

Геометрические задания В6 ЕГЭ

Презентацию выполнил:

ученик 11 класса

Бальвас Андрей

Преподаватель:

Бисимбаева Любовь Бакеевна

ГБОУ СОШ «ОЦ»

с. Августовки.

2013год

Содержание

- Введение
- Основная часть

1. Теоретический материал

1.1 Историческая справка

1.2 Справочный материал по теме «Окружность»

2. Задания В6 ЕГЭ

2.1 Решение заданий В6

2.1.1 Центральные и вписанные углы

2.1.2 Касательная, хорда, секущая

2.1.3 Окружность, вписанная в треугольник

2.1.4 Окружность, вписанная в четырехугольник

2.1.5 Окружность, описанная вокруг треугольника

2.1.6 Окружность, описанная вокруг четырехугольника

- Заключение
- Источники

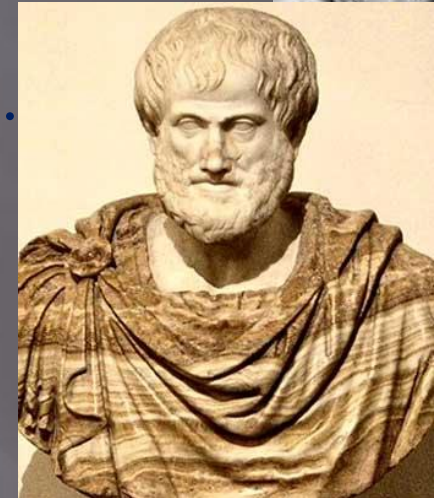
Введение

Вопросы инновационных технологий в строительстве, космонавтике, технике невозможны без умения производить необходимые чертежи и вычисления, которые требуют знания важных и интереснейших свойств окружности.



Из истории.

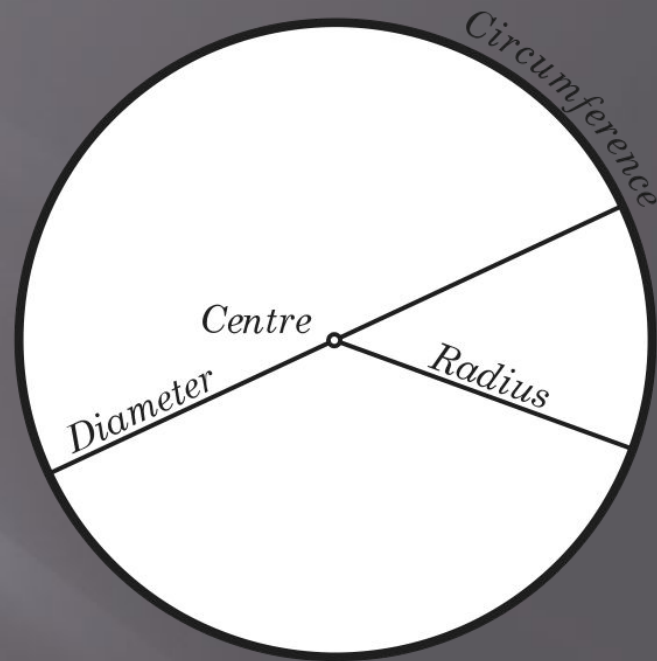
- Самая простая из всех кривых линий - окружность. Это одна из древнейших геометрических фигур. Философы древности придавали ей большое значение. Согласно Аристотелю, небесная материя, из которой состоят планеты и звезды, как самая совершенная, должна двигаться по самой совершенной линии - окружности. Сотни лет астрономы считали, что планеты движутся по окружностям. Это ошибочное мнение было опровергнуто лишь в XVII веке учением Коперника, Галилея, Кеплера и Ньютона.



Пифагор Самосский

Теоретический материал

- Окружностью называется фигура, состоящая из всех точек плоскости, находящихся от данной точки на данном расстоянии. Данная точка называется *центром* окружности, а отрезок, соединяющий центр с какой-либо точкой окружности, — *радиусом* окружности. Радиус окружности равен половине диаметра.

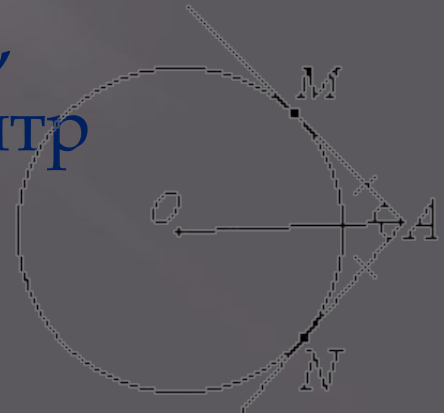


Касательная - Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, а их общая точка называется *точкой касания* прямой и окружности.

- Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.

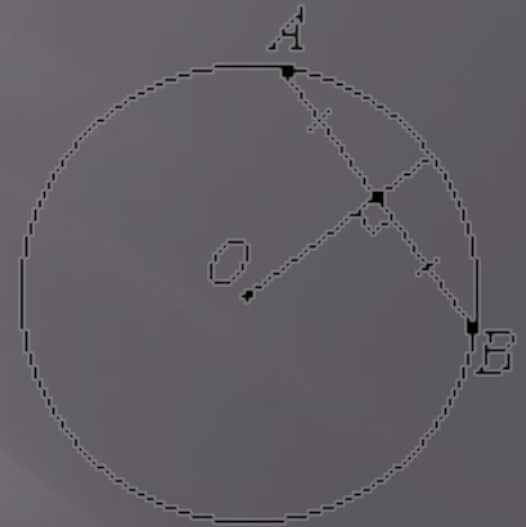


- Отрезки касательных к окружности, проведенных из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

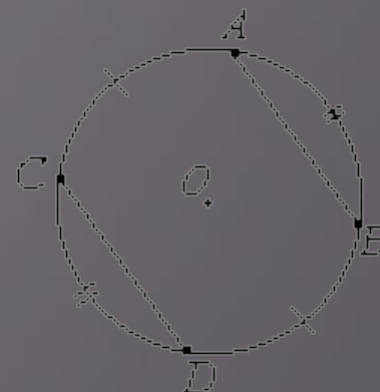


Хорда - отрезок, соединяющий две точки окружности. Хорда, проходящая через центр окружности, называется *диаметром*.

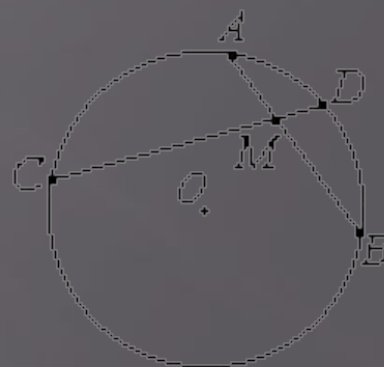
- Диаметр (радиус), перпендикулярный к хорде, делит эту хорду и обе стягиваемые ею дуги пополам. Верна и обратная теорема: если диаметр (радиус) делит пополам хорду, то он перпендикулярен этой хорде.



- Дуги, заключенные между параллельными хордами, равны.

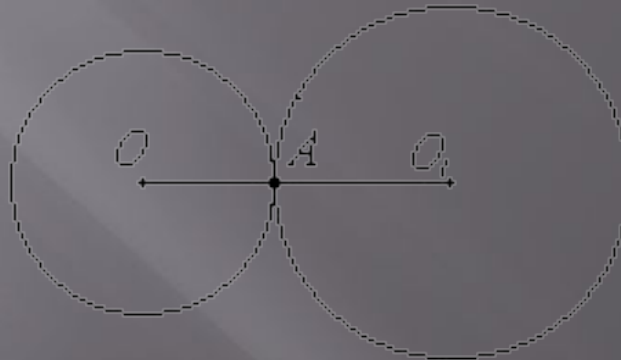


- Если две хорды окружности, AB и CD пересекаются в точке M , то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды: $AM \cdot MB = CM \cdot MD$.



Свойства окружности

- Прямая может не иметь с окружностью общих точек; иметь с окружностью одну общую точку (*касательная*); иметь с ней две общие точки (*секущая*).
- Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность, и притом только одну.
- Точка касания двух окружностей лежит на линии, соединяющей их центры.



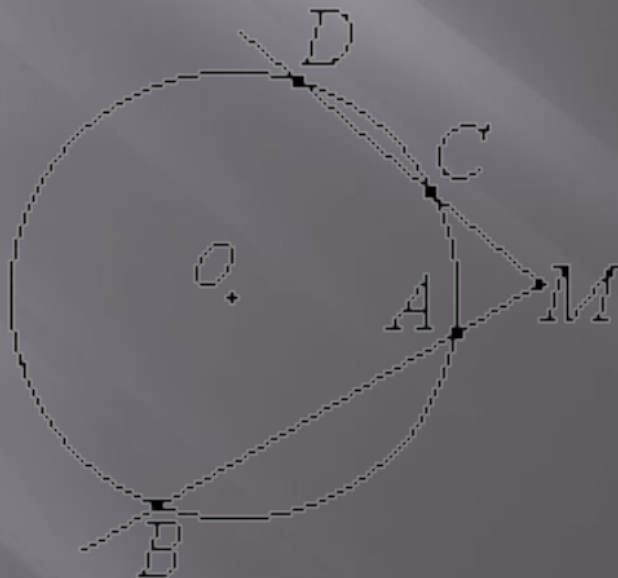
Теорема о касательной и секущей

- Если из точки, лежащей вне окружности, проведены касательная и секущая, то квадрат длины касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть: $MC^2 = MA \cdot MB$.



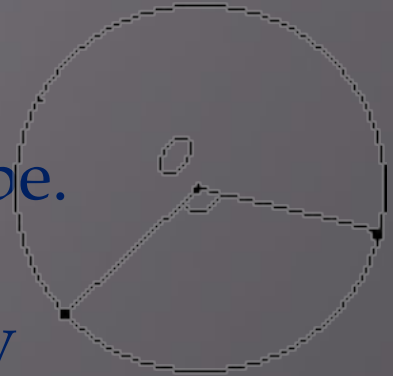
Теорема о секущих

- Если из точки, лежащей вне окружности, проведены две секущие, то произведение одной секущей на её внешнюю часть равно произведению другой секущей на её внешнюю часть. $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.



Углы в окружности

- *Центральным* углом в окружности называется угол с вершиной в ее центре.
- Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность, называется *вписанным углом*.
- Любые две точки окружности делят ее на две части. Каждая из этих частей называется *дугой* окружности. Мерой дуги может служить мера соответствующего ей центрального угла.
- Дуга называется *полуокружностью*, если отрезок, соединяющий её концы, является диаметром.



Свойства углов, связанных с окружностью

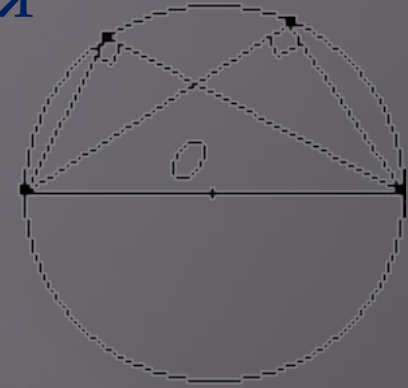
- Вписанный угол либо равен половине соответствующего ему центрального угла, либо дополняет половину этого угла до 180° .



