Готовимся к ЕГЭ – 2014 по математике

Решение прототипа задания С 5

МБОУ СОШ № 143
Г. Красноярск
Учитель математики Князькина Т. В.

Найдите все значения **а**, при каждом из которых наименьшее значение функции
$f(x) = 2ax + |x^2-8x+7|$ больше 1.

Решение

Определим, раскрыв модуль, как будет выглядеть функция f(x)

А) Выражение под знаком модуля больше или равно нулю: $x^2-8x+7 \geq 0$

С помощью метода интервалов определим значение **x**, при которых это условие выполняется:

$x^2-8x+7 = 0$; $x_1=1$; $x_2=7$. $x \leq 1$; $x \geq 7$

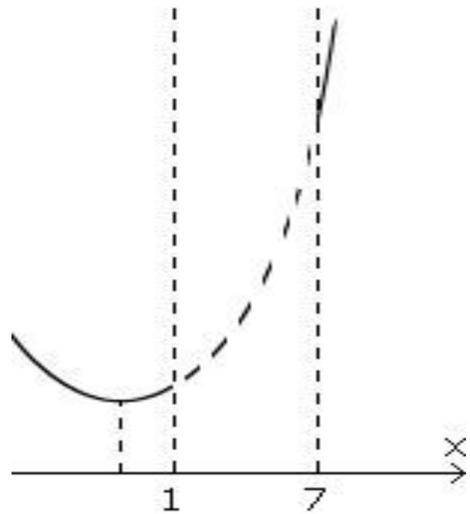
Тогда функция имеет вид: $f(x)=2ax + x^2-8x+7$ или $f(x)=x^2 + 2(a-4)x+7$

- Ветви направлены вверх

Ось симметрии параболы: $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-2(a-4)}{2} = 4-a$

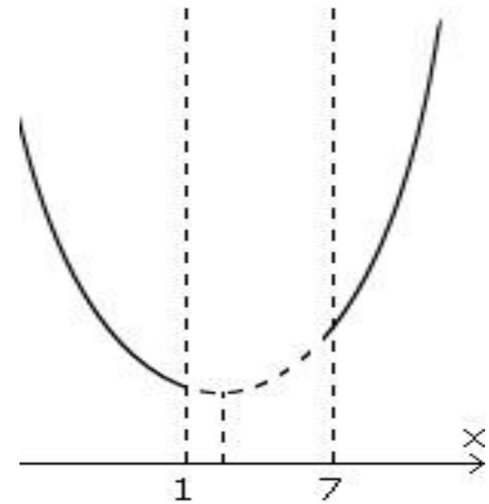
- x принадлежит интервалу $x \in (-\infty;1] \cup [7;\infty)$

Так как x_0=4-a, где **a** - переменный параметр, то вершина параболы может смещаться вправо или влево, в зависимости от значения **a.** Всего возможны четыре ситуации ,показанные на рисунках.



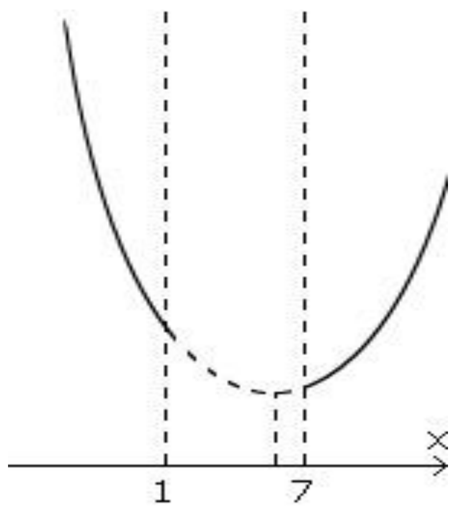
$x_0 < 1$

а)



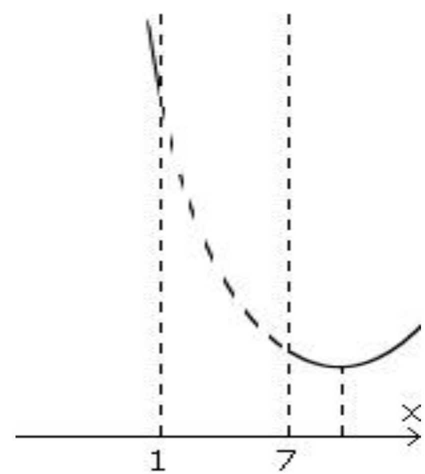
$1 < x_0 < 7$

б)



$1 < x_0 < 7$

в)



$x_0 > 7$

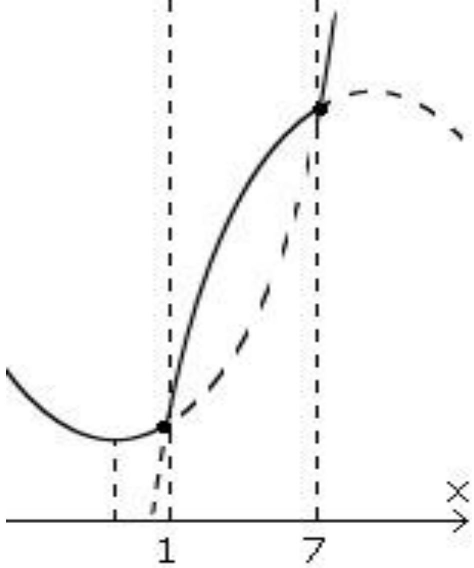
г)

Б) Теперь рассмотрим случай, когда выражение под знаком модуля функции f(x) отрицательно: x^2-8x+7 $<$ 0. Тогда исходная функция примет вид: f(x) = 2ax - x^2+8x-7 = -x^2+2(a+4)x-7

