Теорема Пифагора

и различные способы

её доказательства.

Содержание:

1. Место теоремы в курсе геометрии
2. Историческая справка
3. Классическая формулировка теоремы Пифагора
4. Теорема Пифагора и её доказательства
5. Проблемы, возникавшие при доказательстве классической формулировки теоремы Пифагора

Место теоремы в курсе геометрии.

Теорема Пифагора является одной из важнейших теорем планиметрии. Она позволяет значительно расширить круг задач, решаемых в курсе геометрии. На ней в значительной мере базируется дальнейшее изложение теоретического курса.

Историческая справка.

Пифагор(580 - 500 гг. до н.э.) - один из величайших учёных Греции, а теорема Пифагора - одна из самых красивых в геометрии. Имеется более 500 различных её доказательств. Простейшим случаем теоремы Пифагора для треугольника со сторонами 3, 4 и 5 был известен до Пифагора египетским жрецам, а ещё ранее - китайским учёным (около 11000 лет до н. э.). Пифагор, долго живший в Египте, специально изучал науку египетских жрецов и ознакомился с тем, как они строили на земле прямой угол при

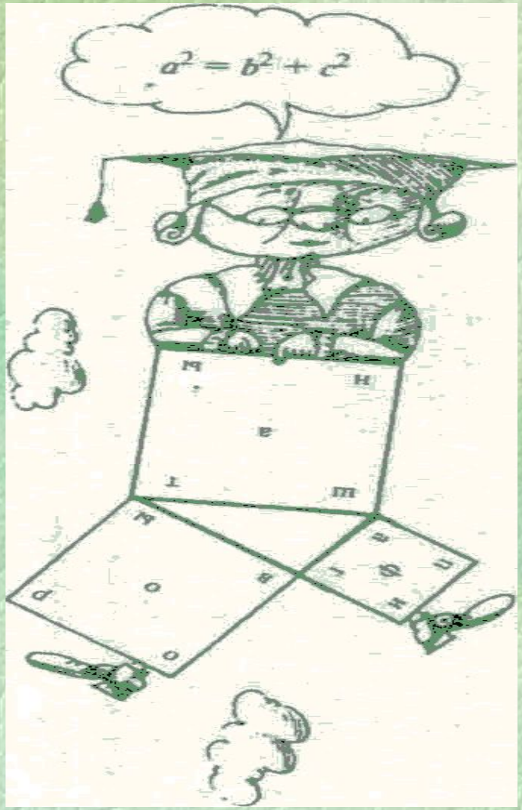
помощи верёвочного треугольника со сторонами 3, 4 и 5 единиц. Пифагор обратил внимание на то, что между числами 3, 4 и 5 имеет место соотношение $3^2+4^2=5^2$ и доказал, что такое соотношение имеет место для любого прямоугольного треугольника. Целые числа, представляющие длины сторон прямоугольного треугольник, носят название пифагорейских чисел. Теорема Пифагора устанавливает замечательное соотношение между гипотенузой и катетами прямоугольного треугольника.

Хотя теорема и связана с именем Пифагора, она была известна задолго до него. В вавилонских текстах эта теорема встречается за 1200 лет до на Пифагора. Возможно тогда ещё не знали её доказательства, а само соотношение между катетами и гипотенузой было установлено опытным путём. Пифагор, по видимому, нашел доказательство этого соотношения.
Сохранилось древнее предание, что в честь своего открытия Пифагор принёс жертву богам быка, по другим свидетельствам - даже сто быков.
Многие известные мыслители и писатели прошлого обращались к этой теореме и посвятили ей свои строки.
Мы с вами познакомимся с различными доказательствами этой теоремы и с её формулировкой.

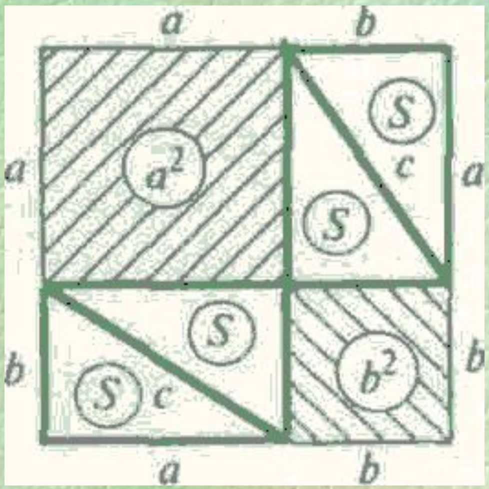
Классическая формулировка теоремы Пифагора.