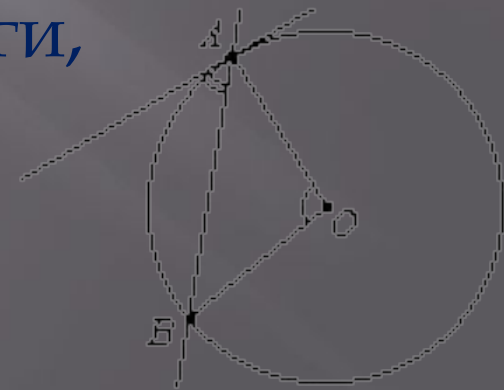
- Углы, вписанные в одну окружность и опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.



- Вписанный угол, опирающийся на диаметр, равен 90°

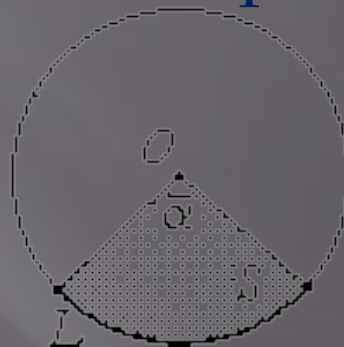


- Угол, образованный касательной к окружности и секущей, проведенной через точку касания, равен половине дуги, заключенной между его сторонами.



Длины и площади

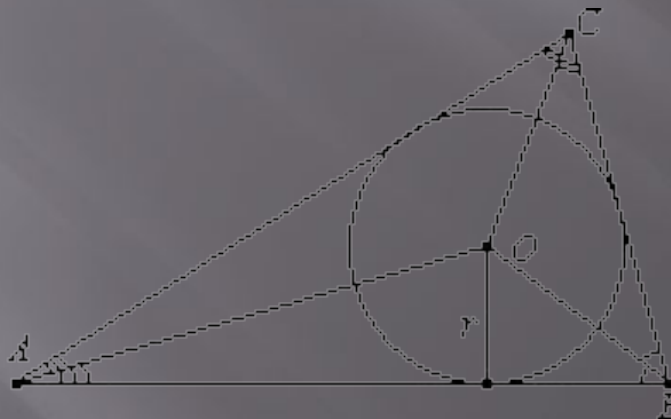
- Длина окружности C радиуса R вычисляется по формуле $C = 2\pi R$.
- Площадь S круга радиуса R вычисляется по формуле $S = \pi R^2$.
- Длина дуги окружности L радиуса R с центральным углом, измеренным в радианах, вычисляется по формуле: $L = R\alpha$
- Площадь S сектора радиуса R с центральным углом в радиан вычисляется по формуле: $S = \frac{1}{2}R^2\alpha$



Вписанные и описанные окружности

Окружность и треугольник

- Центр вписанной окружности — точка пересечения биссектрис треугольника, ее радиус r вычисляется по формуле $r = \frac{S}{p}$
- где S — площадь треугольника, $p = \frac{a+b+c}{2}$
 a — полупериметр



- Центр описанной окружности — точка пересечения серединных перпендикуляров, ее радиус R вычисляется по формулам

$$R = \frac{1}{2} \frac{a}{\sin \alpha}$$

$$R = \frac{abc}{4S}$$

- здесь a, b, c — стороны треугольника, α — угол, лежащий против стороны a , S — площадь треугольника.

- центр описанной около прямоугольного треугольника окружности лежит на середине гипотенузы,

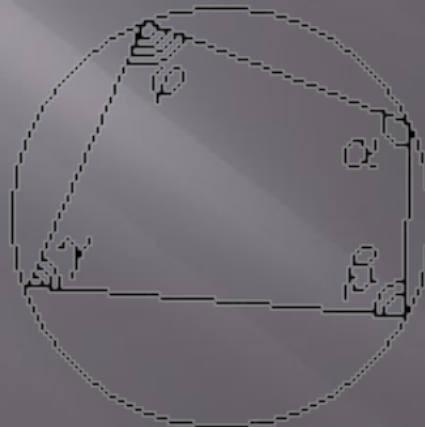
- центр описанной и вписанной окружностей треугольника совпадают только в том случае, когда этот треугольник — правильный.



Окружность и четырехугольники

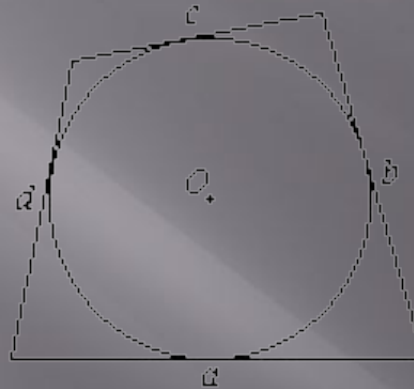
- Около выпуклого четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма его внутренних противоположных углов равна 180° .

α γ β ρ



- В четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда у него равны суммы противоположных сторон

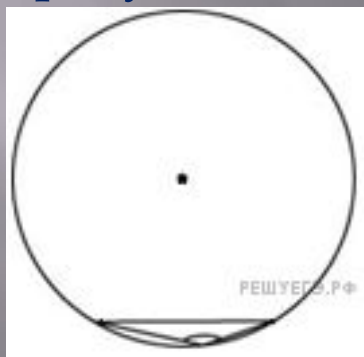
$$a + c = b + d$$



- около параллелограмма можно описать окружность тогда и только тогда, когда он является прямоугольником,
- около трапеции можно описать окружность тогда и только тогда, когда эта трапеция — равнобедренная; центр окружности лежит на пересечении оси симметрии трапеции с серединным перпендикуляром к боковой стороне,
- в параллелограмм можно вписать окружность тогда и только тогда, когда он является ромбом.

Центральные и вписанные углы

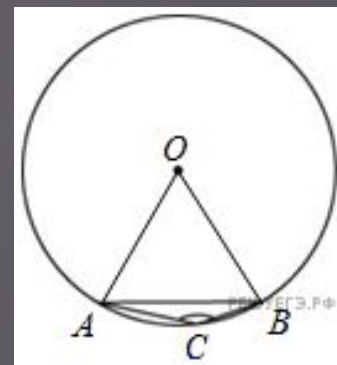
- Радиус окружности равен 1. Найдите величину тупого вписанного угла, опирающегося на хорду, равную $\sqrt{2}$. Ответ дайте в градусах.



Ответ:
135.

- **Решение.** вписанный угол дополняет половину центрального угла, опирающегося на ту же хорду 180° до .

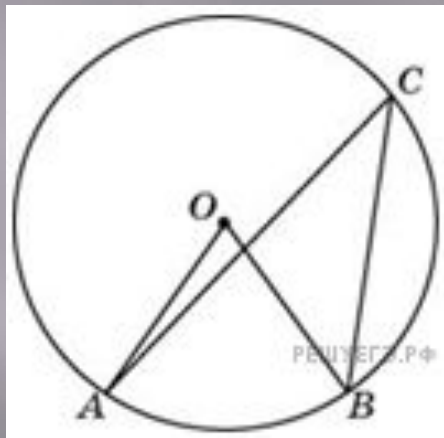
$$\angle ACB = 180^\circ - \frac{\angle AOB}{2}$$



$$\angle AOB = 90^\circ$$

$$\angle ACB = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

- Центральный угол на 36° больше острого вписанного угла, опирающегося на ту же дугу окружности. Найдите вписанный угол. Ответ дайте в градусах.

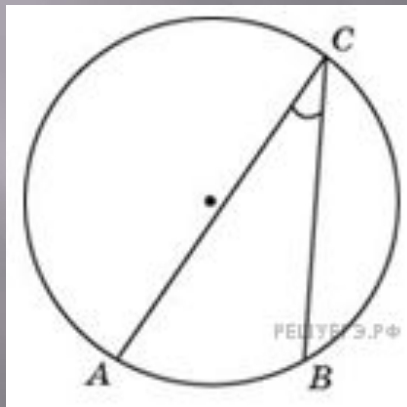


- **Решение.** вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же

$$\angle ACB + 36^\circ = 2\angle ACB \Leftrightarrow \angle ACB = 36^\circ.$$

Ответ:
36.

- Дуга окружности AC , не содержащая точку B , составляет 200° . А дуга окружности BC , не содержащая точку A , составляет 80° . Найдите вписанный угол ACB . Ответ дайте в градусах.

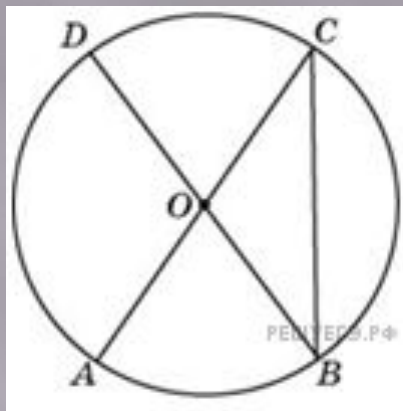


Ответ:
40.

- **Решение.**
вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается.

$$\begin{aligned}\angle ACB &= \frac{1}{2} \cup AB = \frac{1}{2}(360^\circ - \cup AC - \cup CB) = \\ &= \frac{1}{2}(360^\circ - 280^\circ) = 40^\circ.\end{aligned}$$

- В окружности с центром O диаметр AC и BD и угол $ACB = 38^\circ$. Найдите центральный угол AOD . Ответ дайте в градусах.



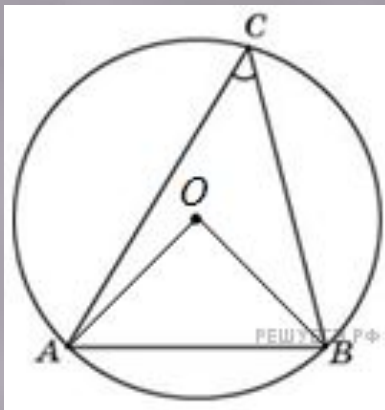
и **Решение.**

равен. Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу окружности,

$$\begin{aligned}\angle AOD &= 180^\circ - \angle AOB = \\ &= 180^\circ - 2\angle ACB = 180^\circ - 76^\circ = 104^\circ.\end{aligned}$$

Ответ:
104.

- Радиус окружности равен 1. Найдите величину острого вписанного угла, опирающегося на хорду, равную $\sqrt{2}$. Ответ дайте в градусах.



- **Решение.**

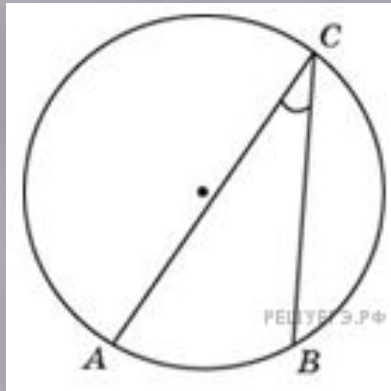
По теореме синусов для треугольника ACB имеем:

$$\sin C = \frac{AB}{2R} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Следовательно, искомый угол равен 45° .

Ответ:
45.

- Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, которая составляет $\frac{1}{5}$ окружности. Ответ дайте в градусах.

