Проект по математике

«Уравнение представляет собой наиболее серьёзную и важную вещь в математике».

Лодж О.

тема:

«Квадратные уравнения»

Составил: учитель математики МКОУ «Синелипяговская СОШ»
Нижнедевицкий муниципальный район
Воронежская область
Дедова Татьяна Викторовна

2012 год

КРАТКАЯ АННОТАЦИЯ ПРОЕКТА.

Проект разработан с использованием ИКТ и элементами модульной педагогической технологии. Он может быть проведен с учащимися 8-9 классов. Проект охватывает изучение тем: «Квадратное уравнение и его корни», « Формула корней квадратного уравнения» .

Основная цель - создать такую систему, которая бы обеспечивала бы образовательные потребности каждого ученика в соответствии с его склонностями, интересами и возможностями.

Данный проект формирует понятия квадратного уравнения, умение решать неполные квадратные уравнения, умение применять формулу корней квадратного уравнения. Знакомит учащихся с методом выделения полного квадрата, с формулой корней приведенного квадратного уравнения, формула корней квадратного уравнения со вторым четным коэффициентом., а также рассмотрены некоторые нестандартные приемы решения квадратных уравнений.

При проведении проекта с опорой на формирующее оценивание учитель помогает ученикам в развитии их навыков решению квадратных уравнений разными способами, организует самостоятельные исследования по учебной теме.

План оценивания в ходе проекта направлен на реализацию деятельного подхода в обучении, в центре внимания учебные потребности ребенка, развитие навыков самоуправления обучением, самооценивание, взаимное оценивание.

СОДЕРЖАНИЕ.

Цели:

Изучив этот проект, учащиеся должны:

Знать, **что такое квадратное уравнение, неполное квадратное уравнение, приведенное квадратное уравнение; формулы дискриминанта и корней квадратного уравнения, терему Виета и обратную ей.**

Уметь **решать квадратные уравнения выделением квадрата двучлена, решать квадратные уравнения по формуле, решать неполные квадратные уравнения, решать квадратные уравнения с помощью теоремы, обратной теореме Виета, использовать теорему Виета для нахождения коэффициентов и свободного члена квадратного уравнения.**

Ожидаемые результаты обучения:

После завершения проекта учащиеся смогут:

Решать квадратные уравнения различными способами

Вопросы, направляющие проект

Основополагающий вопрос:

Решение квадратных уравнений.

Проблемные вопросы: ***Какими способами можно решать квадратные уравнения?***

Учебные вопросы:

1. ***Что такое квадратное уравнение?***
2. ***Какие существуют виды квадратных уравнений?***
3. ***Что называется дискриминантом квадратного уравнения?***
4. ***От чего зависит количество корней квадратного уравнения?***
5. ***Каковы формулы для нахождения корней квадратного уравнения?***
6. ***Как формулируется теорема Виета?***

Определение квадратного уравнения, его виды.

Квадратным уравнением называется уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где x- переменная, a,b и c-некоторые числа, причем, $a \neq 0$.

Если в квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю, то такое уравнение называют **неполным квадратным уравнением**. Неполные квадратные уравнения бывают трёх видов:

1) $ax^2 + c = 0$, где $c \neq 0$;

2) $ax^2 + bx = 0$, где $b \neq 0$;

3) $ax^2 = 0$.

Приведённым называют квадратное уравнение, в котором старший коэффициент равен единице. Такое уравнение может быть получено делением всего выражения на старший коэффициент a :

$$x^2 + px + q = 0 \qquad p = \frac{b}{a}, \quad q = \frac{c}{a}.$$

Различные способы решения квадратных уравнений.

1) Разложение левой части уравнения на множители.

Решим уравнение $x^2 + 10x – 24 = 0$.

Разложим левую часть уравнения на множители:

$x^2 + 10x – 24 = x^2 + 12x – 2x – 24 = x (x + 12) – 2 (x +12) = (x + 12)(x – 2)$.

Следовательно, уравнение можно переписать так:

$$(x + 12)(x – 2) = 0.$$

Так как произведение равно нулю, то по крайне мере один из его множителей равен нулю. Поэтому левая часть уравнения обращается в нуль при $x = 2$, а также при $x = - 12$. это означает, что числа 2 и – 12 являются корнями уравнения $x^2 + 10x – 24 = 0$.

