



# Логарифм.



Преподаватель математики  
Зубилова Бэлла Вениаминовна

# Определение.

---

*Логарифмом числа  $b$  по основанию  $a$  называется показатель степени, в которую нужно возвести основание  $a$ , чтобы получить число  $b$ .*

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

# Формулы и свойства логарифмов

- 1° Основное логарифмическое тождество -  $\log_a b = b$ ;
- 2°  $\log_a 1 = 0$ ;
- 3°  $\log_a a = 1$ ;
- 4°  $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$ ;
- 5°  $\log_a (b/c) = \log_a b - \log_a c$ ;
- 6°  $\log_a (1/c) = \log_a 1 - \log_a c = -\log_a c$ ;
- 7°  $\log_a (b^c) = c \log_a b$ ;
- 8°  $\log_a b^c = (1/c) \log_a b$ ;
- 9° Формула перехода к новому основанию  $\log_a b = (\log_c b)/(\log_c a)$ ;
- 10°  $\log_a b = 1/\log_b a$ ;

# Десятичные логарифмы

- Логарифмы по основанию 10 (обозначение:  $\lg a$ ) до изобретения калькуляторов широко применялись для вычислений. Неравномерная шкала десятичных логарифмов обычно наносится и на логарифмические линейки. Подобная шкала используется во многих областях науки, например:
  - Физика — интенсивность звука (децибелы).
  - Астрономия — шкала яркости звёзд.
  - Химия — активность водородных ионов (рН).
  - Сейсмология — шкала Рихтера.
  - Теория музыки — нотная шкала, по отношению к частотам нотных звуков.
  - История — логарифмическая шкала времени.
- Логарифмическая шкала также широко применяется для выявления показателя степени в степенных зависимостях и коэффициента в показателе экспоненты. При этом график, построенный в логарифмическом масштабе по одной или двум осям, принимает вид прямой, более простой для исследования.



# Исторический очерк

- **Вещественный логарифм**
- Потребность в сложных расчётах в XVI веке быстро росла, и значительная часть трудностей была связана с умножением и делением многозначных чисел, а также извлечением корней. В конце века несколькими математиками, почти одновременно, пришла в голову идея: заменить трудоёмкое умножение на простое сложение, сопоставив с помощью специальных таблиц геометрическую и арифметическую прогрессии, при этом геометрическая будет исходной. Тогда и деление автоматически заменяется на неизмеримо более простое и надёжное вычитание, а извлечение корня степени  $n$  сводится к делению логарифма подкоренного выражения на  $n$ . Первым эту идею опубликовал в своей книге «*Arithmetica integra*» Михаэль Штифель, который, впрочем, не приложил серьёзных усилий для реализации своей идеи.

# Михаэль Штифель (1487-1567)

- Немецкий математик, один из изобретателей логарифмов, активный деятель протестантской Реформации. Штифель оставил заметный след в развитии алгебры. В его главном труде *Arithmetica integra* (Нюрнберг, 1544) он дал содержательную теорию отрицательных чисел, возведения в степень, различных прогрессий и других последовательностей. Штифель впервые использовал понятия «корень» и «показатель степени» (лат. *exponens*), причём подробно анализировал и целые, и дробные показатели.



- В 1614 году шотландский математик-любитель Джон Непер опубликовал на латинском языке сочинение под названием «Описание удивительной таблицы логарифмов». В нём было краткое описание логарифмов и их свойств, а также 8-значные таблицы логарифмов синусов, косинусов и тангенсов, с шагом  $1'$ . Термин логарифм, предложенный Непером, утвердился в науке. Теорию логарифмов Непер изложил в другой своей книге «Построение удивительной таблицы логарифмов, изданной посмертно в 1619 году его сыном.
- Понятия функции тогда ещё не было, и Непер определил логарифм кинематически, сопоставив равномерное и логарифмически-замедленное движение; например, логарифм синуса он определил следующим образом:
- Логарифм данного синуса есть число, которое арифметически возрастало всегда с той же скоростью, с какой полный синус начал геометрически убывать

# Джон Непер (1550—1617)

Шотландский барон (8-й лэрд Мерчистона), математик, один из изобретателей логарифмов, первый публикатор логарифмических таблиц.

- Всё его время было посвящено занятиям богословскими предметами и математикой. По его собственным словам, истолкование пророчеств всегда составляло главный предмет его занятий, математика же служила для него только отдыхом.
- Тем не менее Непер вошёл в историю как изобретатель замечательного вычислительного инструмента — таблицы логарифмов. Это открытие вызвало гигантское облегчение труда вычислителя.
- В честь Джона Непера названы:
  - кратер на Луне;
  - астероид 7096 Непер (1992 год);
  - логарифмическая безразмерная единица, измеряющая отношение двух величин;
  - университет в Эдинбурге (Edinburgh Napier University).



# Комплексный логарифм

- Первые попытки распространить логарифмы на комплексные числа предпринимали на рубеже XVII—XVIII веков Лейбниц и Иоганн Бернулли, однако создать целостную теорию им не удалось — в первую очередь по той причине, что тогда ещё не было ясно определено само понятие логарифма. Дискуссия по этому поводу велась сначала между Лейбницем и Бернулли, а в середине XVIII века — между Даламбером и Эйлером. Бернулли и Даламбер считали, что следует определить  $\log(-x) = \log(x)$ . Полная теория логарифмов отрицательных и комплексных чисел была опубликована Эйлером в 1747—1751 годах и по существу ничем не отличается от современной.
- Хотя спор продолжался (Даламбер отстаивал свою точку зрения и подробно аргументировал её в статье своей «Энциклопедии» и в других трудах), точка зрения Эйлера быстро получила всеобщее признание.

# Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716)

- Выдающийся немецкий философ и математик. Когда мальчику было 8 лет, его отец умер, оставив после себя большую личную библиотеку. Свободный доступ к книгам и врождённый талант позволили молодому Лейбницу уже к 12 годам самостоятельно изучить латынь и взяться за изучение греческого языка.
- В 15-летнем возрасте (1661) Готфрид сам поступил в тот же Лейпцигский университет, где когда-то работал его отец. В свою бытность студентом он познакомился с работами Кеплера, Галилея и других учёных. Спустя 2 года переходит в Йенский университет, где изучает математику. Затем возвращается в Лейпциг изучать право, но получить докторскую степень там не удалось



# Научная деятельность

- Важнейшие научные достижения Лейбница:
- Лейбниц, независимо от Ньютона, создал математический анализ — дифференциальное и интегральное исчисление (см. исторический очерк), основанные на бесконечно малых.
- Лейбниц создал комбинаторику как науку; только он во всей истории математики одинаково свободно работал как с непрерывным, так и с дискретным.
- Он обосновал необходимость регулярно измерять у больных температуру тела.
- Задолго до Зигмунда Фрейда привёл доказательства существования подсознания человека.
- 1686: Лейбниц даёт подразделение вещественных чисел на алгебраические и трансцендентные; ещё раньше он аналогично классифицировал кривые линии. Впервые в печати вводит символ интеграла (и указывает, что эта операция обратна дифференцированию).
- 1692: введено общее понятие огибающей однопараметрического семейства кривых, выведено её уравнение.
- 1693: Лейбниц рассматривает вопрос о разрешимости линейных систем; его результат фактически вводит понятие определителя. Но это открытие не вызвало тогда интереса, и линейная алгебра возникла только спустя полвека.
- 1695: Лейбниц вводит показательную функцию в самом общем виде:  $uv$ .
- 1702: совместно с Иоганном Бернулли открыл приём разложения рациональных дробей на сумму простейших. Это решает многие вопросы интегрирования рациональных функций.

# Иоганн Бернулли (27 июля 1667, Базель—1 января 1748)

- Швейцарский математик, самый знаменитый представитель семейства Бернулли.
- В 1691 году появился первый печатный труд Иоганна в Acta Eruditorum: он нашёл уравнение «цепной линии» (из-за отсутствия в то время показательной функции построение выполнялось через логарифмическую функцию). Одновременно подробное исследование кривой дали Лейбниц и Гюйгенс.
- 1692: получено классическое выражение для радиуса кривизны кривой.
- 1693: подключился к переписке брата с Лейбницем.
- 1696: Лопиталь выпускает в Париже под своим именем первый в истории учебник по математическому анализу: «Анализ бесконечно малых для исследования кривых линий» (на французском языке), в основу которого была положена первая часть конспекта Бернулли.



# Логарифмические таблицы

- Из свойств логарифма следует, что вместо трудоёмкого умножения многозначных чисел достаточно найти (по таблицам) и сложить их логарифмы, а потом по тем же таблицам выполнить потенцирование, то есть найти значение результата по его логарифму. Выполнение деления отличается только тем, что логарифмы вычитаются. Лаплас говорил, что изобретение логарифмов «продлило жизнь астрономов», многократно ускорив процесс вычислений.



- Первые таблицы логарифмов опубликовал Джон Непер (1614), и они содержали только логарифмы тригонометрических функций, причём с ошибками. Независимо от него свои таблицы опубликовал Иост Бюрги, друг Кеплера (1620). В 1617 году оксфордский профессор математики Генри Бригс опубликовал таблицы, которые уже включали десятичные логарифмы самих чисел, от 1 до 1000, с 8 (позже — с 14) знаками. Но и в таблицах Бригса обнаружились ошибки. Первое безошибочное издание на основе таблиц Вега (1783) появилось только в 1857 году в Берлине (таблицы Бремивера).
- В России первые таблицы логарифмов были изданы в 1703 году при участии Л. Ф. Магницкого. В СССР выпускались несколько сборников таблиц логарифмов.
- Брадис В. М. Четырёхзначные математические таблицы. 44-е издание, М., 1973.
- Таблицы Брадиса (1921) использовались в учебных заведениях и в инженерных расчётах, не требующих большой точности. Они содержали мантиссы десятичных логарифмов чисел и тригонометрических функций, натуральные логарифмы и некоторые другие полезные расчётные инструменты.

# Использованная литература:

- Выгодский М. Я. Справочник по элементарной математике — М.: АСТ, 2003.
- История математики под редакцией А. П. Юшкевича в трёх томах, М.: Наука.
- Том 1 С древнейших времен до начала Нового времени. (1970)
- Том 2 Математика XVII столетия. (1970)
- Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров) — М.: Наука, 1973.
- Успенский Я. В. Очерк истории логарифмов. Петроград, 1923. —78 с.
- Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, тома I, II — М.: Наука, 1960.
- Логарифмическая спираль <http://pvd37.narod.ru/image002.jpe>
- Галактики <http://www.cirota.ru/forum/images/115/115185.jpeg>