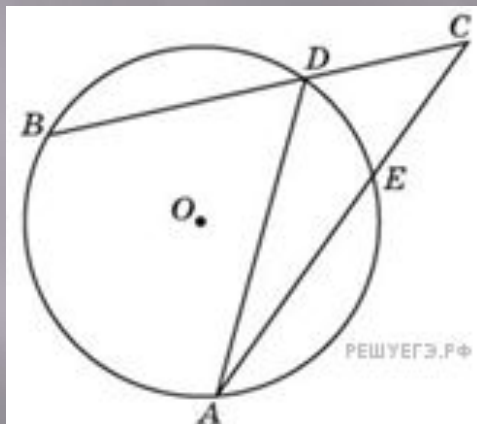


- Решение.

$$\angle ACB = \frac{1}{2} \cup AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot 360^\circ = 36^\circ.$$

Ответ:
36.

- Угол $\angle ACB$ равен 42° .
 Градусная величина дуги $\widehat{AB}$ не содержащей точек D и E равна 124° . Найдите угол $\angle DAE$.
 Ответ: 20° в градусах.



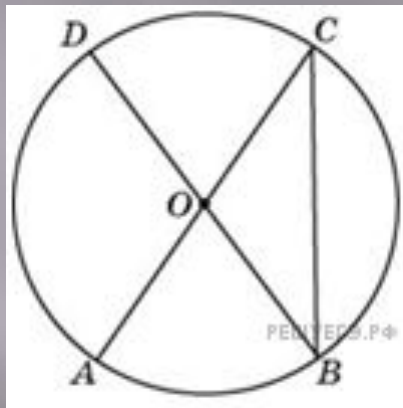
- Решение.**
 Центральный угол равен дуге, на которую он опирается, а вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается,

$$\begin{aligned}\angle DAE &= 180^\circ - (\angle ACB + \angle CDA) = \\ &= 180^\circ - (\angle ACB + 180^\circ - \angle ADB) = \\ &= \frac{\widehat{AB}}{2} - \angle ACB = 62^\circ - 42^\circ = 20^\circ.\end{aligned}$$

Ответ:
20.

- В окружности с центром O диаметр AC и хорда BD перпендикулярны. Найдите $\angle AOD$, если $\angle ACB = 110^\circ$. Ответ дайте в градусах.

$\angle ACB$



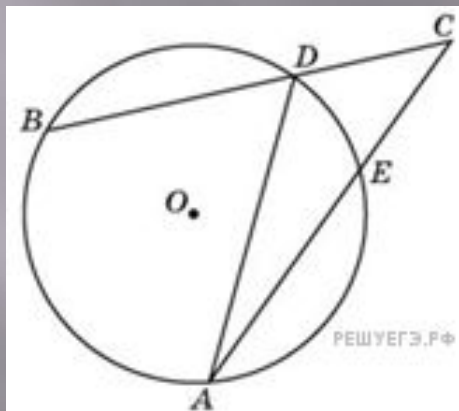
- и **Решение.**

вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу окружности,

$$\begin{aligned}\angle ACB &= \frac{1}{2} \angle AOB = \\ &= \frac{1}{2} (180^\circ - \angle AOD) = \frac{1}{2} \cdot 70^\circ = 35^\circ.\end{aligned}$$

Ответ:
35.

- Найдите угол $\angle ACB$, если вписанные углы $\angle ADB$ и $\angle DAE$ на дугах AB и DE соответственно равны 118° и 38° . Ответ дайте в градусах.

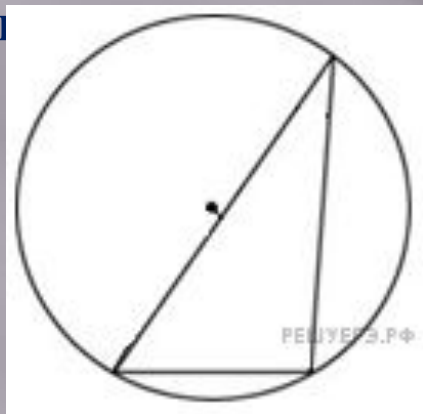


Ответ:
40.

- Решение.** Угол между двумя секущими равен полуразности высекаемых

$$\angle ACB = \frac{\angle ADB - \angle DAE}{2} = \frac{118^\circ - 38^\circ}{2} = 40^\circ.$$

- Чему равен острый вписанный угол, опирающийся на хорду, равную радиусу окружности? Ответ дайте в



Ответ:
30.

Решение.

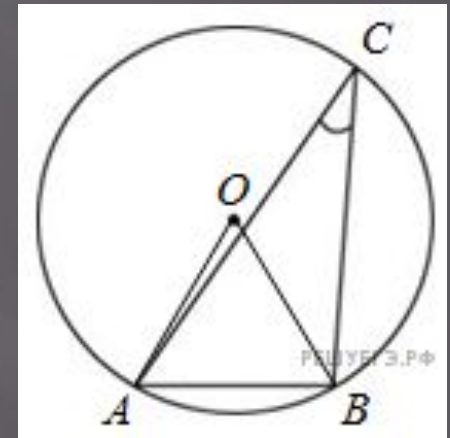
Рассмотрим треугольник AOB . Он равнобедренный, так как

$$AO = OB = AB = R$$

$$\angle AOB = 60^\circ.$$

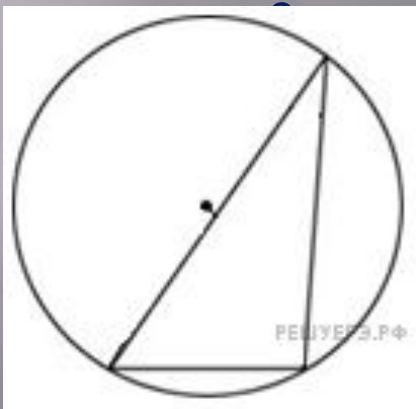
Валного угла, $\angle ACB$ опирающегося на ту же хорду, т. е.

$$\frac{\angle AOB}{2}.$$



Касательная, хорда, секущая

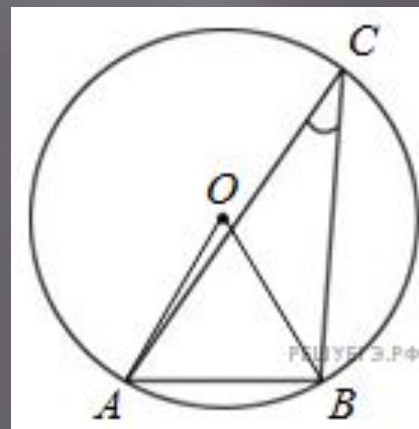
- Найдите хорду, на которую опирается угол 30° , вписанный в окружность



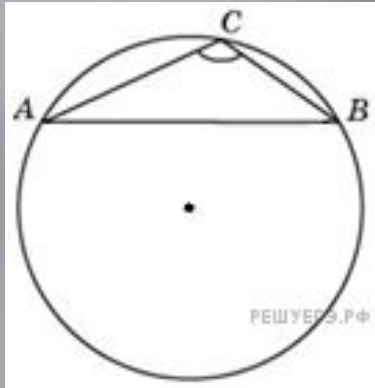
Ответ:
3.

- Решение.

Угол $\angle ACB = 30^\circ$, значит, $\angle AOB = 60^\circ$, т. к. является центральным углом, опирающимся на ту же хорду. Соответственно, треугольник AOB – равносторонний, так как $AO = OB = AB = R = 3$.



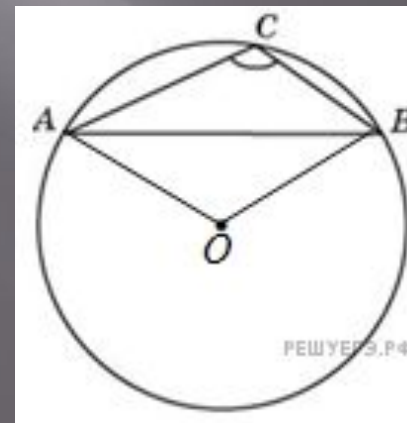
- Найдите хорду, на которую опирается угол 120° , вписанный в окружность радиуса $\sqrt{3}$.



Решение.

вписанный угол дополняет половину центрального угла, опирающегося на ту же хорду, до 180° , значит, $\angle AOB = 2(180^\circ - 120^\circ) = 120^\circ$. По теореме

$$AB = \sqrt{AO^2 + OB^2 - 2AO \cdot OB \cos \angle AOB} = \sqrt{3 + 3 + 6 \cdot \frac{1}{2}} = 3$$



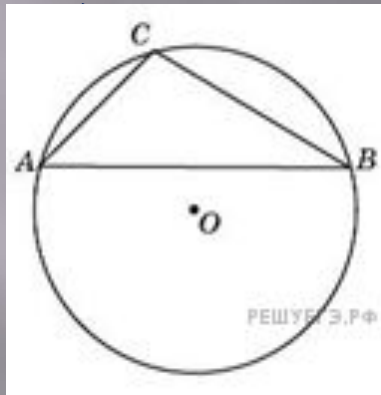
Ответ:
3.

- Найдите хорду, на которую опирается угол 90° , вписанный в окружность радиуса 1.

- **Решение.**
вписанный угол является прямым, значит, он опирается на диаметр окружности.
 $D=2R=2$

Ответ:
2.

- Хорда АВ делит окружность на две части, градусные величины которых относятся как 5:7. Под каким углом видна эта хорда из точки С, принадлежащей меньшей дуге окружности? Ответ



х.

Ответ:
105.

Решение.

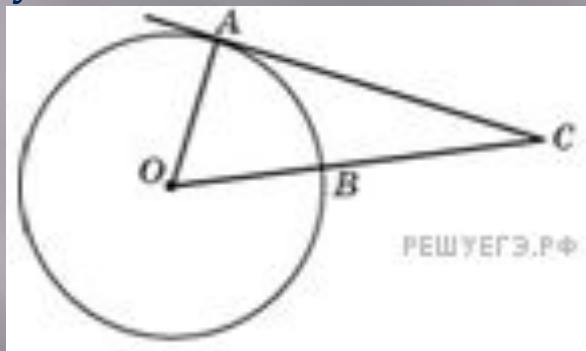
Из точки С хорда АВ видна под углом ACB . Пусть большая часть окружности равна $7x$, тогда меньшая

$$7x + 5x = 360^\circ \Leftrightarrow 12x = 360^\circ \\ \Leftrightarrow x = 30^\circ.$$

Значит, меньшая дуга окружности равна 150° , а большая — 210°

Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается, значит, опирающийся на большую дугу угол ACB равен 105°

- Угол $\angle ACO$ равен 28° , где O – центр окружности. Его сторона CA касается окружности. Найдите величину меньшей дуги AB окружности, заключенной внутри этого угла. Ответ дайте в



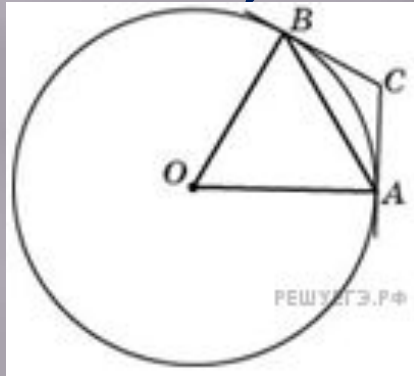
- Решение.**

касательная к окружности перпендикулярна радиусу, центральный угол равен дуге, на которую он опирается, значит, треугольник OAC – прямоугольный и

$$\begin{aligned} \angle AOB = \angle AOC = \\ = 90^\circ - \angle ACO = 90^\circ - 28^\circ = 62^\circ. \end{aligned}$$

Ответ:
62.

