

ОСНОВЫ ЛОГИКИ

Логические выражения и операции

Учитель информатики и ИКТ
школы 403
Никитенко Наталия
Леонидовна

Философская логика



Философ Платон (428—347). Сочинения Платона содержат важный вклад в развитие философской логики. Платон ставит три вопроса:

- Что собственно можно считать истиной и ложью?
- Какова природа связи между посылками в рассуждениях и заключениями?
- Какова сущность понятий?

Формальная логика



Логика Аристотеля, в частности его теория **силлогизма**, имела огромное влияние на западную мысль. Его труды по логике, называемые **Органон**, представляют самое раннее исследование **формальной логики** и началом традиции, преемственность которой прослеживается до современности.

Математическая логика



Немецкий ученый **Готфрид Лейбниц** (1646 - 1716)

заложил **основы математической логики**. Он пытался построить первые логические исчисления (свести логику к математике), предложил использовать символы вместо слов обычного языка, поставил много задач по созданию символьной логики, его идеи оказали влияние на последующие работы ученых в этой

Математическая логика



Англичанин **Джордж Буль** (1815 - 1864) на фундаменте, заложенном Лейбницем, создал новую область науки - **математическую логику**. В работах Буля логика обрела свой алфавит, свою орфографию и грамматику.

Математическая логика

В математической логике не рассматривается конкретное содержание высказывания, важно только, истинно оно или ложно.

Высказывание можно представить некоторой переменной величиной, значением которой может быть только **ложно (0)** или **истинно (1)**.

Логическое выражение – выражение, содержащее логические величины и знаки логических операций.

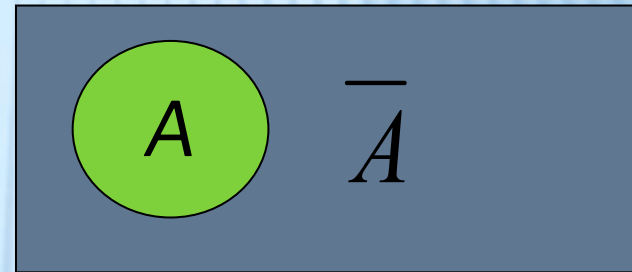
ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

1. Отрицание (инверсия)

Обозначение: НЕ А, $\neg A$, \overline{A}

A	не А
0	1
1	0

Диаграмма Эйлера -Венна



$A = \{\text{множество учеников 10 А класса}\}$
 $= \{\text{множество учеников НЕ 10 А класса}\}$

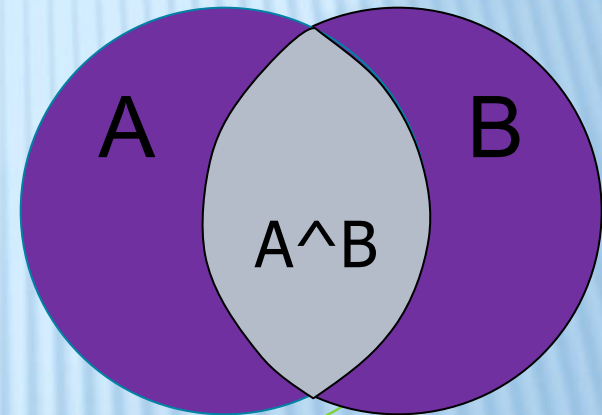
ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

2. Логическое умножение (Конъюнкция)

Обозначение: И, \wedge , &, \cdot

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Диаграмма Эйлера-Венна



$A = \{\text{Множество обитателей моря}\}$

$B = \{\text{Множество}$

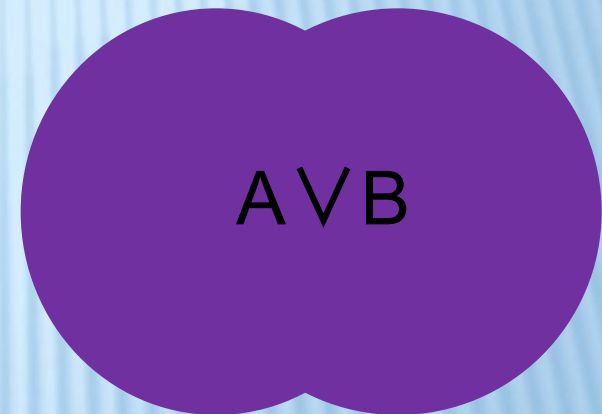
$F = A \wedge B = \{\text{вит, акула, дельфин}\}$

ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

3. Логическое сложение (Дизъюнкция)