2) Метод выделения полного квадрата

Решим уравнение $x^2 + 6x – 7 = 0$
Выделим в левой части полный квадрат. Для этого запишем выражение
$x^2 + 6x$ в следующем виде: $x^2 + 6x = x^2 + 2\cdot x \cdot 3.$
В полученном выражении первое слагаемое – квадрат числа *x*, а второе – удвоенное произведение *x* на 3. поэтому чтобы получить полный квадрат, нужно прибавить 3^2, так как

$$x^2 + 2\cdot x \cdot 3 + 3^2 = (x + 3)^2 .$$

Преобразуем теперь левую часть уравнения

$$x^2 + 6x – 7 = 0,$$

прибавляя к ней и вычитая $3^{2.}$ Имеем:
$x^2 + 6x – 7 = x^2 + 2\cdot x \cdot 3 + 3^2 – 3^2 – 7 = (x + 3)^2 – 9 – 7 = (x + 3)^2 – 16.$
Таким образом, данное уравнение можно записать так:
$(x + 3)^2 –16 = 0$, т.е. $(x + 3)^2 = 16.$
Следовательно, $x = 3 = 4$, $x_1 = 1$, или $x +3 = - 4$, $x_2 = – 7.$

Решение неполных квадратных уравнений.

1. Если $ax^2 = 0$. Уравнения такого вида решаются по алгоритму:

1) найти x^2;

2) найти x.

Например, $5x^2 = 0$. Разделив обе части уравнения на 5 получается:

$x^2 = 0$, откуда $x = 0$.

2. Если $ax^2 + c = 0$, $c \neq 0$ Уравнения данного вида решаются по алгоритму:

1) перенести слагаемые в правую часть;

2) найти все числа, квадраты которых равны числу с.

Например, $x^2 - 5 = 0$, $x^2 = 5$. Следовательно, надо найти все числа, квадраты которых равны числу 5. Таких чисел только два $\sqrt{5}$ и - $\sqrt{5}$

Таким образом, уравнение $x^2 - 5 = 0$ имеет два корня: $x_1 = \sqrt{5}$, $x_2 = -\sqrt{5}$

и других корней не имеет.

3. Если $ax^2 + bx = 0$, $b \neq 0$. Уравнения такого вида решаются по алгоритму:

1) вынести общий множитель за скобки;

2) найти x_1, x_2.

Например, $x^2 - 3x = 0$. Перепишем уравнение $x^2 – 3x = 0$ в виде

$x (x – 3) = 0$. Это уравнение имеет, очевидно, корни $x_1 = 0$, $x_2 = 3$. Других корней оно не имеет, ибо если в него подставить вместо x любое число, отличное от нуля и 3, то в левой части уравнения x

$(x – 3) = 0$ получится число, не равное нулю.

Вывод:

1) если уравнение имеет вид $ax^2 = 0$, то оно имеет один корень x

2) если уравнение имеет вид $ax^2 + bx = 0$, то используется метод разложения на множители: $x(ax + b) = 0$; значит, либо $x = 0$, либо $ax + b = 0$. В итоге получается два корня: $x_1 = 0$; $x_2 = -\frac{b}{a}$;

3) если уравнение имеет вид $ax^2 + c = 0$, то его преобразуют к виду

$ax^2 = -c$ и далее $x^2 = -\frac{c}{a}$ В случае, когда $-\frac{c}{a} < 0$, уравнение $x^2 = -\frac{c}{a}$ не имеет корней (значит, не имеет корней и исходное уравнение $ax^2 + c = 0$).

В случае, когда $-\frac{c}{a} > 0$, т.е.

$-\frac{c}{a} = m$,

где $m > 0$, уравнение $x^2 = m$ имеет два корня

$$x_1 = \sqrt{m} \qquad \chi_2 = -\sqrt{m}$$

Таким образом, неполное квадратное уравнение может иметь два корня, один корень, ни одного корня.

Решение полных квадратных уравнений

$ax^2 + bx + c = 0$, где a,b,c – заданные числа, $a \neq 0$, x – неизвестное.

Рассматриваются следующие случаи решения полных квадратных уравнений: $D < 0$, $D = 0$, $D > 0$.