- Через концы A , B дуги окружности в 62° проведены касательные AC и BC . Найдите угол ACB . Ответ

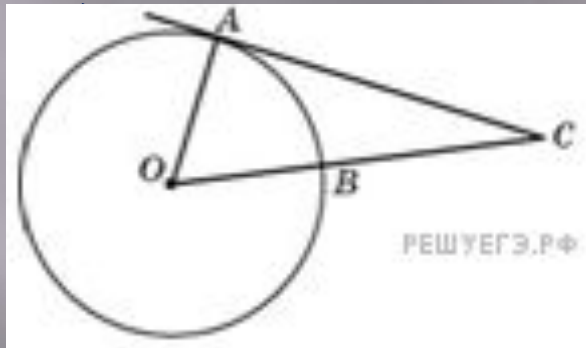


- Решение.**
Угол между касательной и хордой равен половине заключенной между ними дуги. В

$$\begin{aligned}\angle ACB &= 180^\circ - (\angle BAC + \angle CBA) = \\ &= 180^\circ - \cup AB = 180^\circ - 62^\circ = 118^\circ.\end{aligned}$$

Ответ:
118.

- Найдите угол $\angle ACO$, если его сторона CA касается окружности, O – центр окружности, а дуга меньшая дуга окружности AB , заключенная внутри этого угла, равна 64° . Ответ



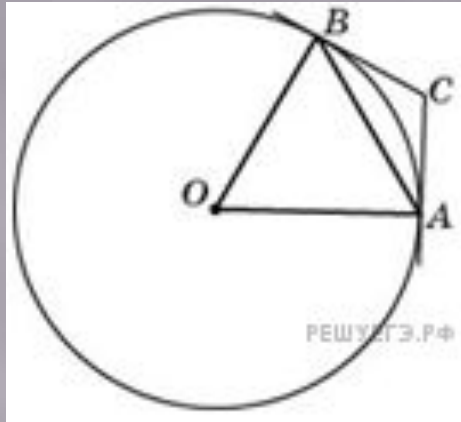
- Решение.**

касательная к окружности перпендикулярна радиусу, центральный угол равен дуге, на которую он опирается, значит, треугольник OAC –

$$\begin{aligned}\angle ACO &= 90^\circ - \angle AOC = \\ &= 90^\circ - \angle AOB = 90^\circ - 64^\circ = 26^\circ.\end{aligned}$$

Ответ:
26.

- Касательные CA и CB к окружности образуют угол ACB , равный 122° .
Найдите величину меньшей дуги AB , стягиваемой точками



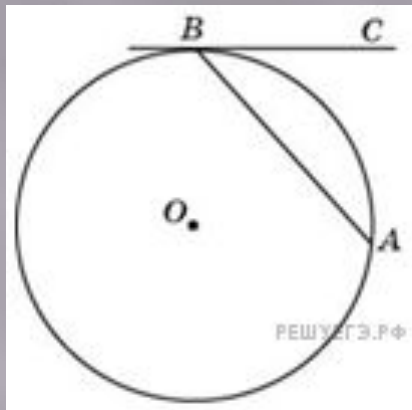
ите в

- Решение.**
угол между касательной и хордой равен половине дуги, стягиваемой хордой, рассмотрим

$$\begin{aligned} \angle ACB &= 2\angle BAC = \angle BAC + \angle CBA = \\ &= 180^\circ - \angle AOB = 180^\circ - 122^\circ = 58^\circ. \end{aligned}$$

Ответ:
58.

- Хорда АВ стягивает дугу окружности в 92° . Найдите угол ABC между этой хордой и касательной к окружности, проведенной через точку В. Ответ дайте

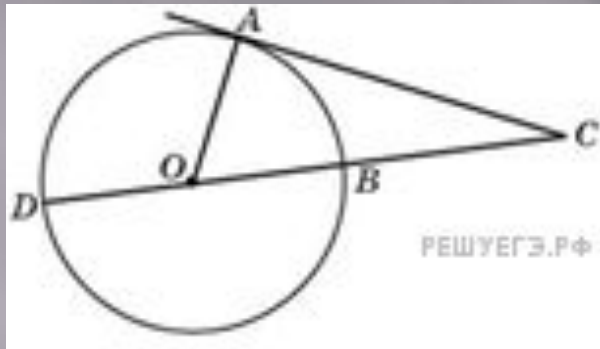


- Решение.**
угол между касательной и хордой равен половине дуги, стягиваемой хордой

$$\angle ABC = \frac{\cup AB}{2} = \frac{92^\circ}{2} = 46^\circ.$$

Ответ:
46.

- Угол $\angle ACO$ равен 24° . Его сторона CA касается окружности. Найдите градусную величину большей дуги AD окружности, заключенной внутри этого



- Решение.**

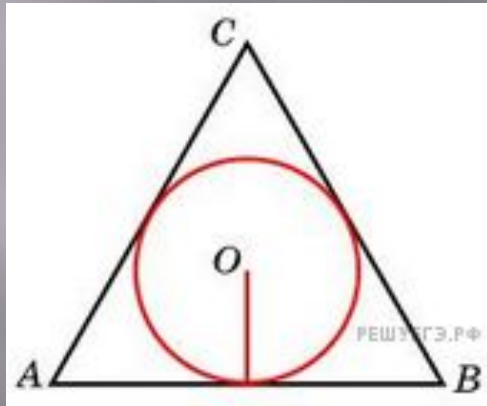
Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, центральный угол равен дуге, на которую он опирается, значит, треугольник OAC –

$$\begin{aligned} \angle AOD &= \angle DOA = 180^\circ - \angle AOB = \\ &= 180^\circ - (90^\circ - \angle ACO) = \\ &= 180^\circ - 66^\circ = 114^\circ \end{aligned}$$

Ответ:
114.

Окружность, вписанная в треугольник

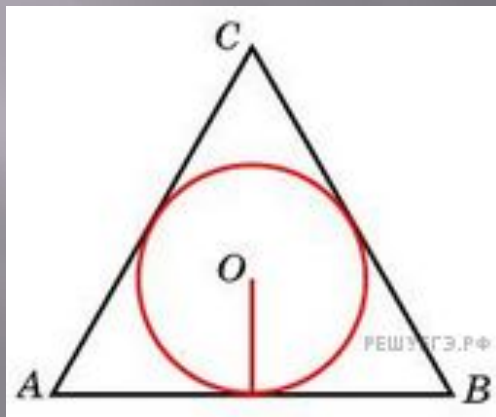
- Найдите радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, высота которого равна 6.



- Решение.**
Радиус круга, вписанного в равносторонний треугольник, равен одной трети высоты. Поэтому он равен 2.

Ответ:
2.

- Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, равен $\frac{\sqrt{3}}{6}$.
Найдите сторону этого треугольника.



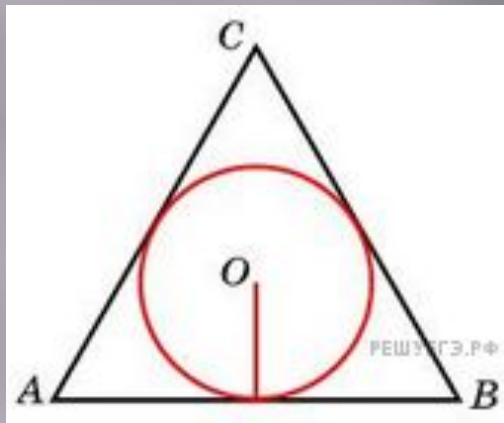
Ответ:
1.

- Решение.

$$r = \frac{2S_{ABC}}{P_{ABC}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} AB^2 \sin A}{3AB} = \frac{AB \sin A}{3},$$

$$AB = \frac{3r}{\sin A} = \frac{3r}{\sin 60^\circ} = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 1.$$

- Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, равен 6. Найдите высоту этого треугольника.



- **Решение.**

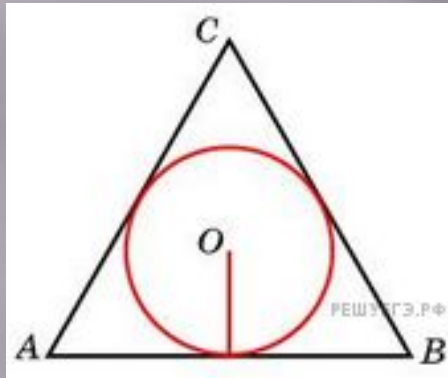
$$\begin{aligned} r &= \frac{2S_{ABC}}{P_{ABC}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} AC^2 \sin 60^\circ}{3AC} = \\ &= \frac{AC \sin 60^\circ}{3} = \frac{h}{\sin 60^\circ} \cdot \frac{\sin 60^\circ}{3} = \frac{h}{3}, \end{aligned}$$

значит,

$$h = 3r = 18.$$

Ответ:
18.

- Сторона правильного треугольника равна $\sqrt{3}$.
Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.



- **Решение.**

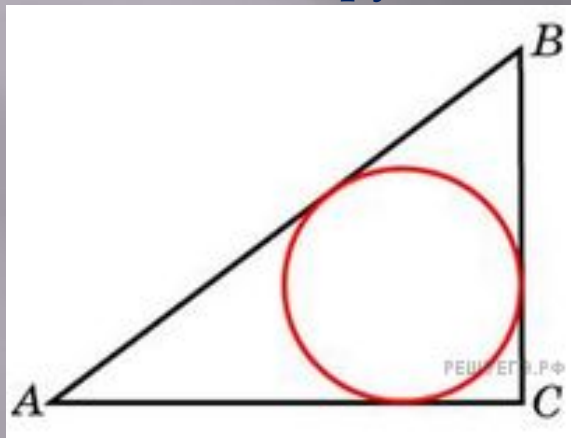
Радиус вписанной в треугольник окружности равен отношению площади к полупериметру:

$$r = \frac{S_{ABC}}{p_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} AB^2 \sin A}{\frac{3AB}{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3} \sin 60^\circ}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,5.$$

Ответ:
0,5.

- В треугольнике ABC $AC=4$, $BC=3$, угол C равен 90° . Найдите радиус вписанной окружности.



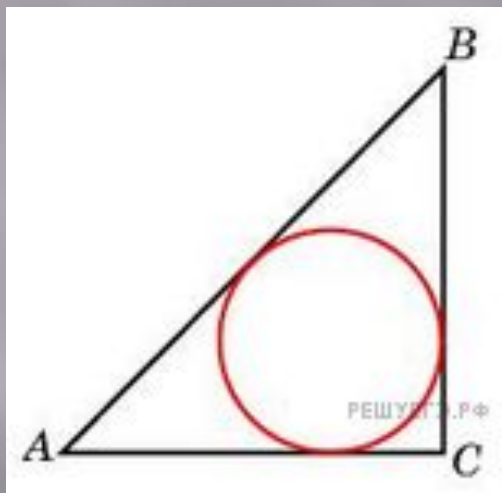
- Решение.**

$$\begin{aligned} r &= \frac{AC + BC - AB}{2} = \\ &= \frac{AC + BC - \sqrt{AC^2 + BC^2}}{2} = \frac{7 - \sqrt{25}}{2} = 1. \end{aligned}$$

Ответ:

1.