Обозначение: ИЛИ, \vee , +, |

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1




$A = \{\text{Множество учеников 10 А класса}\}$

$B = \{\text{Множество учеников 10 Б класса}\}$

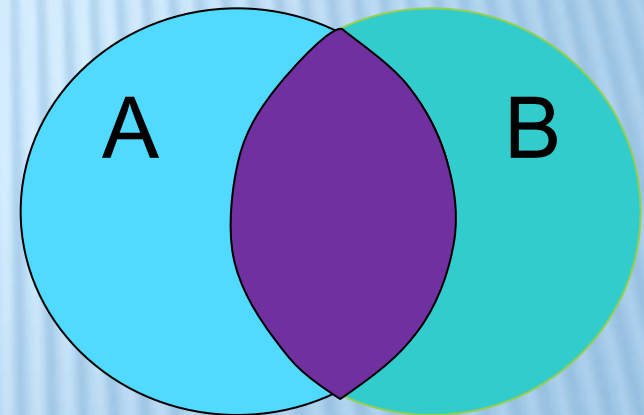
$F = A \vee B = \{\text{Множество учеников 10А или 10Б кл.}\}$

ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

4. Строгая дизъюнкция (исключающее или) – сложение по модулю 2.

Обозначение: XOR или 

A	B	A xor B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

5. импликация (логическое следование) выражается союзами ЕСЛИ ..., ТО; КОГДА ..., ТОГДА.

Обозначение: **знак** \rightarrow .

A (основание)	B (следствие)	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$$

ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

6. Эквивалентность (условное высказывание) – выражается союзами ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА

Обозначение: $A \sim B$, $A \leftrightarrow B$, $A \equiv B$, $A = B$

A	B	$A \equiv B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$A \equiv B = (A \wedge B) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B})$$

ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

Приоритет логических операций:

1. **()** Операции в скобках
2. **НЕ** Отрицание
3. **И** логическое умножение
4. **ИЛИ** Логическое сложение
5. **→** Импликация
6. **↔** Эквивалентность

ОСНОВЫ ЛОГИКИ

Решение задач ЕГЭ

2. Дан фрагмент таблицы истинности выражения F .
Какое выражение соответствует F ?

Решение

в приведенной задаче в столбце F все единицы. Можно предположить, что это функция операции ИЛИ.

1 и 3 вариант не рассматриваем.

Рассмотрим **4 вариант**.

По закону исключения констант в варианте $Z \wedge 1 = Z$, в 1 и 2 строке таблицы $Z = 0$, а операция эквиваленции также равна 0, так как у нас $X \neq Y$.

Вариант 4 не подходит.

В варианте 2 $Z \vee 1 = 1$, это значит, что при любом значении аргументов в левой части выражения, у нас при дизъюнкции получится значение функции 1.

таким образом, правильный ответ – 2

X	Y	Z	F
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	1	1

1) $(X \equiv Y) \wedge (Z \wedge 1)$

2) $(X \equiv Y) \vee (Z \vee 1)$

3) $(X \equiv Y) \wedge (Z \vee 1)$

4) $(X \equiv Y) \vee (Z \wedge 1)$

Ответ: 2.

2. Дан фрагмент таблицы истинности выражения F. Какое выражение соответствует F?

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	F
0	1	0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	0	1	0

Какое выражение соответствует F?

- 1) $x_1 \rightarrow (x_2 \wedge x_3 \vee x_4 \wedge x_5 \vee x_6 \wedge x_7)$
- 2) $x_2 \rightarrow (x_1 \wedge x_3 \vee x_4 \wedge x_5 \vee x_6 \wedge x_7)$
- 3) $x_3 \rightarrow (x_1 \wedge x_2 \vee x_4 \wedge x_5 \vee x_6 \wedge x_7)$
- 4) $x_4 \rightarrow (x_1 \wedge x_2 \vee x_3 \wedge x_5 \vee x_6 \wedge x_7)$

2. решение

Логическое следование (импликация) $A \rightarrow B$ равна 0 тогда и только тогда, когда A (посылка) истинна, а B (следствие) ложно.

В нашем задании посылки x_2 и x_4 равны 1. Можно не рассматривать варианты **1** и **3**.

Далее рассмотрим **вариант 2**. Здесь аргументы конъюнкции x_4 и x_5 истинны, следовательно, все следствие в результате дизъюнкции будет истинно. Можно далее этот вариант не рассматривать, так как импликация (следствие) будет истинной.

В **варианте 4** после операции конъюнкции во всех трех случаях получается ложь и при дизъюнкции этих выражений также получается 0. Следовательно, правильный **ответ 4**.

Ответ: 4.