1. Если $D < 0$, то квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет действительных корней.
Например, $2x^2 + 4x + 7 = 0$.
Решение: здесь $a = 2$, $b = 4$, $c = 7$.
$D = b^2 - 4ac = 4^2 - 4*2*7 = 16 - 56 = -40$.
Так как $D < 0$, то данное квадратное уравнение не имеет корней.

2. Если $D = 0$, то квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет один корень, который находится по формуле $\chi = -\frac{b}{2a}$

Например, $4x - 20x + 25 = 0$. Решение: $a = 4$, $b = -20$, $c = 25$.
$D = b^2 - 4ac = (-20)^2 - 4*4*25 = 400 - 400 = 0$.
Так как $D = 0$, то данное уравнение имеет один корень. Этот корень находится по формуле $\chi = -\frac{b}{2a}$

$$\chi = \frac{20}{2*4} = 2{,}5.$$

3. Если $D > 0$, то квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня, которые находятся по формулам:

$$\chi_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \quad ; \quad \chi_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \qquad (1)$$

Например, $3x^2 + 8x - 11 = 0$. Решение: $a = 3$, $b = 8$, $c = -11$. $D = b^2 - 4ac = 8^2 - 4*3*(-11) = 64 + 132 = 196$.
Так как $D > 0$, то данное квадратное уравнение имеет два корня. Эти корни находятся по рмулам:

$$\chi_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-8+\sqrt{196}}{2*3} = 1; \chi_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-8-\sqrt{196}}{2*3} = -\frac{11}{3}$$

Вывод:

Если D < 0, то квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет корней.

Если D = 0, то квадратное уравнение имеет один корень,

который находится по формуле $\chi = -\frac{b}{2a}$.

Если D > 0, то квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня $\chi_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$; $\chi_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$.

Решение приведенных квадратных уравнений

Теорема Виета. Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

Иначе говоря, если x_1 и x_2 - корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, то

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 x_2 = q. \end{cases}$$

Теорема, обратная теореме Виета. Если для чисел x_1, x_2, p, q справедливы формулы то x_1 и x_2 - корни уравнения $x^2 + px + q = 0$.

а) Если свободный член *q* приведенного квадратного уравнения положителен (*q >0),* то уравнение имеет два одинаковых по знаку корня и это зависит от второго коэффициента *p*.
Если *p>0*, то оба корня отрицательные, если *p<0*, то оба корня положительны.

б) Если свободный член *q* приведенного квадратного уравнения отрицателен (*q < 0),* то уравнение имеет два различных по знаку корня, причем больший по модулю корень будет положителен, если *p<0*, или отрицателен, если *p>0.*

Метод переброски.

Рассмотрим полное квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$; **(1)**
Для его решения мы вначале используем формулу дискриминанта:$D = b^2 - 4ac$ и если $D > 0$, то с помощью формул корней полного квадратного уравнения находим x_1 и x_2:

$$\chi_{1.2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Теперь рассмотрим другое полное приведенное квадратное уравнение
$y^2 + by + ac = 0$. **(2)**

Первый коэффициент у этого уравнения равен **1**, а второй коэффициент равен **b** и совпадает со вторым коэффициентом уравнения **(1)**. Свободный член уравнения **(2)** равен **ac** и получен как произведение первого коэффициента и свободного члена уравнения **(1)** (то есть можно сказать, что **a** «**перебросилось**» к **c**).
Найдем дискриминант и корни квадратного уравнения **(2)**: $D = b^2 - 4ac$, т.о. он полностью совпадает с дискриминантом уравнения **(1)**. Корни уравнения **(2)**: $y_{1,2} = (-b \pm \sqrt{D}) / 2$.

Если теперь корни $x_{1,2}$ сравнить с корнями $y_{1,2}$, то легко видеть, что корни уравнения **(1)** можно получить из корней уравнения **(2)** делением на **a**.
Теперь рассмотрим примеры, в которых очень удобно пользоваться приведенным выше методом «переброски».

