Елементи математичної логіки

Тема уроку

“ Висловлювання та операції над ними ”.

Мета:

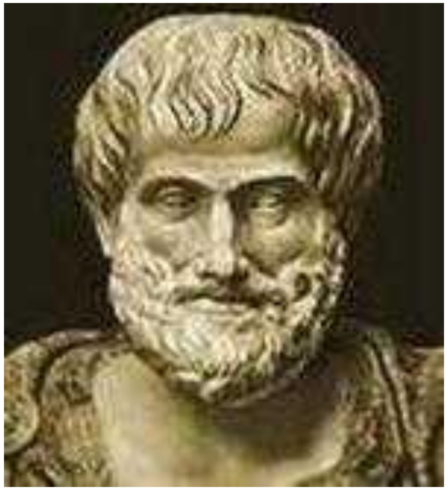
- Познайомити учнів з означенням “ математичної логіки ”;
- Ввести поняття: висловлювання, функція істинності, логічні операції;
- Розглянути логічну структуру теорем;
- Навчати складати таблиці істинності4
- Розвивати логічне мишлення.

План

1. Вступ.
2. Логічні функції.
3. Логічні операції.
4. Складання таблиці істинності.
5. Підсумок уроку (рефлексія).
6. Повідомлення домашнього завдання.

Логіка - наука о формах і способах мислення.

Основи логіки були закладені работами вченого і філософа **Аристотеля** (384 -322рр. до н.е.).



Він намагався першим знайти відповідь на питання «Як ми мірнуємо», вивчав правила мишлення. Аристотель вперше дав систематичне викладення логіки.

Він проаналізував людське мишлення, його **форми - поняття, судження, умовиводи.**

Так виникла **формальна логіка.**

Висловлення **- це форма мишлення, в якій щось стверджується або спростовується про властивості реальних предметів та відносин між ними. Висловлення може бути істинним чи хибним.**

Не є висловленнями окличні та питальні :

Уходячи, гасіть світло! ***Ти йдеш до кінотеатру?***

Висловлювання поділяються на:

1. **прості** ***$2+8<5$*** - хибне

Земля – планета Солнячної системи - істинне;

2. **складені** (істинність яких обчислюється за допомогою алгебри висловлювань)

“Всі мишки та кішки з хвостами”

“Всі мишки з хвостами” та “Всі кішки з хвостами”

Логічні функції (логічні формули) – складні логічні вирази утворені з простих та пов᾽язані логічними операціями і, або, НЕ и др.)

Висловлення **"Всі миші та кішки з хвостами"** є складним та складаєтьсяз двох простих висловлювань

А="Всі миші з хвостами" та В="Всі кішки з хвостами"
Його мажна записати у вигляді логічної функції, значення якої істинне :

F(A,B)=A та B

В математичній логіці не розглядається конкретний зміст висловлювання, важливо тільки істинне воно або хибне. Тому висловлення можна представити змінною величиною, значення якої може бути лише **істинне (1)** або **хибне (0)**.

Логічні операції

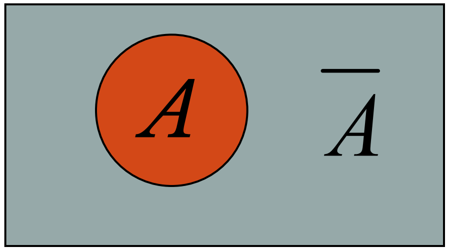
1. заперечення (інверсія).