- Катеты равнобедренного прямоугольного треугольника равны $2 + \sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, вписанной в этот

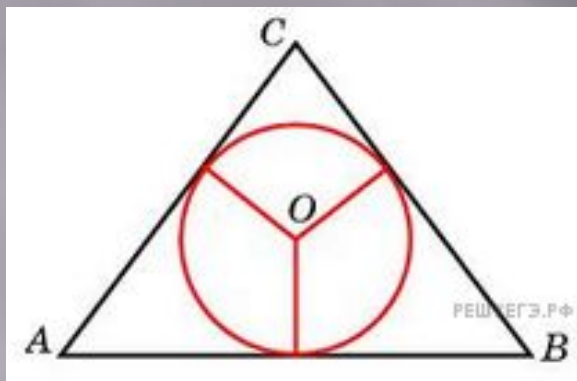


- Решение.**

$$r = \frac{a + b - c}{2} = \frac{2a - a\sqrt{2}}{2} = \frac{a(2 - \sqrt{2})}{2} = \frac{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})}{2} = 1.$$

Ответ:
1.

- Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 5, основание равно 6. Найдите радиус вписанной окружности.



- Решение.**

$$r = \frac{2S_{ABC}}{P_{ABC}}.$$

- Для нахождения площади, воспользуемся формулой Герона:

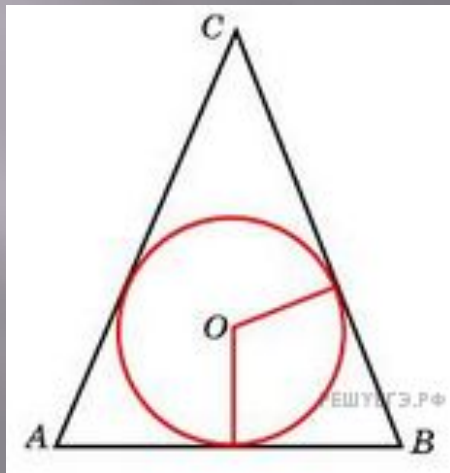
$$S_{ABC} = \sqrt{\frac{P_{ABC}}{2} \left(\frac{P_{ABC}}{2} - AB \right) \left(\frac{P_{ABC}}{2} - BC \right) \left(\frac{P_{ABC}}{2} - AC \right)} =$$
$$= \sqrt{8 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2} = \sqrt{16 \cdot 9} = 12$$

тогда:

$$r = \frac{2 \cdot 12}{16} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

Ответ:
1,5.

- Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник, делит в точке касания одну из боковых сторон на два отрезка, длины которых равны 5 и 3, считая от вершины, противоположащей основанию. Найдите

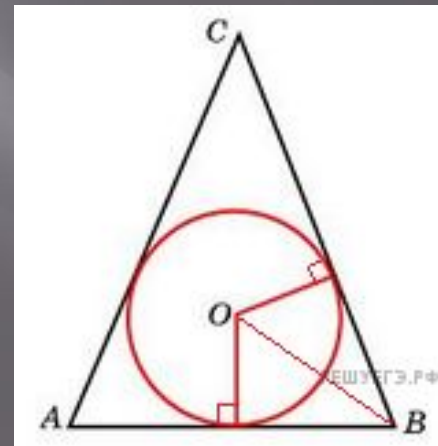


ьника.

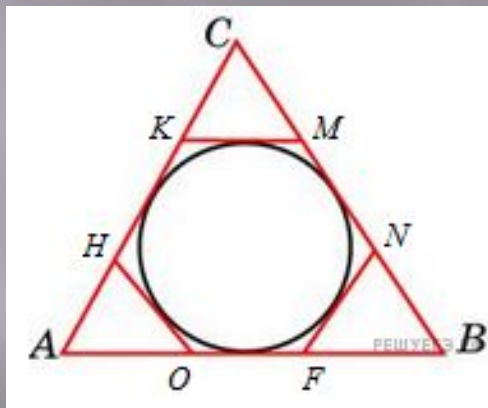
Ответ:
22.

- Решение.**
треугольники НОВ и КОВ равны, т. к. являются прямоугольными с общей гипотенузой и равными катетами,

$$P_{ABC} = AC + CB + AN + NB = 2CB + 2NB = 16 + 6 = 22.$$



- К окружности, вписанной в треугольник ABC , проведены три касательные. Периметры отсеченных треугольников равны 6, 8, 10. Найдите периметр данного

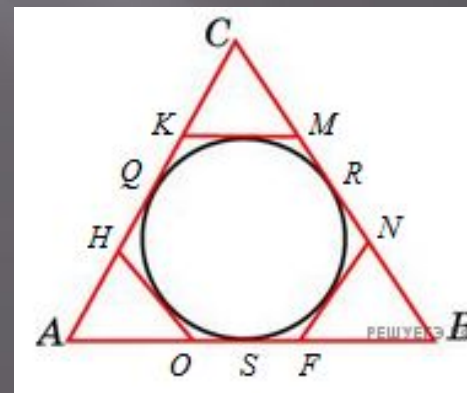


Ответ:
24.

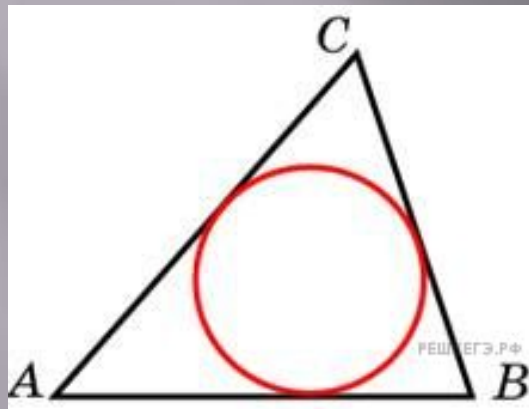
- Решение.**
Отрезки касательных, проведенных к окружности из точек K, H, O, F, N, M , соответственно равны друг другу. Поэтому

$$CQ + CR = P_{CKM}, \quad AQ + AS = P_{AHO}, \quad BS + BR = P_{BFN}.$$

$$P_{ABC} = P_{AHO} + P_{CKM} + P_{BFN} = 24.$$



- Площадь треугольника равна 24, а радиус вписанной окружности равен 2. Найдите периметр



- Решение.**

Из

$$S = pr$$

формулы находим, что периметр описанного многоугольника равен отношению удвоенной площади к радиусу

$$P = \frac{2S}{r} = \frac{2 \cdot 24}{2} = 24$$

ности:

Ответ:
24.

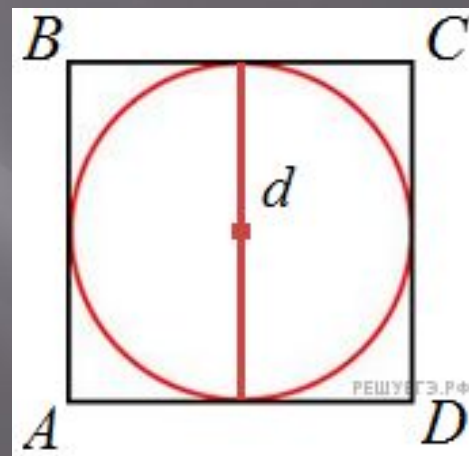
Окружность, вписанная в четырехугольник

- Найдите сторону квадрата, описанного около окружности радиуса 4.



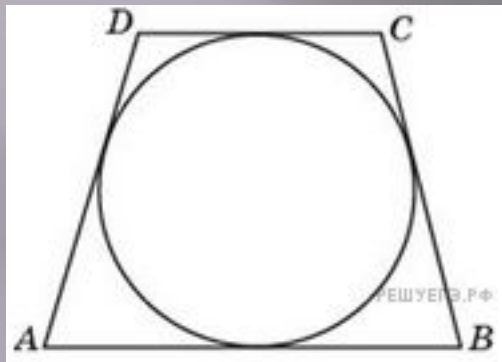
- Решение.

$$AB = d = 2r = 8.$$



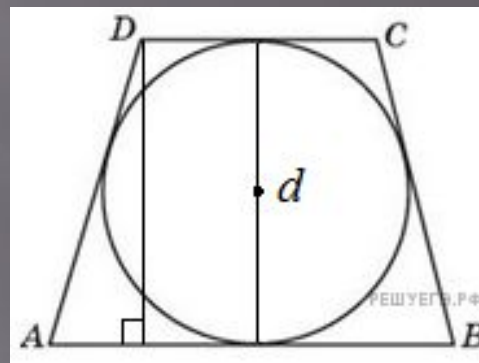
Ответ:
8.

- Найдите высоту трапеции, в которую вписана окружность радиуса 1.



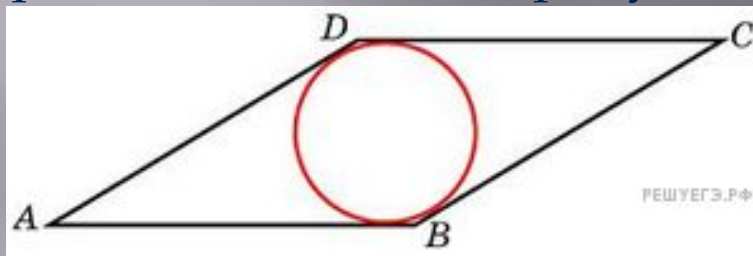
- Решение.

$$h = D = 2r = 2.$$



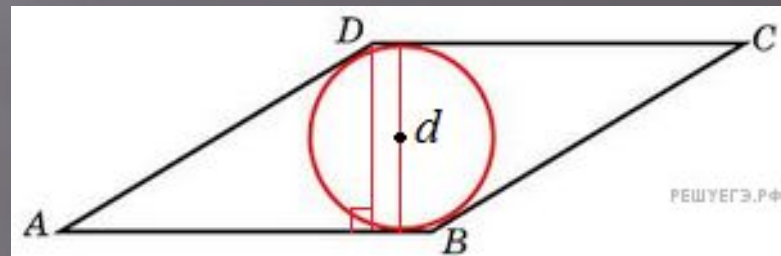
Ответ:
2.

- Острый угол ромба равен 30° . Радиус вписанной в этот ромб окружности равен 2. Найдите сторону



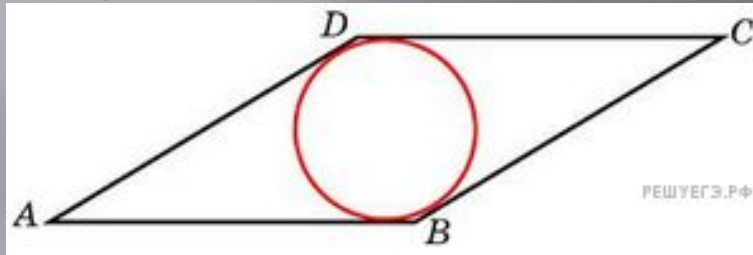
- Решение.**

$$AD = \frac{DH}{\sin A} = \frac{d}{\sin A} = \frac{2r}{\sin A} = \frac{4}{\sin 30^\circ} = 8.$$



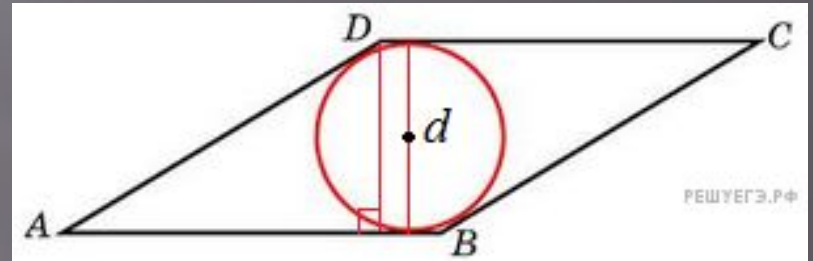
Ответ:
8.