Пример 1.
Решить уравнение $6x^2 – 7x – 3 = 0$.
Решение.
Выполним «переброску» и решим новое уравнение с помощью теоремы Виета:
$y^2 – 7y – 3 \cdot 6 = 0$;
$y^2 – 7y – 18 = 0$.
По теореме Виета $y_1 = 9$; $y_2 = -2$.
Теперь вернемся к переменной x. Для этого разделим полученные результаты $y_{1,2}$ на первый коэффициент исходного уравнения, т.е. на 6. Получим:
$x_1 = 9/6$; $x_2 = -2/6$.
После сокращения будем иметь $x_1 = 1,5$; $x_2 = -1/3$.
Ответ: -1/3; 1,5.

Свойства коэффициентов квадратного уравнения.

А. Пусть дано квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$.

1.Если *a + b + c = 0 (т.е. сумма коэффициентов уравнения равна нулю),*
то $x_1 = 1,\ x_2 = \frac{c}{a}$

2. *Если a - b + c = 0, или b = a + c, то* $x_1 = -1,\ x_2 = -\frac{c}{a}$

Решим уравнение $345x^2 - 137x - 208 = 0$.

Решение. Так как a + b + c = 0 (345 – 137 – 208 = 0), то $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{208}{345}$

Ответ: 1; $-\frac{208}{345}$

Решим уравнение $132x^2 + 247x + 115 = 0$

Решение. Т. к. a-b+c = 0 (132 – 247 +115=0), то

$x_1 = -1,\ x_2 = -\frac{115}{132}$

Ответ: - 1; $-\frac{115}{132}$

Б. Если второй коэффициент b = 2k – четное число, то $D = k^2 - ac$ и формулу корней

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ можно записать в виде $x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$

Решим уравнение $3x^2 - 14x + 16 = 0$.

Решение. Имеем: $a = 3$, $b = -14$, $c = 16$, $k = -7$;

$D = k^2 - ac = (-7)^2 - 3 \cdot 16 = 49 - 48 = 1$, $D>0$, два различных корня;

$x = \frac{-k \pm \sqrt{D}}{a} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{3} = \frac{7 \pm 1}{3}; x_1 = 2, x_2 = \frac{8}{3}.$

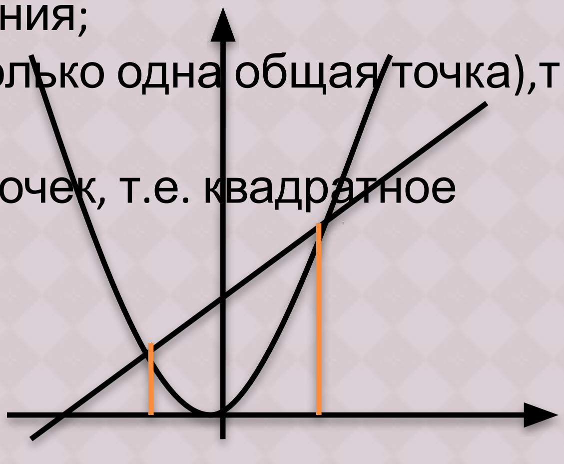
Ответ: 2; $\frac{8}{3}$

Графическое решение квадратного уравнения

Если в уравнении $x^2 + px + q = 0$
перенести второй и третий члены в правую часть, то получим
$x^2 = -px - q$.

Построим графики зависимостей $y = x^2$ и $y = -px - q$.
График первой зависимости – **парабола**, проходящая через начало координат.
График второй зависимости – **прямая**.

Возможны следующие случаи: прямая и парабола могут пересекаться в двух точках, абсциссы точек пересечения являются корнями квадратного уравнения;
- прямая и парабола могут касаться (только одна общая точка),т.е. уравнение имеет одно решение;
- прямая и парабола не имеют общих точек, т.е. квадратное уравнение не имеет корней.



Решим графически уравнение $x^2 - 3x - 4 = 0$.