2. Дано логическое выражение, зависящее от 4 логических переменных:

$$(x1 \wedge \neg x2) \wedge (x2 \vee \neg x3 \wedge x4)$$

Сколько существует различных наборов значений переменных, при которых выражение истинно?

- 1) 1 2) 14 3) 15 4) 16

$$\left[\begin{array}{l} x1 \wedge \neg x2 = 1 \\ x2 \vee \neg x3 \wedge x4 = 1; \end{array} \right.$$

Выражение истинно, если два выражения, входящие в него истинны. В первом выражении $x1$ при конъюнкции должен быть истинным, если предположить, что $x2$ истинно, то конъюнкция будет ложной, поэтому $x2=0$.

$$x1 = 1 \text{ и } x2 = 0$$

Конъюнкция во втором выражении $\neg x3 \wedge x4$ должна быть истинной, так как $x2=0$ (и тогда все выражение окажется ложным). Это возможно только при $x4=1$ и $x3=0$.

Итак, существует только один набор значений переменных.

Ответ: 1.

18. определите наибольшее число X , при котором истинно логическое высказывание:

$$F = ((X^2 - 45 > 0) \wedge (100 > (X+10) * (X - 5)))$$

$$(X^2 - 45 > 0) \wedge (100 > (X+10) * (X - 5))$$

$$(X^2 - 45 > 0) \wedge (100 > (X+10) * (X - 5))$$

Решая квадратные уравнения получим:

$$X^2 - 45 > 0 \wedge (100 > (X+10) * (X - 5))$$

$$X > 6.7 \text{ и } 15 < X < 10$$

Конъюнкция истинна на участке пересечения значений X



Наибольшее целое из полученного интервала $X < 10$,
значит **$X=9$** .

18. Для какого имени истинно высказывание:

(первая буква согласная → вторая буква имени согласная)

∧

(предпоследняя буква гласная → последняя буква гласная)?

1. Аглая

3. Тамара

2. Владимир

4. Фома

Решение:

Два сложных высказывания объединены конъюнкцией, значит оба они должны быть истинными. Рассмотрим первое сложное высказывание. Пойдем от обратного: импликация ложна только, если посылка истинна, а следствие ложно. Имена Тамара и Фома в результате первой импликации дают ложь, а имя Владимир – истину. Во втором выражении операция импликации с именем Владимир получается ложной. Значит 2, 3 и 4 вариант не подходят.

Остается одно имя Аглая. В первом выражении импликация истинна, так как посылка ложная, а следствие истинно. Во втором выражении импликация истинна, потому что посылка и следствие истинны.

Ответ: 1.

ЗАКОНЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Закон	И	ИЛИ
двойного отрицания	$\overline{\overline{A}} = A$	
исключения третьего	$A \cdot \overline{A} = 0$	$A + \overline{A} = 1$
исключения констант	$A \cdot 1 = A; A \cdot 0 = 0$	$A + 0 = A; A + 1 = 1$
повторения	$A \cdot A = A$	$A + A = A$
поглощения	$A \cdot (A + B) = A$	$A + A \cdot B = A$
переместительный	$A \cdot B = B \cdot A$	$A + B = B + A$
сочетательный	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	$A + (B + C) = (A + B) + C$
распределительный	$\overline{A + B \cdot C} = \overline{A \cdot B} \cdot \overline{A + C}$	$\overline{A \cdot (B + C)} = \overline{A + B} \cdot \overline{A \cdot C}$
правило де		

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Для упрощения нахождения значений логических выражений их преобразуют с помощью законов алгебры логики (минимизируют).

Форма, которой соответствует минимальное число операций над логическими переменными, называется минимизацией логических функций.

18. на числовой прямой даны два отрезка: $P = [32, 52]$ и $Q = [12, 72]$.
 Выберите такой отрезок A , что формула $((X \in P) \rightarrow (X \in A)) \wedge ((X \in A) \rightarrow (X \in Q))$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x . Если таких отрезков несколько, укажите тот, который имеет большую длину.

1) $[7, 53]$ 2) $[7, 33]$ 3) $[27, 53]$ 4) $[27, 33]$

Решение – 1 способ:

Построим таблицу истинности для данной формулы

Промежуток	$x \in P$	$x \in Q$	\wedge	$x \in A$	F
$X < 12$	0	0	1	0	1
$12 < X < 32$	0	1	1	*	1
$32 < X < 52$	1	1	1	1	1
$52 < X < 72$	0	1	1	*	1
$X > 72$	0	0	1	0	1