Теорема Пифагора:

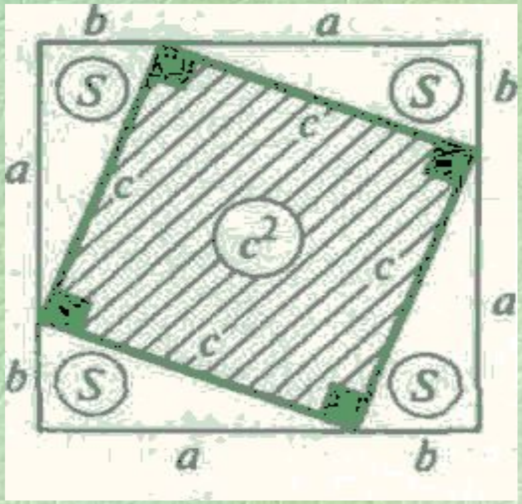
Сумма площадей квадратов, построенных на катетах прямоугольного треугольника, равна площади квадрата, построенного на его гипотенузе.



Именно так или почти так выглядела изначальная, классическая формулировка теоремы. Картинка, иллюстрирующая теорему Пифагора, была ранее своеобразным символом геометрии, а в среде российских гимназистов получила название « Пифагоровы штаны». Саму теорему они переиначивали так: « Пифагоровы штаны на все стороны равны». И в этой шуточной формулировке запоминали её на всю жизнь. Приведём одно из многочисленных геометрических доказательств теоремы Пифагора. Оно отличается от доказательства самого Пифагора, но широко известно и даже встречается в художественной литературе. Впрочем, по сути, и доказательства как такового нет.



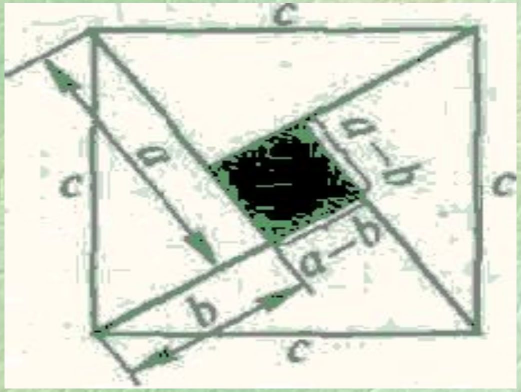
Всё сводится к «предъявлению» двух картинок, посмотрев на которые вы без труда убедитесь, что теорема Пифагора доказана!



$4S+a^2+b^2=$

$=4S+c^2$

Также известно старинное индийское доказательство Теоремы Пифагора. Его можно найти в сочинении Бхаскары (индийский математик, живший в 12 в.). Оно сопровождается одним словом «Смотри».



$c^2=(a-в)^2-2ав$

Теорема Пифагора и её доказательства.

Теорема Пифагора:

Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Способ доказательства опирается на:

- Площади фигур
- Подобие треугольников
- Соотношения в прямоугольном треугольнике

Доказательство 1 теоремы Пифагора

Теорема Пифагора:

Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов

Для этого необходимо знать:

1. Элементы прямоугольного треугольника
2. Формулу площади квадрата
3. Формулу площади прямоугольного треугольника

Если вы этого не знаете, то

Доказательство теорема Пифагора:

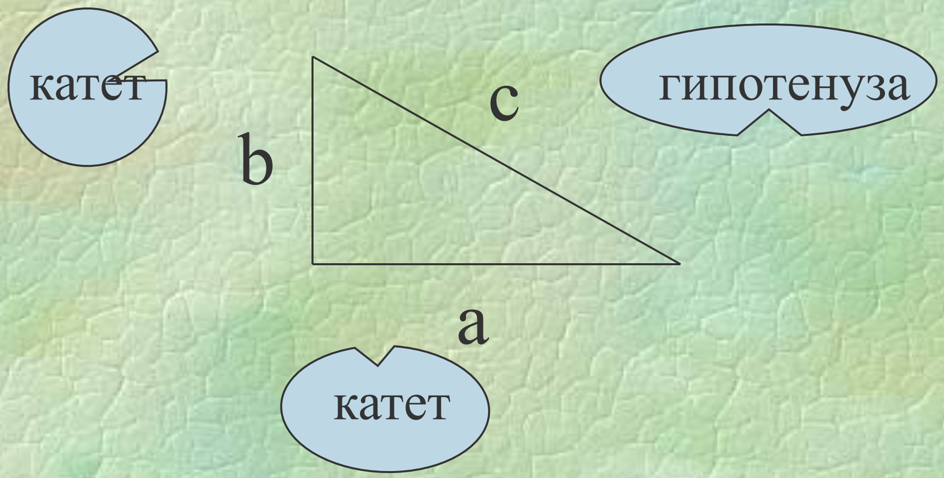
Необходимые знания:

1. Прямоугольный треугольник - это треугольник, имеющий прямой угол.