Позначення : НЕ А, ¬А, $\overline{A}$

Таблиця істинності:

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

Діаграмма Эйлера-Венна



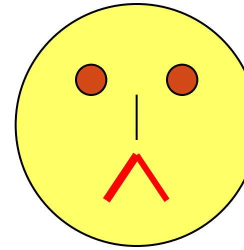
А={Діти люблять іграшки}

$\overline{A}$ = {Діти **НЕ** люблять іграшки}

А={множина учнів 33 групи }

$\overline{A}$= {множина учнів НЕ 33 групи}

2. Логічне множення (Кон'юнкція) Позначення: И, $\wedge$, &, •

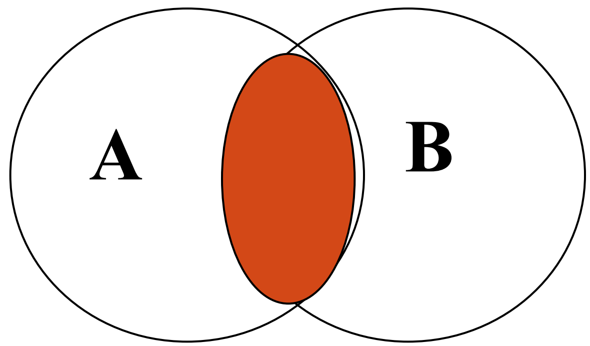


$F = A \wedge B$

Таблица істинності:

A	B	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Діаграмма Эйлера-Венна

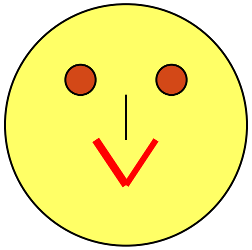


A={множина тварин}

B={множина свійських тварин}

F=A ^ B= {коза, корова, порося}

3. Логічна сума (Диз'юнкція)



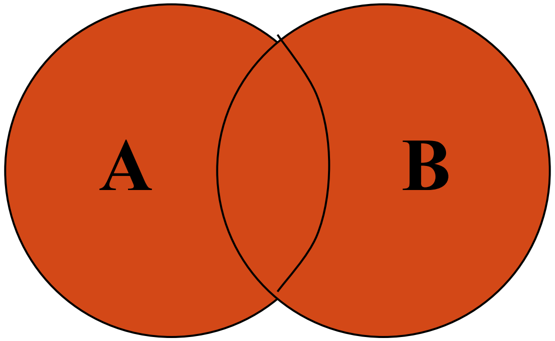
Позначення: або, $\vee$, +, |

F= A $\vee$ B

Таблиця істинності:

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Діаграмма Эйлера-Венна



A={множина учнів 33 групи}

B={множина учнів 34 групи}

F=A V B= {множина учнів 33 і 34 груп}

4. іМПЛіКАЦіЯ (логічне слідування)

Обозначение: $A \rightarrow B$, $A \Rightarrow B$

Таблица истинности:

A	B	A => B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Импликация – логічна операція, результат якої є **хибним** за умови, **що А – істинне, а В – хибне**, а в усіх інших випадках результат операції є істинним.

умова => наслідок

ЯКЩО, ... **ТО ...**

Якщо буде дощ, то ми не підемо на вулицю.

Якщо я буду лінуватись, то отримаю низьку оцінку.

5. ЕКВіВАЛЕНТНіСТЬ (рівнозначність) -

логічна операція, яка ставить у відповідність кожним двом простим висловлюванням складене висловлення, яке є істинним тоді і тільки тоді, коли обидва висловлення є одночасно істинними або одночасно хибними.

Позначення: A~B, A↔B, A≡B, A=B

Таблиця істинності:

A	B	A <=> B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Чайник нагріває воду тоді і тільки тоді, коли він увімкнений.

Ми дихаємо свіжим повітрям тоді і тільки тоді, коли гуляємо в парку.

