Алгоритм умножения

2 курс
лекция №3

Определение операции умножения

- Если a,b-целые неотрицательные числа, то произведением $a \cdot b$ называется число, удовлетворяющее следующим условиям:
- 1) $$a \cdot b = \underbrace{a + a + a + a + \ldots + a}_{\text{b раз}}, если b > 1$$
- 2) $$a \cdot b = a, если b = 1$$
- 3) $$a \cdot b = 0, если b = 0$$

Умножение однозначных чисел можно выполнить , основываясь на определении

- При умножении многозначных чисел смысл умножения сохраняется, но меняется техника вычислений.
- При умножении многозначных чисел используют правило умножения многозначного числа на однозначное.

(правило умножения суммы на число)

Например :

- $428 \cdot 3=(400+20+8) \cdot 3=$
- $=400 \cdot 3+20 \cdot 3+8 \cdot 3=1200+60+24=$
- $=(1000+200)+60+(20+4)=$
- $=1000+200+(60+20)+4=$
- $=1000+200+80+4=$
- $=1284$

- Согласно записи чисел в десятичной системе счисления, 428 = $4\cdot 10^2+2\cdot 10+8$
- 428·3= $(4\cdot 10^2+2\cdot 10+8)\cdot 3$
- = $\left(4\cdot 10^2\right)\cdot 3+\left(2\cdot 10\right)\cdot 3+8\cdot 3$
- = $12\cdot 10^2+6\cdot 10+24$

При умножении 428 на 3 используется ассоциативный закон умножения, дистрибутивный и коммутативный

- Сейчас коэффициенты: 12 и 24 больше 10, поэтому полученный результат не является десятичной записью числа
- Преобразуем полученный результат:
- $$(10+2)\cdot 10^2+6\cdot 10+2\cdot 10+4$$

- На основании ассоциативного, коммутативного законов сложения и дистрибутивного закона умножения относительно сложения, получаем:

$$1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + (6 + 2) \cdot 10 + 4 =$$

$$= 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 4$$

В практике используется запись в столбик

$$
\begin{array}{r}
\times\begin{array}{r} 428 \\ 263 \end{array} \\
\hline
01284 \\
+\,25680 \\
85600 \\
\hline
112564
\end{array}
$$

- Для получения ответа нам пришлось умножать 428 на 3, на 6, на 2.
- Умножая на 3, мы получаем единицы;
- Умножая на 6 (д), мы получаем десятки;
- Умножая на 2 (с), мы получаем сотни.
- Записываем разряд под разрядом.

- Умножение многозначного числа на однозначное основывается на знаниях (фактах):

1. Записи чисел в десятичной системе счисления;
2. Свойствах сложения и умножения;
3. Таблицы сложения и умножения однозначных чисел.

Правило умножения многозначного числа на однозначное в общем виде

Пусть

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + ... + a_1 \cdot 10 + a_0$$

y-однозначное число.

Тогда, имеем

- x·y = $(a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + ... + a_1 \cdot 10 + a_0) \cdot y$

- Применив основные свойства умножения получаем,

$$(a_n \cdot y)10^n + (a_{n-1} \cdot y)10^{n-1} + (a_{n-2} \cdot y)10^{n-2} + ... + (a_1 \cdot y)10 + a_0 \cdot y =$$

Заменим все произведения, $a_k \cdot y$ где $0 \le k \le n$

Если они больше или равны 10

Соответствующими значениями $a_k \cdot y = b_k \cdot 10 + c$

- Получаем:
- x·y= $\left(b_n \cdot 10 + c_n\right) \cdot 10^n + \left(b_{n-1} \cdot 10 + c_{n-1}\right) \cdot 10^{n-1} + \ldots +$

$$+\left(b_1 \cdot 10 + c_1\right) \cdot 10 + \left(b_0 \cdot 10 + c_0\right) =$$

$$= b_n \cdot 10^{n+1} + \left(c_n + b_{n-1}\right) \cdot 10^n + \ldots + \left(c_1 + b_0\right) \cdot 10 + c_0$$

- Суммы $c_k + b_{k-1}$, где $0 \le k \le n$

Заменим ее значением.

И это значение запишем в ответ.

Алгоритм умножения многозначного числа на однозначное

1. Записываем второй множитель под первым;

2. Умножаем цифру разряда единиц числа x на число y. Если произведение меньше 10, его записываем в разряд единиц ответа и переходим к следующему разряду(десятков)

3. Если произведение цифры единиц числа x на число y больше, или равно10, то представляем его в виде $10 \cdot g_1 + c_0$

где c_0 **- есть однозначное число**.

Записываем c_0 в разряд единиц ответа

и запоминаем g_1 -перенос в следующий разряд

4. Умножаем цифру разряда десятков на число у, прибавляем к полученному произведению число g_1

И повторяем процесс, описанный в пункте 2 и 3

5. Процесс умножения заканчивается, когда окажется умноженной цифра старшего разряда.

Замечание:

Умножение числа x на 10^n

Сводится к приписыванию к десятичной записи числа x n нулей справа

Умножение многозначного на многозначное число

- $428 \cdot 263 = 428 \cdot (200+60+3) =$
- $= 428 \cdot 200 + 428 \cdot 60 + 428 \cdot 3 =$
- $= 428 \cdot (2 \cdot 100) + 428 \cdot (6 \cdot 10) + 428 \cdot 3 =$
- $= (428 \cdot 2) \cdot 100 + (428 \cdot 6) \cdot 10 + 428 \cdot 3$

Умножение многозначного на многозначное свелось к умножению многозначного на однозначное число.

Основой выполнения преобразований являются:

- Представление каждого множителя в виде суммы разрядных слагаемых
(запись числа в десятичной системе)
- Правило умножения суммы на число (дистрибутивность умножения относительно сложения)
- Законы сложения
- Умножение круглых чисел

Алгоритм умножения числа $x = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ на число $y = \overline{b_n b_{n-1} \ldots b_1 b_0}$

1. Записываем второе число под первым

2. Умножаем число x на младший разряд b_0 числа y и записываем произведение $x \cdot b_0$ под числом y

3. Умножаем число x на следующий разряд b_1 числа y,

Записываем результат,

но со сдвигом на один разряд влево,

что соответствует умножению $x \cdot b_1$

на 10

4. Продолжаем вычисление произведений до вычисления $x \cdot b_k$

5. Полученные k+1 произведение складываем.

- Спасибо за внимание