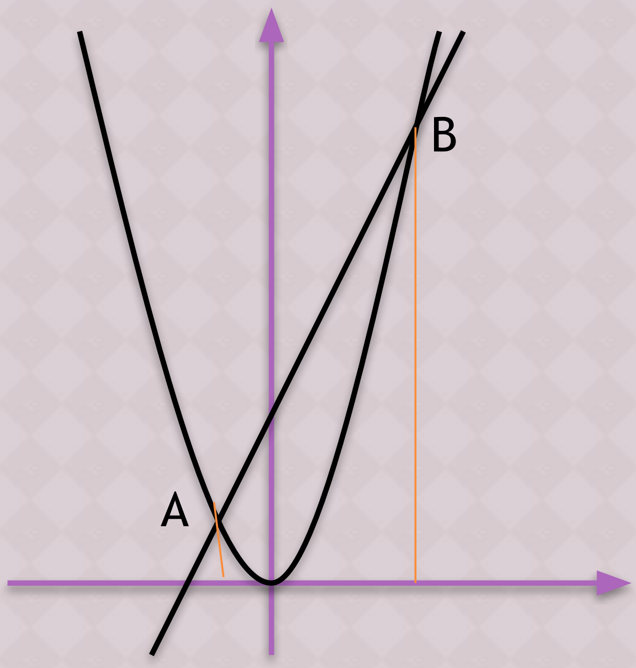
Решение. Запишем уравнение в виде

$$x^2 = 3x + 4$$

Построим параболу $y = x^2$ и прямую $y = 3x + 4$.

Прямую $y = 3x + 4$ можно построить по двум точкам *M* (0;4) и *N* (3;13).

Прямая и парабола пересекаются в двух точках *A* и *B* с абсциссами $x_1 = -1$ и $x_2 = 4$.



Решение квадратных уравнений с помощью номограммы.

Это старый и незаслуженно забытый способ решения квадратных уравнений, помещенный на с.83 (*см. Брадис В.М.* Четырехзначные математические таблицы. – М., Просвещение, 1990).

Таблица XXII. Номограмма для решения уравнения $z^2 + pz + q = 0$. Эта номограмма позволяет, не решая квадратного уравнения, по его коэффициентам определить корни уравнения.

Криволинейная шкала номограммы построена по формулам:

$$OB = \frac{a}{1+z}, \quad AB = \frac{-z^2}{1+z}.$$

Полагая $OC = p$, $ED = q$, $OE = a$ (все в см), из подобия треугольников CAH и CDF получим пропорцию

$$\frac{p-q}{p-AB} = \frac{a}{OB}$$

откуда после подстановок и упрощений вытекает уравнение $z^2 + pz + q = 0$,

причем буква z означает метку любой точки криволинейной шкалы.

1. Для уравнения
$z^2 - 9z + 8 = 0$.
Номограмма дает корни
$z_1 = 8,0$ и $z_2 = 1,0$ (рис. 12).

2. Решим с помощью номограммы уравнение $2z^2 - 9z + 2 = 0$.

Разделим коэффициенты этого уравнения на 2,получим уравнение
$z^2 - 4,5 + 1 = 0$.
Номограмма дает корни $z_1 = 4$ и $z_2 = 0,5$.

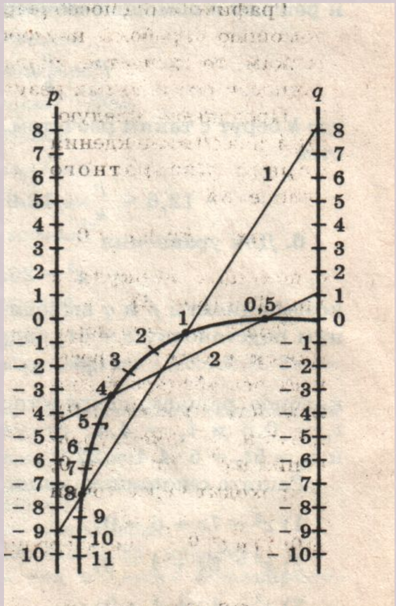


Рис. 12

Геометрический способ решения квадратных уравнений.

В древности, когда геометрия была более развита, чем алгебра, квадратные уравнения решали не алгебраически, а геометрически. Приведем ставший знаменитым пример из «Алгебры» ал-Хорезми.

Примеры

Решим уравнение $x^2 + 10x = 39$.

В оригинале эта задача формулируется следующим образом: «Квадрат и десять корней равны 39».

Решение. Рассмотрим квадрат со стороной x, на его сторонах строятся прямоугольники так, что другая сторона каждого из них равна $2\frac{1}{2}$, следовательно, площадь каждого равна $2\frac{1}{2}x$.

