_1	F_1
$\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$	$\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$	(1; 0;1)	$\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$	$\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$	(–1;0; 1)

Введение системы координат

5. Правильная четырехугольная пирамида

Обозначим ее SABCD, где S — вершина. Введем систему координат.



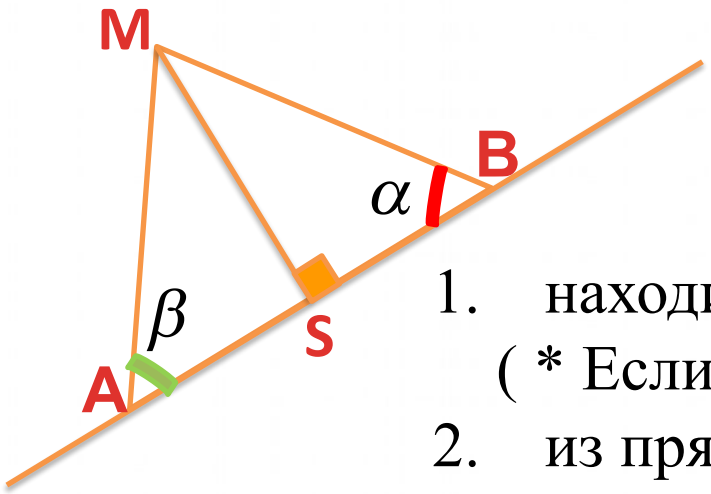
Рассмотрим плоскость OXY.
В основании лежит квадрат, его координаты известны.
Найдем координаты точки S.
Т.к. SH — высота к плоскости OXY, точки S и H отличаются лишь координатой z.
Длина отрезка SH — это и есть координата z для точки S, координаты точки H = (0,5; 0,5; 0).

Заметим, что треугольники ABC и ASC равны по трем сторонам (AS = CS = AB = CB = 1, а сторона AC — общая). Следовательно, SH = BH. Но BH — половина диагонали квадрата ABCD, т.е. $BH = AB \cdot \sin 45°$. Т.о. получаем координаты всех точек:

A	B	C	D	S
(0;0;0)	(1;0;0)	(1;1;0)	(0;1;0)	$\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

II. Расстояния

1. Расстояние от точки до прямой



MS – ?

1. находим cosα

(* Если он «-», то находим cos β)

2. из прямоугольного ΔMBS

(* или ΔMAS) находим MS

$$\sin\alpha = \frac{MS}{MB} \Rightarrow MS = BM \cdot \sin\alpha$$

II. Расстояния

2. Расстояние от точки до плоскости

вычисляется по формуле:

$$\rho(M,\alpha)=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

где – $M(x_0, y_0, z_0)$

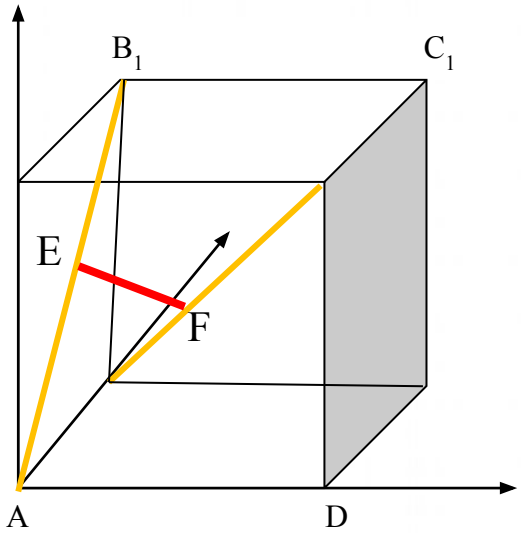
α: $Ax+By+Cz+D=0$

II. Расстояния

3. Расстояние между скрещивающимися прямыми

Рассмотрим его нахождение на примере: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – единичный куб.

Найдём расстояние между скрещивающимися прямыми BD_1 и AB_1.



$A(0; 0; 0)$ $B_1(0; 1; 1)$ $B(0; 1; 0)$ $D_1(1; 0; 1)$

$\overrightarrow{BD_1}\{1; -1; 1\}$ $\overrightarrow{AB_1}\{0; 1; 1\}$

Обозначим EF их общий перпендикуляр и

$$\frac{AE}{B_1E} = m \qquad \frac{BF}{D_1F} = n$$

И для определения его координат воспользуемся формулой для нахождения координат точки делящей отрезок в заданном отношении.

$$x_E = \frac{x_A + m \cdot x_{B_1}}{1 + m} \qquad x_F = \frac{x_B + n \cdot x_{D_1}}{1 + n}$$

y_E, z_E и y_F, z_F – аналогично

(Продолжение) Расстояние между скрещивающимися прямыми

Получаем $E\left(0;\ \frac{m}{1+m};\ \frac{m}{1+m}\right)$ $F\left(\frac{n}{1+n};\ \frac{1}{1+n};\ \frac{n}{1+n}\right)$

Делаем замену $\frac{m}{1+m} = p\,,\quad \frac{n}{1+n} = q \Rightarrow \frac{1}{1+n} = 1 - q$

Получаем E(0; p; p) F(q; 1-q; q)

$$\Rightarrow \overrightarrow{EF}\{q; 1-q-p; q-p\}$$

Т.к. $\overrightarrow{EF} \perp \overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{EF} \perp \overrightarrow{BD_1}$

то их скалярное произведение равно нулю.

Решив систему

$$\begin{cases} \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{AB_1} = 0 \\ \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BD_1} = 0 \end{cases}$$

получаем $p = \frac{1}{2}$ $q = \frac{1}{3}$

Следовательно $\overrightarrow{EF}\left\{\frac{1}{3};\ \frac{1}{6};\ -\frac{1}{6}\right\} \Rightarrow \left|\overrightarrow{EF}\right| = \frac{1}{\sqrt{6}}$