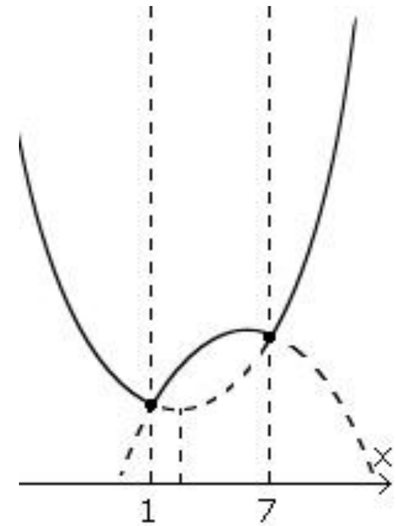
- Ветви параболы направлены вниз
- x может принимать значения от 1 до 7 или $1<x<7$, так как $x^2-8x+7<0$
- ось симметрии параболы

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-2(a+4)}{2} = -a-4$$

К рисункам случая А добавим вид парабол случая Б, тогда функция f(x) будет выглядеть:

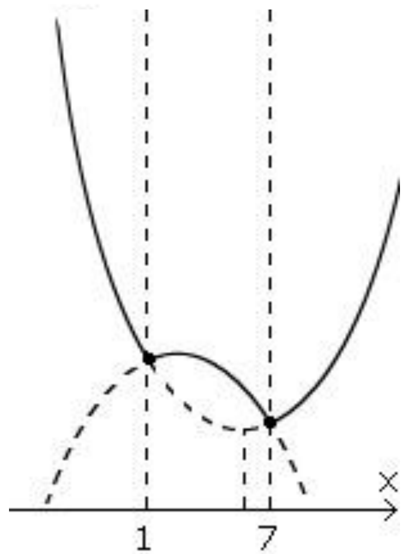


$x_0<1$



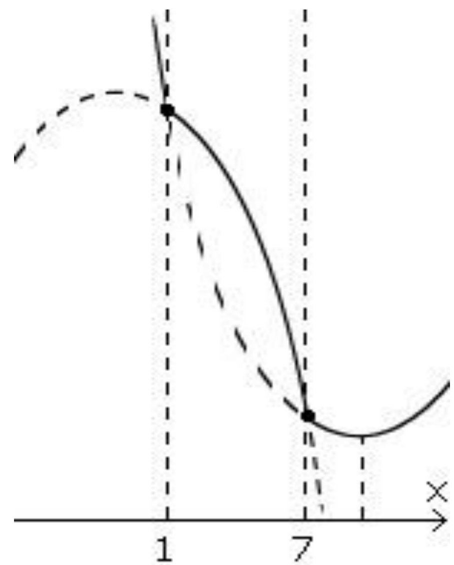
$1<x_0<7$

б)



$1<x_0<7$

в)



$x_0>7$

г)

- **Рисунок а**: Наименьшее значение функции будет в точке x=4-a
- **Рисунок б**: Наименьшее значение в точке x=1
- **Рисунок в**: Наименьшее значение в точке x=7
- **Рисунок г**: Наименьшее значение в точке x_0=4-a
- Рисунки а и г имеют общее условие минимума функции при x=4-a

Итак, наименьшее значение функция $f(x) = 2ax + |x^2-8x+7|$ будет принимать в трёх случаях: при x=1; x=7; x=4-a

Запишем вопрос задачи с помощью неравенства:

$$\begin{cases} f(1) > 1 \\ f(7) > 1 \\ f(4-a) > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a \cdot 1 + |1^2 - 8 \cdot 1 + 7| > 1 \\ 2a \cdot 7 + |7^2 - 8 \cdot 7 + 7| > 1 \\ 2a(4-a) + |(4-a)^2 - 8(4-a) + 7| > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > \frac{1}{2} \\ a > \frac{1}{14} \\ 8a - 2a^2 + |a^2 - 9| > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > \frac{1}{2} \\ a > \frac{1}{14} \\ 2a^2 - 8a + 1 - |a^2 - 9| < 0 \end{cases}$$

Раскроем модуль и решим неравенство:

$2a^2-8a+1-|a^2-9|<0$

1) $a^2-9 \geq 0$; $a \leq -3$; $a \geq 3$ по условию

системы неравенств $a > \frac{1}{2}$

Следовательно а $\le$ -3 не удовлетворяет этому условию.

$$\text{Имеем: } \begin{cases} a \ge 3 \\ 2a^2 - 8a + 1 - a^2 + 9 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge 3 \\ 2a^2 - 8a + 10 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge 3 \\ 4 - \sqrt{6} < a < 4 + \sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow 3 \le a < 4 + \sqrt{6}$$

2) $a^2-9<0$; $-3<a<3$. С учётом условия $a > \frac{1}{2}$ имеем: $\frac{1}{2} < a < 3$

$$\text{Тогда: } \begin{cases} \frac{1}{2} < a < 3 \\ 2a^2 - 8a + 1 + a^2 - 9 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < a < 3 \\ 3a^2 - 8a - 8 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < a < 3 \\ \frac{4 - \sqrt{40}}{3} < a < \frac{4 + \sqrt{40}}{3} \end{cases}$$

Так как $\frac{1}{2} > \frac{4-\sqrt{40}}{3}$ и $3 < \frac{4+\sqrt{40}}{3}$ то $\frac{1}{2} < a < 3$

Объединим решение случаев в 1 и 2

$$\left[\begin{array}{l} 3 \le a < 4+\sqrt{6} \\ \frac{1}{2} < a < 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{1}{2} < a < 4+\sqrt{6}$$

Ответ: $a \in \left(\frac{1}{2}; 4+\sqrt{6}\right)$