Элементы прямоугольного треугольника:

-гипотенуза - сторона, лежащая напротив прямого угла;

-катеты - стороны, заключающие прямой угол.

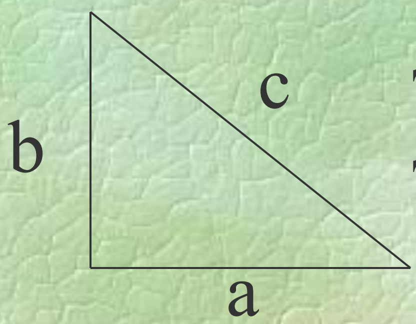


2. $S_{кв}=a^2$, где a - сторона квадрата.

3. $S_{пр.\ тр.}=1/2ab$, где a, b - катеты прямоугольного треугольника.

Доказательство 1.

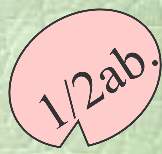
Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами a, b и гипотенузой c.



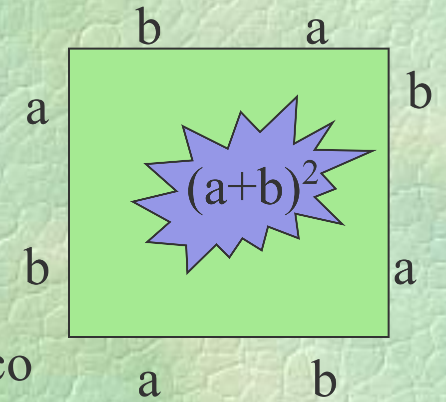
Докажем, что $c^2=a^2+b^2$.

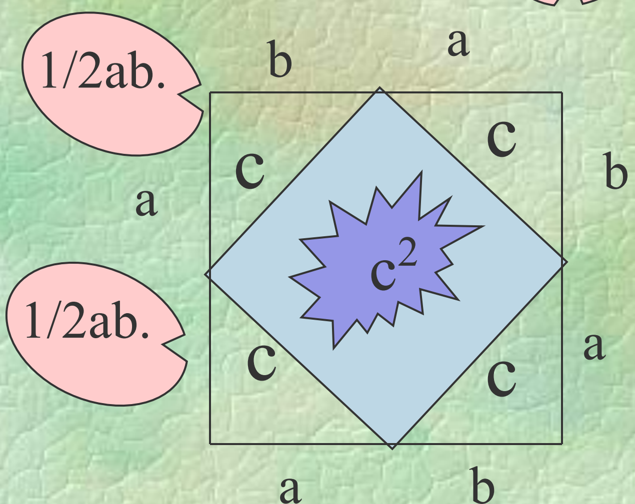
Для этого достроим треугольник до квадрата со стороной a+b

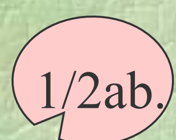
Площадь квадрата со стороной a+b равна $(a+b)^2$



С другой стороны наш квадрат составлен из 4 равных прямоугольных треугольников, площадь которых равна 1/2ab.







А также из квадрата со стороной c и его площадь есть c^2.

Поэтому $S=4 *1/2ab + c^2 = 2bc + c^2$.

Таким образом, $(a+b)^2 =2ab+ c^2$.

Откуда $c^2 = a^2 + b^2$.

Доказательство 2 теоремы Пифагора.