- Сторона ромба равна 1, острый угол равен 30° .
Найдите радиус вписанной окружности этого ромба.



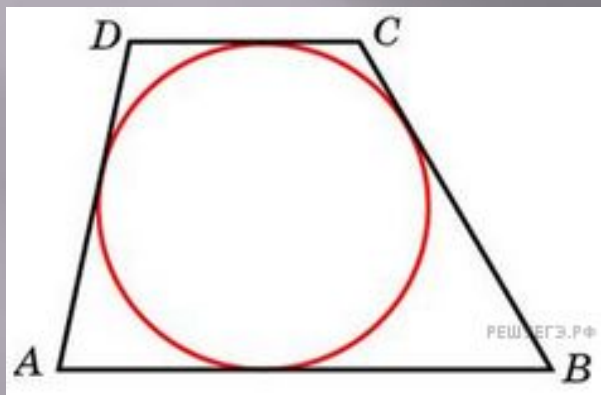
- Решение.**

$$r = \frac{d}{2} = \frac{DH}{2} = \frac{AD \sin A}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0,25.$$



Ответ:
0,25.

- Около окружности описана трапеция, периметр которой равен 40. Найдите ее среднюю линию.

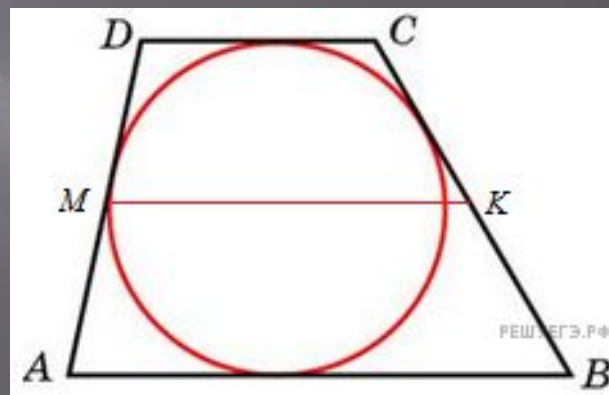


- Решение.**

В выпуклый четырехугольник можно вписать окружность тогда

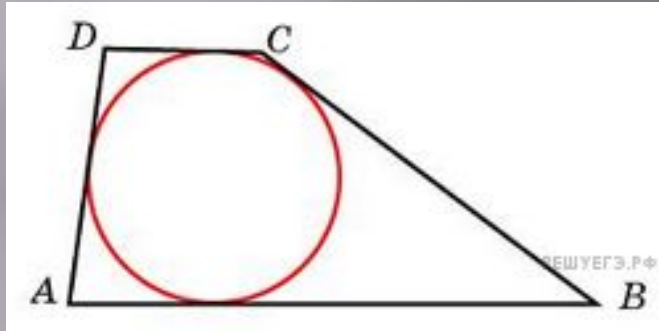
$$AB + CD = BC + AD, \text{ тогда}$$

$$MK = \frac{DC + AB}{2} = \frac{P_{ABCD}}{4} = 10.$$



Ответ:
10.

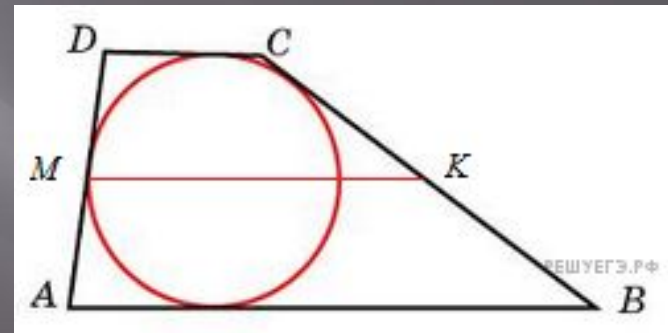
- Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 3 и 5. Найдите среднюю



- Решение.**
в выпуклый четырехугольник можно вписать окружность тогда

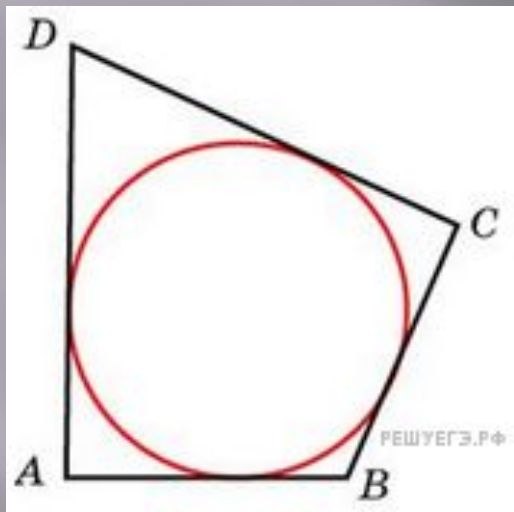
$$AB + CD = BC + AD, \text{ а}$$

$$MK = \frac{DC + AB}{2} = \frac{AD + BC}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$



Ответ:
4.

- В четырехугольник ABCD вписана окружность, $AB=10$, $CD=16$. Найдите периметр четырехугольника.

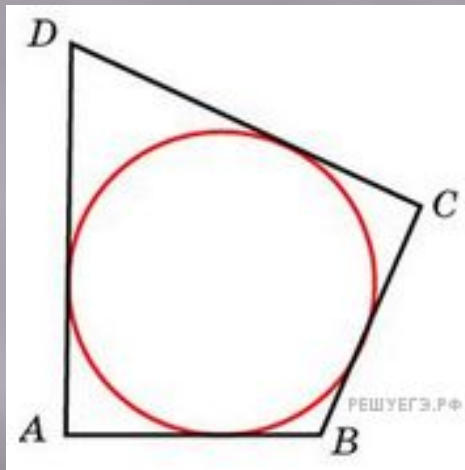


- Решение.**
В выпуклый прямоугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда

$$P_{ABCD} = AB + CD + BC + DA = 2(AB + CD) = 52.$$

Ответ:
52.

- Периметр четырехугольника, описанного около окружности, равен 24, две его стороны равны 5 и 6. Найдите большую из

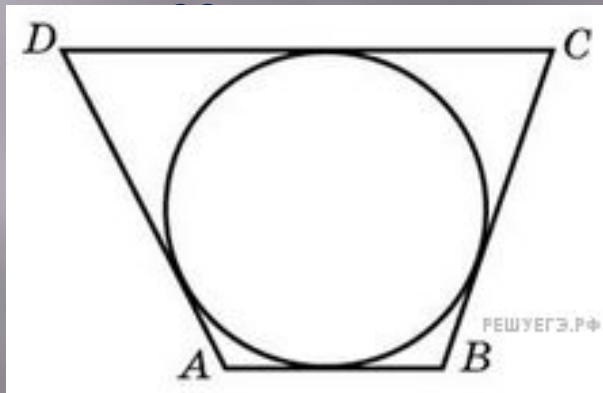


Ответ:
7.

- Решение.**
Пусть большая из двух оставшихся сторон имеет длину x , тогда длина четвертой стороны равна $24 - 4 - 5 - x = 13 - x$. В выпуклый четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы длин его противоположных сторон равны. В этом случае периметр четырехугольника вдвое больше суммы длин противоположных сторон, а значит, стороны длиной x и $13 - x$, как и стороны длиной 5 и 6, не могут быть противоположными и являются смежными. Итак, напротив большей из первой пары смежных сторон с длинами x и $13 - x$ лежит меньшая из второй пары смежных сторон с длинами 5 и 6.
$$x + 5 = (13 - x) + 6 \Leftrightarrow x = 7.$$

равны, имеем:

- Три стороны описанного около окружности четырехугольника относятся (в последовательном порядке) как 1:2:3. Найдите большую сторону этого четырехугольника, если известно, что его периметр



Ответ:
12.

- Решение.**

в выпуклый прямоугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда $AB+CD=BC+AD$. Пусть меньшая сторона равна

$$x + 3x = \frac{P}{2} \Leftrightarrow 4x = 16 \Leftrightarrow x = 4,$$

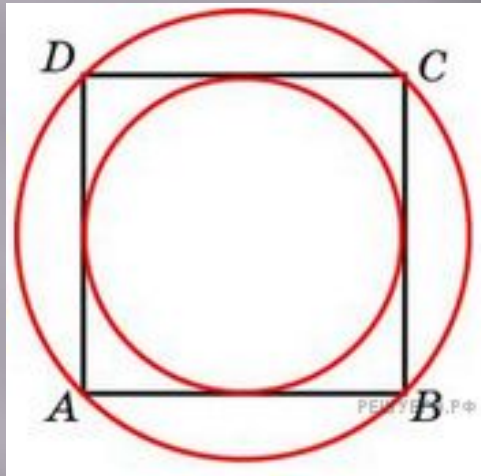
значит, четвертая сторона

$$\frac{P}{2} - 2x = 16 - 8 = 8.$$

Тогда большая сторона

$$3x = 12.$$

- Около окружности, радиус которой равен $\sqrt{3}$, описан квадрат. Найдите радиус окружности, описанной около этого квадрата.



- Решение.**

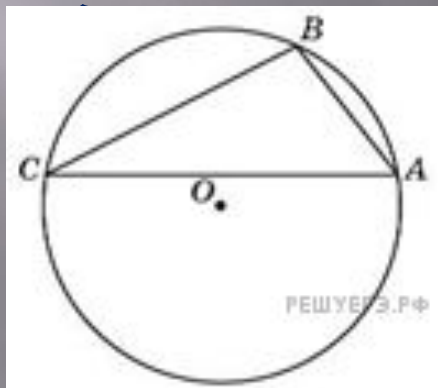
Сторона квадрата вдвое больше радиуса вписанной в него окружности. Поэтому $AB=2\sqrt{8}$. Радиус описанной вокруг квадрата окружности равен половине его диагонали.

$$R = \frac{AC}{2} = \frac{AB\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{8}\sqrt{2}}{2} = \sqrt{16} = 4.$$

Ответ:
4.