Приорітет логічних операцій:

1. ( )
2. НЕ е
3. І
4. АБО
5. →
6. ↔

Розв’язати задачі:

Визначте, в якому порядку необхідно обчислювати значення логічного виразу:

1) $\overset{1}{\neg} A \overset{3}{\&} \overset{2}{\neg} B$

2) $A \overset{2}{\&} (B \overset{1}{\&} C)$

3) $(A \overset{1}{\&} B) \overset{4}{\vee} (C \overset{3}{\&} \overset{2}{\neg} D)$

4) $A \overset{2}{\vee} \overset{1}{\neg} D \overset{3}{\vee} B$

5) $A \overset{3}{\rightarrow} (B \overset{2}{\leftrightarrow} \overset{1}{\neg} A)$

Побудова таблиці істинності для логічного виразу

Таблицю, яка показує яких значень приймають складені висловлювання при всіх сполученнях простих висловлювань, які входять в них називають таблицею істинності складеного висловлювання (логічної формули).

За формулою логічної функції легко розрахувати її таблицю істинності, дотримуючись приорітету логічних операцій та дій в дужках.

Побудуємо таблицю істинності для наступної функції:

$$F(A,B,C) = A \vee (\overline{C} \wedge B)$$

A	B	C	$\overline{C}$	$\overline{C} \wedge B$	$A \vee (\overline{C} \wedge B)$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1

Завдання. Побудувати таблицю істинності для наступних функцій:

1) $F = \overline{A} \vee B$

A	B	$\overline{A}$	$\overline{A} \vee B$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

2) $F = \overline{A} \wedge B$

A	B	$\overline{A}$	$\overline{A} \wedge B$
0	0	1	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	0

3) $F = (\overline{A \vee B})$

A	B	$A \vee B$	$\overline{(A \vee B)}$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

Рівносильні логічні вирази

Логічні вирази, в яких останні стовбці в таблиці істинності співпадають називаються *рівносильними*.

Знак «=» - рівносильність.

Приклад 1. Довести рівносильність логічних виразів:

и $\overline{A} \wedge \overline{B}$ $\overline{A \vee B}$

Таблиця істинності $\overline{A} \wedge \overline{B}$

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \wedge \overline{B}$
0	0	1	1	**1**
0	1	1	0	**0**
1	0	0	1	**0**
1	1	0	0	**0**

Таблиця істинності $\overline{A \vee B}$

A	B	$A \vee B$	$\overline{A \vee B}$
0	0	0	**1**
0	1	1	**0**
1	0	1	**0**
1	1	1	**0**

Следовательно, $\overline{A} \wedge \overline{B} = \overline{A \vee B}$

В алгебрі висловлювань всі логічні операції можуть бути зведені до трьох базових : **логічному множенню, логічному додаванню, логічному запереченню.**

Приклад. Довести методом порівняння ТІ, що

$$A \to B = \overline{A} \vee B$$

A	B	A => B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

A	B	$\overline{A}$	$\overline{A} \vee B$
0	0	1	**1**
0	1	1	**1**
1	0	0	**0**
1	1	0	**1**

Завдання: Довести, користуючись ТІ, що операція еквівалентності рівносильна виразу

$$A \sim B = (A \vee \overline{B})\,\&\,(\overline{A} \vee B)$$

A	B	A~B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \vee \overline{B}$	$\overline{A} \vee B$	$(A \vee \overline{B})\,\&\,(\overline{A} \vee B)$
0	0	**1**	1	1	1	1	**1**
0	1	**0**	1	0	0	1	**0**
1	0	**0**	0	1	1	0	**0**
1	1	**1**	0	0	1	1	**1**

Підсумок уроку
Питання для роздуму

1. Яка кількість логічних операцій двох аргументів існує і чому?

Відповідь: **$N = 2^4 = 16$** , так як кожна логічна функція двох аргументів має чотири можливих набори значень.

2. Які логічні функції двох аргументів мають свої назви?

Відповідь : Інверсія, кон'юнкція, диз'юнкція

3. Яка кількість логічних операцій трьох аргументів існує?

Відповідь : **$N = 2^8 = 256$** , так як кожна логічна функція двох аргументів має 8 можливих наборів значень.

Домашнє завдання

- Вивчити означення логічних операцій
- Переглянути розібрані приклади
- Розв'язати № 2.3, 2.10, 2.13(6,8)