Теорема Пифагора:

Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов

Для этого необходимо знать:

1. Элементы прямоугольного треугольника

2. Определение подобных треугольников

3. Первый признак подобия треугольников

4. Определение высоты

Если вы этого не знаете, то

Доказательство теорема Пифагора:

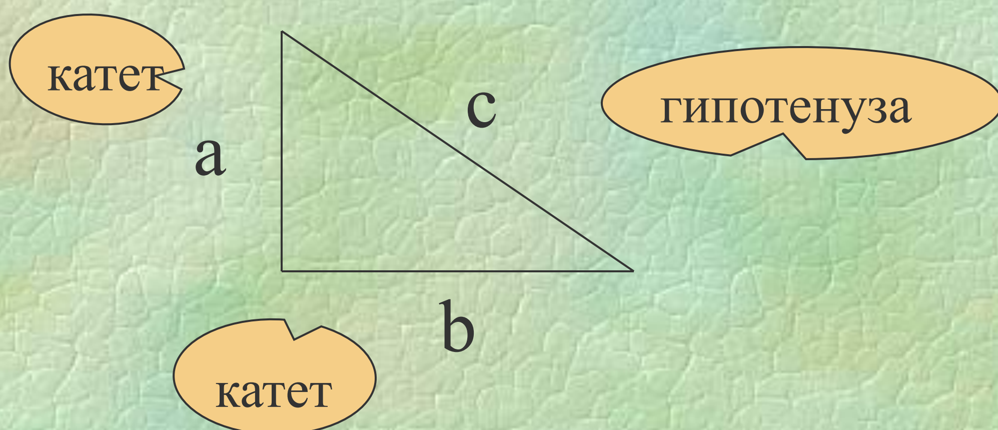
Необходимые знания:

1. Прямоугольный треугольник - это треугольник, имеющий прямой угол.

Элементы прямоугольного треугольника:

-гипотенуза - сторона, лежащая напротив прямого угла;

-катеты - стороны, заключающие прямой угол.



2. Два треугольника называются подобными, если углы одного соответственно равны углам другого и соответствующие стороны пропорциональны.

Таким образом, треугольник ABC подобен треугольнику $A_1B_1C_1$, если

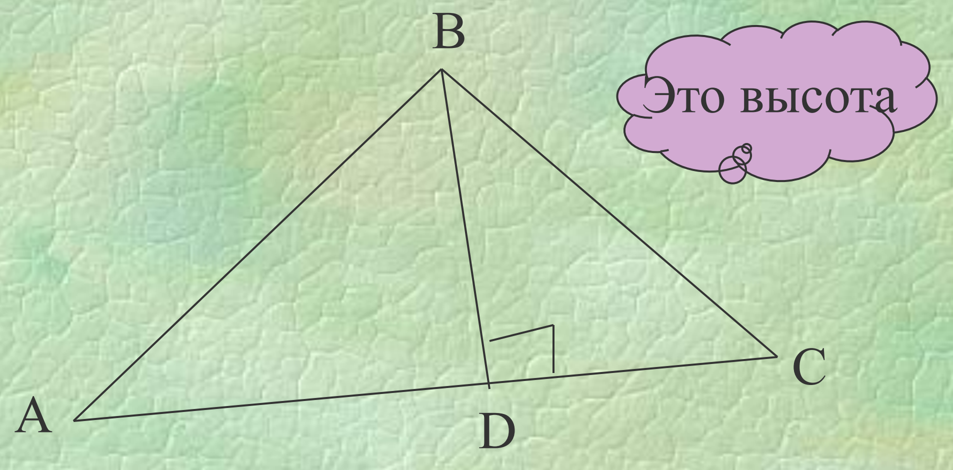
$$\angle A = \angle A_1, \angle \text{B} = \angle \text{B}_1, \angle C = \angle C_1$$

$$\text{и } \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$

3. Первый признак подобия треугольников:

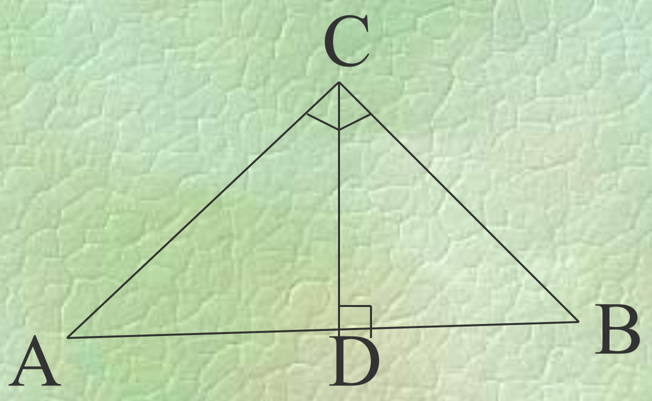
Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

4. Высота треугольника - это отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны или её продолжением и перпендикулярный этой стороне.



Доказательство 2.