Окружность, описанная вокруг треугольника

- Точки А, В, С, расположенные на окружности, делят ее на три дуги, градусные величины которых относятся как 1:3:5. Найдите больший угол треугольника АВС. Ответ



- Решение.**

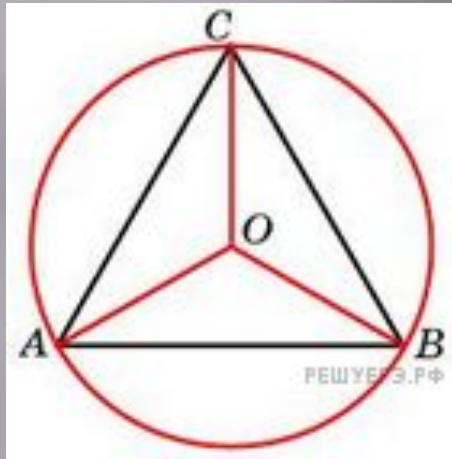
пусть меньшая часть окружности равна x тогда $x + 3x + 5x = 360^\circ$, $x = 40^\circ$

Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается, значит,

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC = \frac{1}{2} \cdot 5x = \frac{5}{2} \cdot 40^\circ = 100^\circ.$$

Ответ:
100.

- Радиус окружности, описанной около правильного треугольника, равен $\sqrt{3}$. Найдите

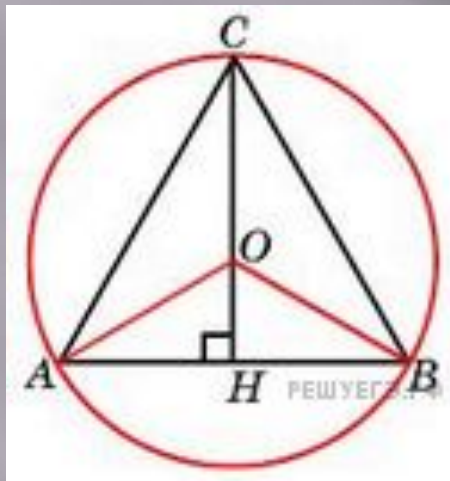


- **Решение.**
треугольник ABC правильный, значит, все углы равны по 60° .

$$CB = 2R \sin A = 2\sqrt{3} \sin 60^\circ = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3.$$

Ответ:
3.

- Радиус окружности, описанной около правильного треугольника, равен 3. Найдите высоту этого треугольника.

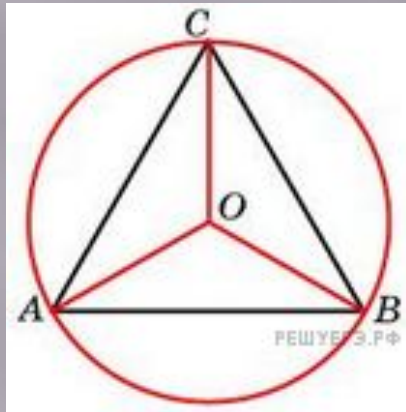


- **Решение.**
треугольник ABC правильный, значит, все углы равны по 60° .

$$CH = AC \sin A = 2R \sin B \sin A = 2 \cdot 3 \sin^2 60^\circ = 6 \cdot \frac{3}{4} = 4,5.$$

Ответ:
4,5.

- Сторона правильного треугольника равна .
Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

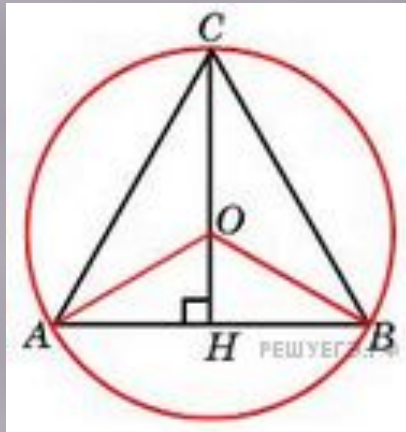


- Решение.**
треугольник ABC правильный, значит, все углы равны по 60° .

$$R = \frac{AC}{2 \sin A} = \frac{\sqrt{3}}{2 \sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 1.$$

Ответ:
1.

- Высота правильного треугольника равна 3. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

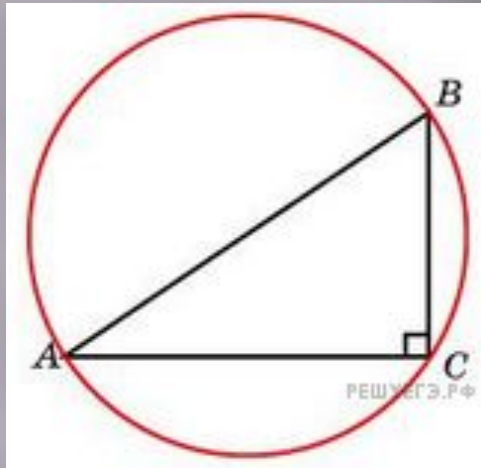


- Решение.**
треугольник ABC правильный, значит, все углы равны по 60° .

$$R = \frac{AC}{2 \sin B} = \frac{CH}{2 \sin A \cdot \sin B} =$$
$$= \frac{3}{2 \sin^2 60^\circ} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 2.$$

Ответ:
2.

- Гипотенуза
прямоугольного
треугольника равна 12.
Найдите радиус
описанной окружности

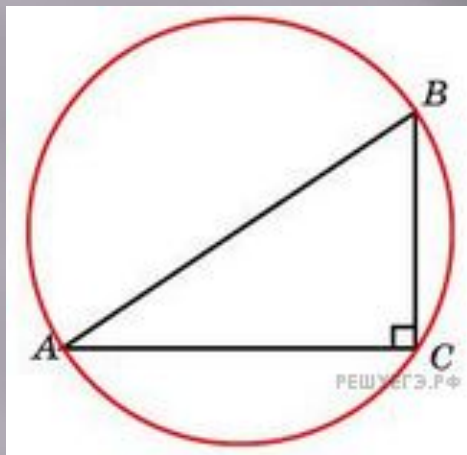


- Решение.**
вписанный угол
опирающийся на диаметр
окружности, является
прямым, значит, АВ –
диаметр.

$$R = \frac{D}{2} = 6.$$

Ответ:
6.

- В треугольнике ABC $BC=6$, угол C равен 90° . Радиус описанной окружности этого треугольника равен 5. Найдите AC.

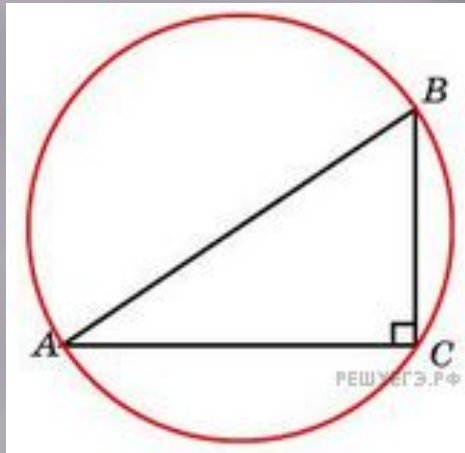


- Решение.**
Гипотенуза прямоугольного треугольника является диаметром описанной вокруг него окружности, поэтому ее длина 10. Тогда

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{100 - 36} = 8.$$

Ответ:
8.

- В треугольнике ABC $AC=4$, $BC=3$, угол C равен 90° . Найдите радиус описанной окружности этого треугольника.

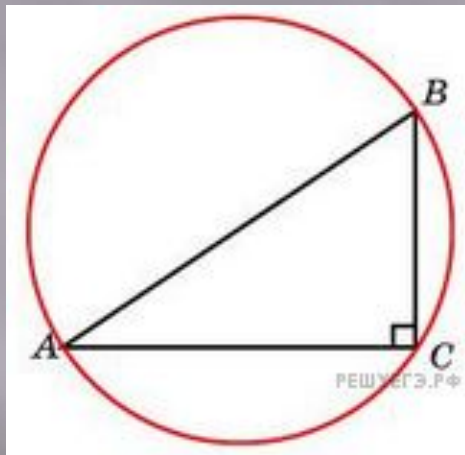


- Решение.**
вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности, является прямым, значит, AB – диаметр.

$$R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{AC^2 + BC^2}}{2} = \frac{5}{2} = 2,5.$$

Ответ:
2,5

- Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен 4. Найдите гипотенузу этого треугольника.

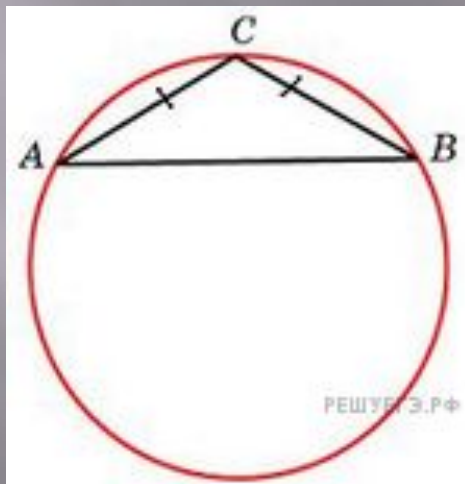


- **Решение.**
вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности, является прямым, значит, АВ–диаметр.

$$AB = D = 2R = 8.$$

Ответ:
8.

- Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 1, угол при вершине, противолежащей основанию, равен 120° . Найдите диаметр описанной окружности



а.

- Решение.**

Сумма двух равных углов при основании треугольника равна 60° , поэтому каждый из них равен 30° . Тогда по теореме

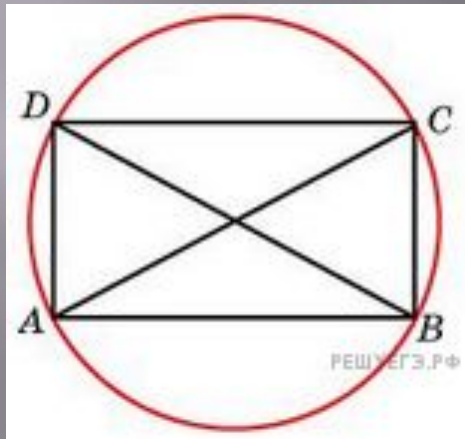
$$d = \frac{BC}{\sin A} = \frac{1}{\sin 30^\circ} = 2.$$

Ответ:

2.

Окружность, описанная вокруг четырехугольника

- Меньшая сторона прямоугольника равна 6. Угол между диагоналями равен 60° . Найдите радиус описанной окружности этого прямоугольника.

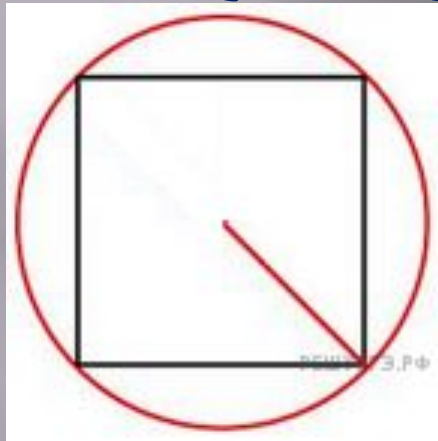


- Решение.**
рассмотрим треугольник AOD. Он равнобедренный, т. к. $AO=OD=R$;
 $\angle A=\angle D=60^\circ$ значит, треугольник AOD – равносторонний, тогда

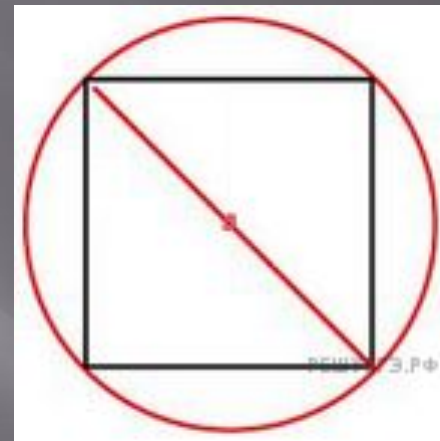
$$R = AO = AD = 6.$$

Ответ:
6.