Полученную фигуру дополняют затем до нового квадрата *ABCD*, достраивая в углах четыре равных квадрата, сторона каждого из них $2\frac{1}{2}$, а площадь $6\frac{1}{4}$.

D   *x*   *C*

$6\frac{1}{4}$.	$2\frac{1}{2}x$	$6\frac{1}{4}$.
$2\frac{1}{2}x$	x^2	$2\frac{1}{2}x$
$6\frac{1}{4}$.	$2\frac{1}{2}x$	$6\frac{1}{4}$.

A   x   *B*

Площадь *S* квадрата *ABCD* можно представить как сумму площадей: первоначального квадрата x^2, четырех прямоугольников $(4 \cdot 2\frac{1}{2}x = 10x)$

и четырех пристроенных квадратов $(6\frac{1}{4} \cdot 4 = 25)$, т.е.

$S = x^2 + 10x = 25$. Заменяя $x^2 + 10x$ числом 39, получим что $S = 39 + 25 = 64$, откуда следует, что сторона квадрата *ABCD*, т.е. отрезок *AB* = 8. Для искомой стороны *x* первоначального квадрата получим $x = 8 - 2\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2} = 3$

уравнение

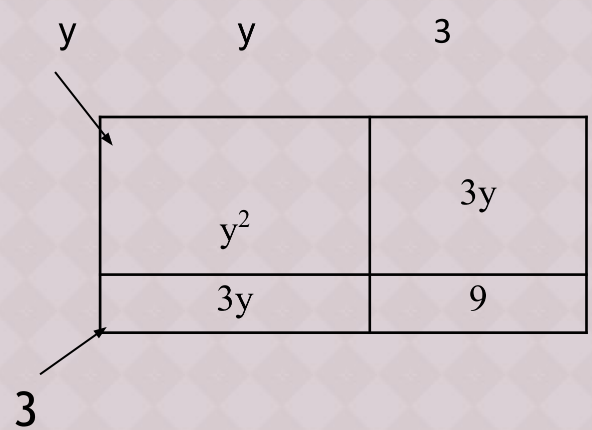
$$y^2 + 6y - 16 = 0.$$

Решение представлено на рис., где

$$y^2 + 6y = 16, \text{ или } y^2 + 6y + 9 = 16 + 9.$$

Решение .Выражения $y^2 + 6y - 16 + 9 - 9 = 0$ – одно и то же уравнение. Откуда и получаем, что $y + 3 = \pm 5$, или $y_1 = 2$,

$y_2 = -8$.



Дидактический материал к работе.

1. **Решите квадратное уравнение, разлагая его левую часть на множители:**

а) $x^2 - x = 0$;
б) $x^2 + 2x = 0$;
в) $3x^2 - 3x = 0$;
г) $x^2 - 81 = 0$;
д) $4x^2 - \frac{1}{144} = 0$;
е) $x^2 - 4x + 4 = 0$;
ж) $x^2 + 6x + 9 = 0$;
з) $x^2 + 4x + 3 = 0$;
и) $x^2 + 2x - 3 = 0$.

2. Решите уравнения по формуле:

а) $2x^2 - 5x + 2 = 0$
б) $6x^2 + 5x + 1 = 0$
в) $3x^2 - 7x - 1 = 0$
г) $4x^2 - 12x + 9 = 0$
д) $10x^2 - 6x + 0{,}9 = 0$
е) $2x^2 - 3x + 2 = 0$

3. Не решая квадратного уравнения, определите знаки его корня:

1) $x^2 - 2x - 15 = 0$
2) $x^2 + 2x - 8 = 0$
3) $x^2 + 10x + 9 = 0$
4) $x^2 - 12x + 35 = 0$
5) $3x^2 + 14x + 16 = 0$
6) $x^2 - 5x + 6 = 0$
7) $x^2 - 2x + 1 = 0$
8) $x^2 + 4x + 4 = 0$
9) $x^2 - 6x + 9 = 0$
10) $4x^2 + 7x - 2 = 0$
11) $5x^2 - 9x - 2 = 0$
12) $x^2 - 11x + 15 = 0$

4. Решите уравнения, используя метод «переброски»:

1) $2x^2 - 9x + 9 = 0$
2) $10x^2 - 11x + 3 = 0$
3) $3x^2 + 11x + 6 = 0$
4) $4x^2 + 12x + 5 = 0$
5) $3x^2 + x - 4 = 0$
6) $5x^2 - 11x + 6 = 0$
7) $2x^2 + x - 10 = 0$
8) $6x^2 + 5x - 6 = 0$

5. Решите уравнения, используя свойства коэффициентов:

1) $5x^2 - 7x + 2 = 0$
2) $3x^2 + 5x - 8 = 0$
3) $11x^2 + 25x - 36 = 0$
4) $11x^2 + 27x + 16 = 0$
5) $839x^2 - 448x - 391 = 0$
6) $939x^2 + 978x + 39 = 0$
7) $313x^2 + 326x + 13 = 0$
8) $2006x^2 - 2007x + 1 = 0$

6. Решите уравнения по формуле четного коэффициента:

1) $4x^2 - 36x + 77 = 0$
2) $15x^2 - 22x - 37 = 0$
3) $4x^2 + 20x + 25 = 0$
4) $9x^2 - 12x + 4 = 0$

7. Решите приведенные квадратные уравнения по формуле:

1) $x^2 - 8x - 9 = 0$

2) $x^2 + 6x - 40 = 0$

3) $x^2 + 18x + 81 = 0$

4) $x^2 - 56x + 64 = 0$

8. Решите графически уравнения:

1) $x^2 - x - 6 = 0$;

2) $x^2 - 4x + 4 = 0$;

3) $x^2 + 4x + 6 = 0$;

4) $x^2 - 2x - 3 = 0$;

5) $x^2 + 2x - 3 = 0$;

6) $4x^2 - 4x - 1 = 0$.

9. Решите с помощью номограммы уравнения:

1) $z^2 - 7z + 6 = 0$;

2) $z^2 + 5z + 4 = 0$;

3) $z^2 - 4z + 4 = 0$;

4) $z^2 - z - 6 = 0$;

5) $z^2 - 11z + 18 = 0$;

6) $z^2 - 2z + 3 = 0$.

Критерии оценивания

Формы оценивания:

промежуточное (формирующее) оценивание:
- самооценка, взаимооценка участников проекта своей деятельности для выявления потребности в необходимой или дополнительной информации; процесса в понимании теоретического материала.

Способы оценивания :

тесты, проверочные работы, самостоятельные работы, подготовленные учителем и соответствующие учебной программе и стандарту (Раздаточный материал, дидактический материал).

Итоговое оценивание:

- оценка содержания итогового материала, его соответствие стандарту и учебной программе;
- оценка навыков совместной деятельности (групповой) и индивидуальной;
- оценка навыков мышления (достигнута цель).

Литература:

1.Ю.Н Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворов. Под ред. С.А. Теляковского. Алгебра: Учебник для 8 класса- изд.- М:Просвещение,2010.
2.Жохов В.И., Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г. Дидиктические материалы по алгебре для 8 класса.- 15изд.- М.: Просвещение, 2010.
3. Энциклопедический словарь юного математика.А.П.Савин-М: Педагогика,1985-
4. Брадис В. М. Четырехзначные математические таблицы для среденй школы. – М., Просвещение, 1990
5. http://www.uchportal.ru/load/27-1-0-29503
http://ru.wikipedia.org/wiki/%CA%E2%E0%E4%F0%E0%F2%ED%EE%E5_%F3%F0%E0%E2%ED%E5%ED%E8%E5
http://www.egesdam.ru/page221.html
6.Математика. Алгебра. Функции. Анализ данных. 8 класс: Учебник для общеобразовательных учреждений / Г. В. Дорофеев и др. – М.: Дрофа, 2004
7. Гусев В. А., Мордкович А. Г. Математика: Справочные материалы: Книга для учащихся. – М.: Просвещение, 1988
8. Глейзер Г. И. История математики в школе. – М.: Просвещение, 1982

Номогра́мма (греч. νομοσ — закон) — графическое представление функции от нескольких переменных, позволяющее с помощью простых геометрических операций (например, прикладывания линейки) исследовать функциональные зависимости без вычислений. Например, решать квадратное уравнение без применения формул