Пусть ABC - прямоугольный треугольник с прямым углом C.



Проведём высоту CD из вершины прямого угла.

Треугольники ABC и ACD подобны по первому признаку.

$$\angle ACD = \angle ABC; \angle ABC = \angle BDC = 90^\circ$$

Следовательно, $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AC}{AB}$

Отсюда $AB \cdot AD = AC^2$

Аналогично треугольники ABC и CBD подобны по первому признаку.

Следовательно, $\dfrac{BD}{BC} = \dfrac{BC}{AB}$

Отсюда $AB \cdot BD = BC^2$

Сложив полученные равенства почленно и замечая, что AD+BD=AB, получим $AC^2 + BC^2 = AB(AD + BD) = AB^2.$

Доказательство 3 теоремы Пифагора.

Теорема Пифагора:

Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов

Для этого необходимо знать:

1. Элементы прямоугольного треугольника

2. Соотношения в прямоугольном треугольнике.

Если вы этого не знаете, то

Доказательство теорема Пифагора:

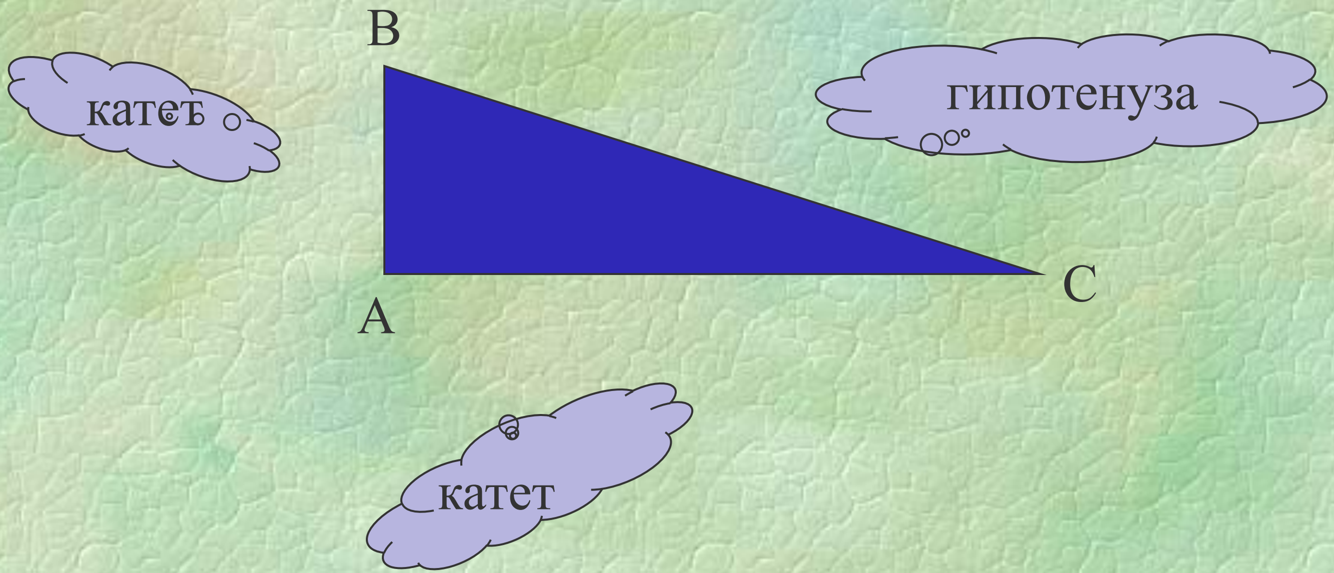
Необходимые знания:

1. Прямоугольный треугольник - это треугольник, имеющий прямой угол.

Элементы прямоугольного треугольника:

-гипотенуза - сторона, лежащая напротив прямого угла;

-катеты - стороны, заключающие прямой угол.