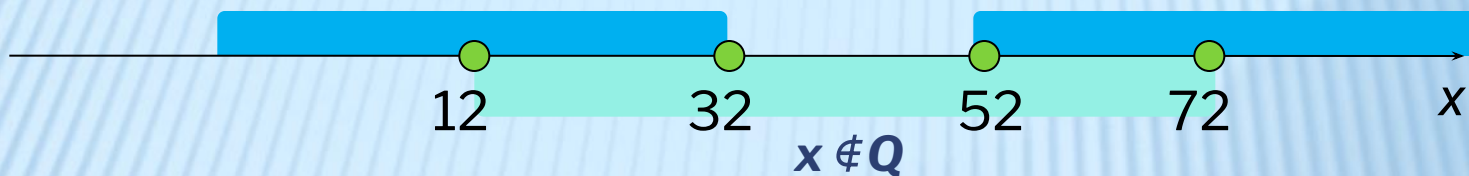
Из таблицы видно, что отрезок A должен помещаться внутри интервала $[32, 52]$ и, возможно, заходит во 2 и 4 промежуток.

Таких вариантов ответов 2: 3 и 4 вариант.

Отрезок $[27, 53]$ длиннее, это правильный ответ

18. Решение – способ 2

Преобразуем выражение: $((x \in P) \rightarrow (x \in A)) \wedge ((x \in A) \rightarrow (x \in Q)) =$
 $= ((x \notin P) \vee (x \in A)) \wedge ((x \notin A) \vee (x \in Q))$



Роль отрезка A состоит в том, чтобы значение выражения было истинным, поэтому для остальных значений x выражение A может быть любым. Не A ложно вне отрезка при $x < 12$ и при $x > 72$. Значит, нужно найти отрезок, который полностью помещается внутри отрезка $[12, 72]$.

Самый длинный из таких отрезков $[27, 53]$ – вариант 3.

18. На числовой прямой даны два отрезка: $P = [2, 42]$ и $Q = [22, 62]$. Выберите такой отрезок A , что формула $((x \in P) \rightarrow (x \notin Q)) \rightarrow (x \notin A)$

$) \rightarrow (x \notin A)$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x .

- 1) $[3,14]$ 2) $[23,32]$ 3) $[45,54]$ 4) $[15,45]$

Решение – 1 способ:

Построим таблицу истинности для данной формулы:

Промежуток ок	$x \notin A$	$x \in P$	\rightarrow	$x \in Q$	$x \notin Q$	F
$x < 2$	1	0	1	0	1	1
$2 < x < 22$	1	1	1	0	1	1
$22 < x < 42$	*	1	0	1	0	1
$42 < x < 62$	1	0	1	1	0	1
$x > 62$	1	0	1	0	1	1

По таблице видно, что отрезок A должен целиком помещаться внутри отрезка $[22,42]$.

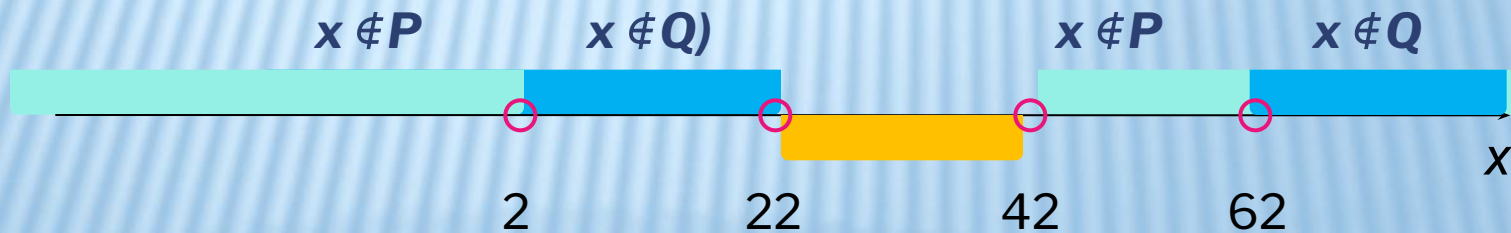
Правильный ответ – 2.

18. Решение – способ 2

Преобразуем выражение $(x \in P) \rightarrow (x \notin Q) \rightarrow (x \notin A)$ и получим:
 $(x \notin P) \vee (x \notin Q) \vee (x \notin A)$

Это выражение должно быть истинно для любого x , поэтому область истинности выражения должна охватывать всю числовую ось, значит области истинности всех слагаемых должны перекрыть всю числовую ось. Область $x \notin P$ состоит из двух полуосей, $(-\infty, 2)$ и $(42, \infty)$, а область $x \notin Q$ выходит за пределы $(-\infty, 22)$ и $(62, \infty)$. Это означает, что отрезок не A может быть ложным только внутри отрезка $[22, 42]$; соответственно, выражение A может быть истинно только на этом отрезке.