- Найдите радиус окружности, описанной около квадрата $\sqrt{8}$.



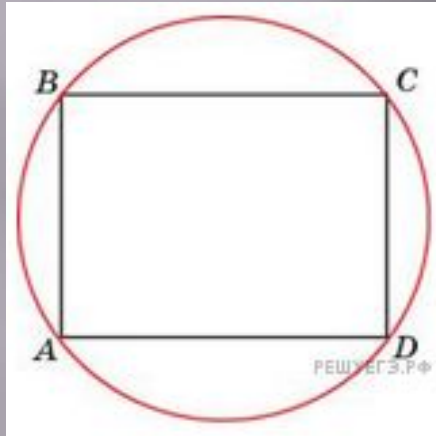
- Решение.**
угол А является прямым, он опирается на диагональ BD, которая является диаметром.



$$R = \frac{BD}{2} = \frac{AB\sqrt{2}}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Ответ:
2.

- Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольника, две стороны которого равны 3

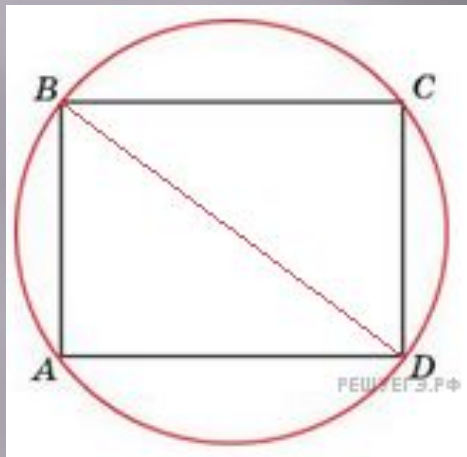


- Решение.**
угол А является прямым, он опирается на диагональ BD которая является диаметром

$$R = \frac{BD}{2} = \frac{\sqrt{AB^2 + AD^2}}{2} = \frac{5}{2} = 2,5.$$

Ответ:
2,5.

- Найдите диагональ прямоугольника, вписанного в окружность, радиус которой равен 5.

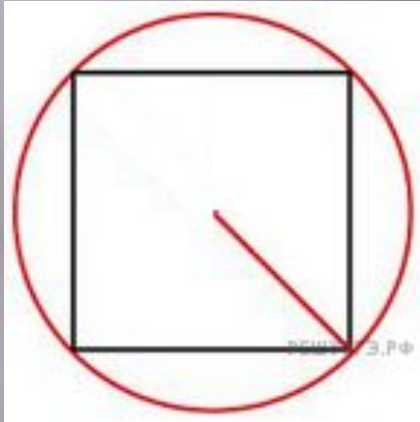


- Решение.**
угол A является прямым, он опирается на диагональ BD которая является диаметром.

$$BD = 2R = 10.$$

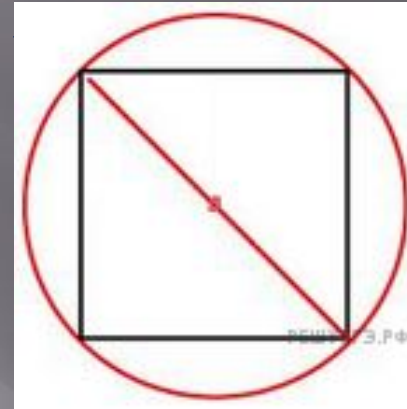
Ответ:
10.

- Найдите сторону квадрата, вписанного в окружность радиуса $\sqrt{8}$.



- Решение.**

угол А является прямым, он опирается на диагональ BD, которая является диаметром окружности.



$$AB = \frac{BD}{\sqrt{2}} = \frac{D}{\sqrt{2}} = \frac{2R}{\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 4.$$

Ответ:

4.

- Углы A , B и C четырехугольника относятся как $1:2:3$. Найдите угол D , если около данного четырехугольника можно описать окружность. Ответ дайте в градусах.

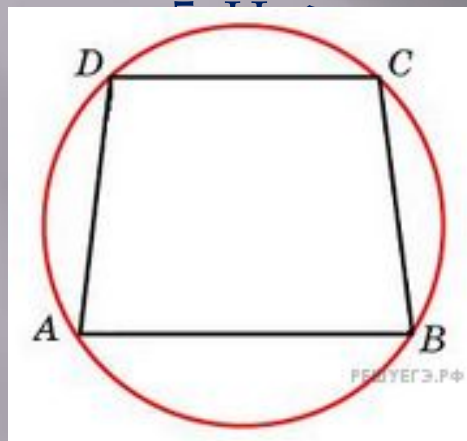
- **Решение.**

так как вокруг четырехугольника можно описать окружность, то сумма его противоположных углов

$$\begin{aligned}\angle A + \angle C &= \angle A + 3\angle A = 180^\circ \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \angle A &= 45^\circ, \angle B = 90^\circ. \\ \angle D &= 180^\circ - \angle B = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.\end{aligned}$$

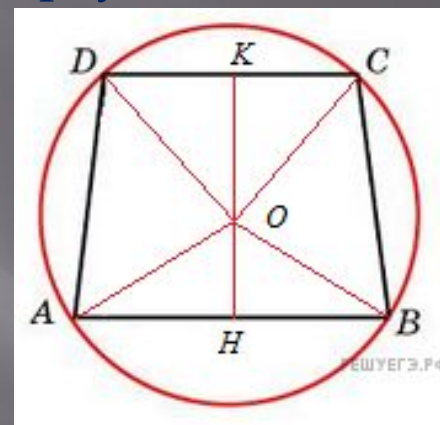
Ответ:
90.

- Основания равнобедренной трапеции равны 8 и 6. Радиус описанной окружности равен 5. Найти высоту



Решение.

высота трапеции $KH = KO + OH$ и O — центр окружности, K и H — высоты равнобедренных треугольников DOC и AOB соответственно. По теореме Пифагора:



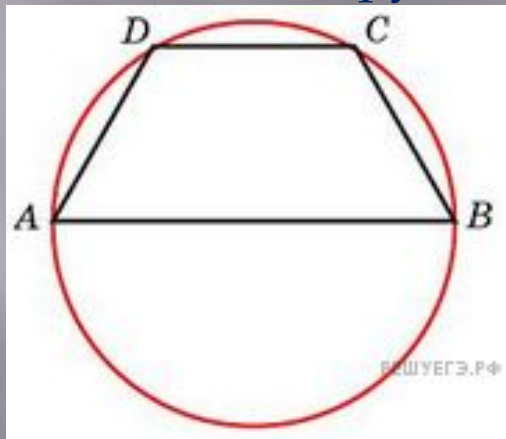
$$KO = \sqrt{OC^2 - KC^2} = \sqrt{R^2 - \frac{DC^2}{4}} = \sqrt{25 - 9} = 4,$$

$$OH = \sqrt{OB^2 - HB^2} = \sqrt{R^2 - \frac{AB^2}{4}} = \sqrt{25 - 16} = 3.$$

$$KH = KO + OH = 7.$$

Ответ:
7.

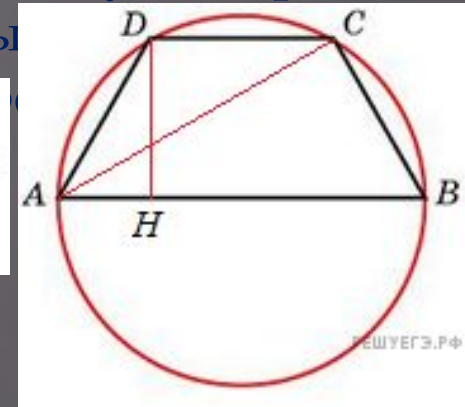
- Боковая сторона равнобедренной трапеции равна ее меньшему основанию, угол при основании равен 60° , большее основание равно 12. Найдите радиус описанной окружности



Решение.

Окружность, описанная вокруг трапеции, описана и вокруг треугольника. Это треугольник равнобедренный, угол при вершине равен 120° , углы при основании равны

$$\begin{aligned} AD &= AB - 2AH = \\ &= AB - 2AD \cos 60^\circ = \\ &= 12 - AD, \\ AD &= 6. \end{aligned}$$

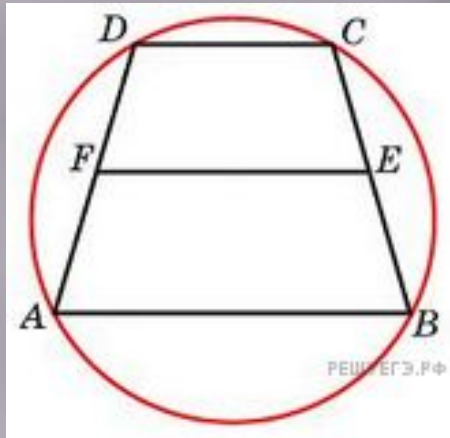


- Тогда по формуле синуса

$$R = \frac{AD}{2 \sin \angle DCA} = \frac{6}{2 \sin 30^\circ} = 6.$$

Ответ:
6.

- Около трапеции описана окружность. Периметр трапеции равен 22, средняя линия равна 5. Найдите боковую сторону

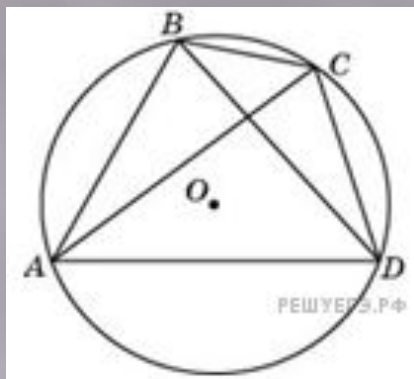


- Решение.**
трапеция ABCD –
равнобедренная, т. к.
вокруг неё описана

$$\begin{aligned} AD &= \frac{P_{ABCD} - (AB + CD)}{2} = \\ &= \frac{P_{ABCD}}{2} - \frac{AB + CD}{2} = \\ &= \frac{P_{ABCD}}{2} - FE = 11 - 5 = 6. \end{aligned}$$

Ответ:
6.

- Четырехугольник ABCD вписан в окружность.
Угол ABC равен 105° ,
угол CAD равен 35° .
Найдите угол ABD. Ответ
дайте в градусах.



- Решение.**

вписанный угол равен
половине дуги, на которую
он опирается, значит

$$\begin{aligned}\angle ABD &= \frac{1}{2} \cup AD = \frac{1}{2}(\cup ADC - \cup CD) = \\ &= \frac{1}{2}(2\angle ABC - 2\angle CAD) = 70^\circ.\end{aligned}$$

Ответ:
70.

Заключение

- Исследование мною заданий В6 ЕГЭ показало, что свойства окружностей часто применяются при решении планиметрических задач и широко используются на практике.

ИСТОЧНИКИ

- <http://www.univer.omsk.su/omsk/Edu/Rusanova/circles.htm>
- <http://reshuege.ru/?redir=1>