2. Соотношения в прямоугольном треугольнике:

- высота, опущенная на гипотенузу прямоугольного треугольника, есть среднее пропорциональное между отрезками гипотенузы, на которые она разделена этой высотой;

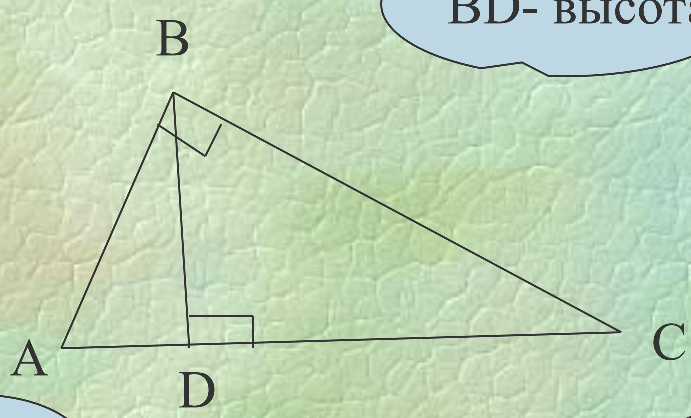
$$BD^2 = AD \cdot DC$$

- катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу;

AB- катет

BD- высота

BC- катет



AD - проекция AB на AC

DC - проекция BC на AC

AC- гипотенуза

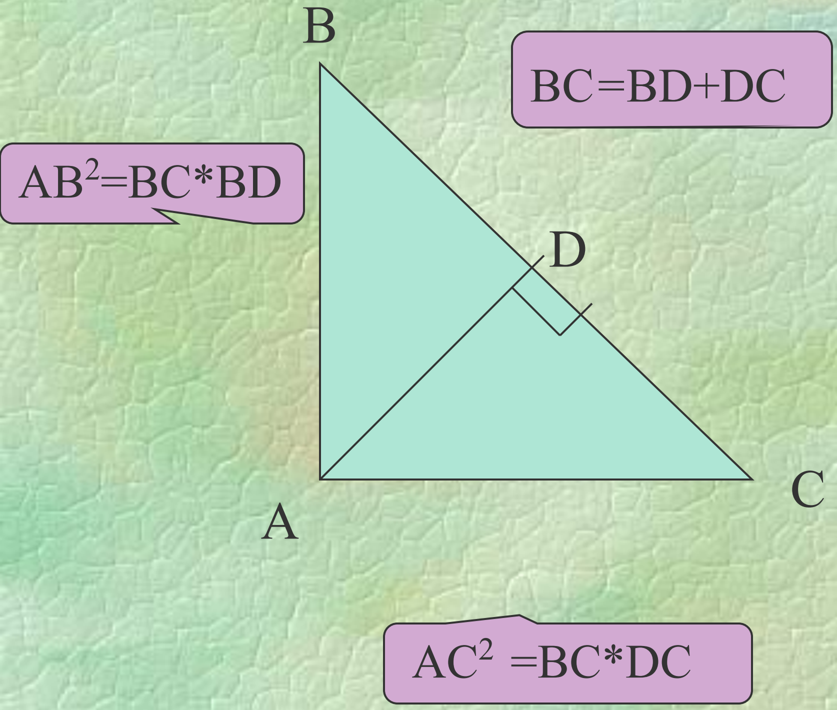
Таким образом,

$AB=AC*AD$

$BC=AC*CD$

Доказательство 3.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC, где AD - высота.



Используя соотношения в прямоугольном треугольнике, докажем, что $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

$AB^2 = BC*BD$

$AC^2 = BC*DC$

Сложим почленно данные равенства

$AB^2 + AC^2 = BC*BD + BC*DC =$

$= BC*(BD+DC) = BC*BC = BC^2$

Таким образом, $AB^2 + AC^2 = BC^2$, и наша теорема доказана.

Проблемы, возникавшие при доказательстве классической формулировки теоремы Пифагора

Необходимо отметить, что по существу, доказательство теоремы Пифагора началось с проведения высоты в прямоугольном треугольнике. Но, до этого ещё нужно было додуматься.

Если же говорить о проблемах, которые возникали при доказательстве теоремы у древних геометров, то объяснялись они отсутствием алгебраического аппарата. Что такое отношение двух отрезков, они вполне чётко понимали. А вот переход от равенства отношений к равенству произведений, который любой современный школьник воспринимает как очевидный, для древних геометров был просто невозможен. Произведение отрезков для них не имело геометрического смысла.

Как вам уже известно, раньше теорема Пифагора формулировалась как равенство площадей. Именно в такой формулировке, сопровождаемая соответствующим доказательством, она становилась истинной теоремой геометрии, одной из её жемчужин.

Было бы не справедливо не отметить важность алгебраической формулировки теоремы Пифагора. Она позволяет при измерении расстояний в каком - то смысле «сойти с прямой», выйти в плоскость и далее в пространство. Об этой важнейшей роли открытой Пифагором теоремы в теории и практике геометрии сам Пифагор мог лишь догадываться.