Поэтому правильный ответ — это отрезок, целиком помещающийся внутри отрезка $[22, 42]$.



Верный ответ — 2 (отрезок $[23, 32]$)

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Логические выражения и операции

1 задание: Символом F обозначено одно из указанных ниже логических выражений от трёх аргументов: X, Y, Z . Дан фрагмент таблицы истинности выражения F : Какое выражение соответствует F ?

X	Y	Z	F
0	0	0	1
1	1	1	1
0	1	1	1

- 1) $(Z \rightarrow Y) \wedge \neg X$
- 2) $(Z \rightarrow Y) \vee X$
- 3) $(Z \rightarrow Y) \wedge X$
- 4) $(Z \rightarrow Y) \rightarrow 0$

2 задание: Какое выражение соответствует F ?

X	Y	Z	F
0	0	1	1
1	1	0	1
0	1	0	1

- 1) $(X \vee Y) \wedge (Z \vee 0)$
- 2) $(X \wedge Y) \vee (Z \vee 1)$
- 3) $(X \wedge Y) \wedge \neg Z$
- 4) $(X \vee Y) \vee \neg Z$

3 задание: Дан фрагмент таблицы истинности выражения F:
 Какое выражение соответствует F?

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	F
0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	0	0

1) $x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \neg x_4 \vee \neg x_5$

2) $\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4 \vee \neg x_5$

3) $x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4 \wedge x_5$

4 задание: Какое выражение соответствует F?

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	F
0	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1

1) $\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4 \wedge \neg x_5$

2) $x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4 \vee x_5$

3) $x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4 \wedge x_5$

5 задание: Дан фрагмент таблицы истинности выражения F.

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	F
0	1	0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	0	1	0

Какое выражение соответствует F?

1) $(x_1 \wedge x_3 \vee x_4 \wedge x_5 \vee x_6 \wedge x_7) \rightarrow x_2$

2) $(x_1 \wedge x_2 \vee x_4 \wedge x_5 \vee x_6 \wedge x_7) \rightarrow x_3$

3) $(x_1 \wedge x_2 \vee x_3 \wedge x_5 \vee x_6 \wedge x_7) \rightarrow \neg x_4$

4) $(x_2 \wedge x_3 \vee x_4 \wedge x_5 \vee x_6 \wedge x_7) \rightarrow \neg x_1$

6 задание: Для какого имени истинно высказывание:

(первая буква согласная → последняя буква имени согласная) V
(предпоследняя буква гласная → последняя буква согласная)?

- | | |
|------------|-------------|
| 1. Дания | 3. Хорватия |
| 2. Испания | 4. Греция |

7 задание: Какое из приведенных названий стран не удовлетворяет логическому условию?

(первая буква согласная → последняя буква согласная) V
(предпоследняя буква гласная → последняя буква согласная)?

- | | |
|------------|----------|
| 1. Сенегал | 3. Чехия |
| 2. Индия | 4. Куба |

8 задание: Для какого имени ложно высказывание:

(первая буква гласная → вторая буква гласная) V
(хотя бы одна из двух последних букв не является гласной)?

- | | |
|---------------|-----------|
| 1. Индия | 3. Алжир |
| 2. Белоруссия | 4. Египет |

Задание 9: На числовой прямой даны два отрезка: $P = [2, 10]$ и $Q = [6, 14]$. Выберите такой отрезок A , что формула $((x \in A) \rightarrow (x \in P)) \vee (x \in Q)$ тождественно истинна

- 1) $[0, 3]$
- 2) $[3, 11]$
- 3) $[11, 15]$
- 4) $[15, 17]$

Задание 10: На числовой прямой даны три отрезка: $P = [10, 40]$, $Q = [5, 15]$, $R = [35, 50]$. Выберите такой отрезок A , что формула $((x \in A) \rightarrow (x \in P)) \vee ((x \in Q) \rightarrow (x \in R))$ тождественно истинна

- 1) $[5, 20]$
- 2) $[3, 12]$
- 3) $[3, 7]$
- 4) $[120, 130]$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/4/4a/Plato-raphael.jpg/220px-Plato-raphael.jpg>
2. http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%98%D1%81%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%8F_%D0%BB%D0%BE%D0%B3%D0%B8%D0%BA%D0%B8#.D0.9F.D1.80.D0.B5.D0.B4.D1.8B.D1.81.D1.82.D0.BE.D1.80.D0.B8.D1.8F_.D0.BB.D0.BE.D0.B3.D0.B8.D0.BA.D0.B8
3. <http://www.chronos.msu.ru/biographies/aristotle.jpg>
4. <http://inf.reshuege.ru/>