Введение

- **Треугольник всегда имел широкое применение в практической жизни. Изображение треугольников встречаются в папирусах, старинных индийских книгах и других древнейших документах. В древней Греции учение о треугольнике развивалось в ионийской школе, основанной в 7 веке до н.э. Фалесом, в школе Пифагора и других. Понятие о треугольнике исторически развивалось, по-видимому, так: сначала рассматривались лишь правильные, затем равнобедренные, и, наконец, разносторонние треугольники. Треугольники изучаются на протяжении всего курса планиметрии, они являются как бы стержнем, вокруг которого формируется курс элементарной геометрии. Это не случайно. Несмотря на то, что треугольник едва ли не простейшая после отрезка фигура, он имеет много важных и интереснейших свойств. К этим свойствам сводятся свойства других, более сложных фигур.**

Введение

- **Меня заинтересовала эта тема, тем, что много явлений в природе связаны с этой геометрической фигурой. Например, бермудский треугольник. Также треугольники встречаются в астрономии. Треугольникам уделяли внимание многие выдающиеся ученые(теорема Пифагора, формула Герона, точка Торричелли, окружность Эйлера, прямая Гаусса, теорема Лейбница и Карно и т.д.) я поставила перед собой цель: подробней изучить геометрию треугольника, узнать новые свойства этой фигуры, которые расширяют возможности решения геометрических задач. Треугольник является основным решением геометрических задач в планиметрии и стереометрии.**

Введение

- **Моя работа поможет не только ученику, но и учителю, так как существует 19 решений прямоугольного треугольника, сегодня я расскажу о базовой задачи геометрии треугольника. Рассмотрим один из случаев- прямоугольный.**

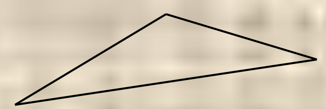
Треугольники

Треугольник- плоская фигура, ограниченная тремя прямыми. У треугольника могут быть три неравные стороны (разносторонний треугольник), две равные стороны (равнобедренный треугольник) или три равные стороны (равносторонний треугольник). В равнобедренном треугольнике углы, лежащие против равных сторон, равны; в равностороннем треугольнике все углы равны.

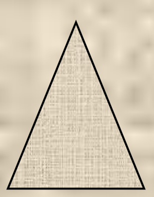
Виды треугольников

- Разносторонний (a)
- Равнобедренный (b)
- Равносторонний (c)
- Прямоугольный (d)
- Подобные треугольники (e)

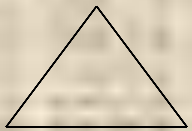
- a)



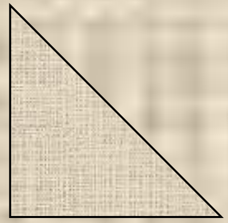
- b)



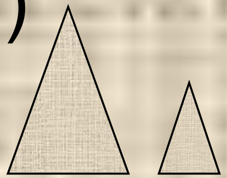
- c)



- d)



- e)



Бермудский треугольник

- «…Здесь бесследно исчезало множество кораблей и самолётов – большинство из них после 45 года. Здесь же в течении последних 26 лет погибло более 1000 человек. Однако при поисках не удалось обнаружить ни одного трупа или обломка…» Этими словами начинается описание таинственного Бермудского треугольника у американского писателя Ч.Берлитца, теперь эту фразу с удовольствием цитируют как противники, так и сторонники гипотезы существования между Флоридой, Кубой и Бермудами некоего странного загадочного места, иначе говоря - аномальной зоны.

Астрономия

- **Маленькое созвездие к юго-востоку от Андромеды. У его западной границы видна спиральная галактика М 33, или Туманность Треугольника (5,7 зв. вел.), повёрнутая к нам почти плашмя. Её английское прозвище Pinwheel переводится как «цевочное колесо»-разновидность зубчатого колеса со стерженьками вместо зубьев; оно довольно точно передаёт видимую форму галактики. Она, как и Туманность Андромеды (М 31), член Местной группы галактик. Обе они расположены симметрично относительно звезды Мирах (В Андромеды), что существенно облегчает поиск более слабой М 33. Обе галактики находятся от нас примерно на одинаковом расстоянии, но Туманность Треугольника чуть дальше, на расстоянии 2,6 млн. световых лет.**

Теорема Пифагора

- **Как известно, «Теорема Пифагора» является едва ли не самой знаменитой теоремой геометрии, которую помнит каждый человек, который когда-либо учился в средней школе и, возможно, сумел «начисто забыть» всю математику. Суть этой теоремы чрезвычайно проста. Теорема утверждает, что в прямоугольном треугольнике катеты *a* и *b* связаны с гипотенузой *c* следующим простым соотношением:**
- $a^2 + b^2 = c^2$

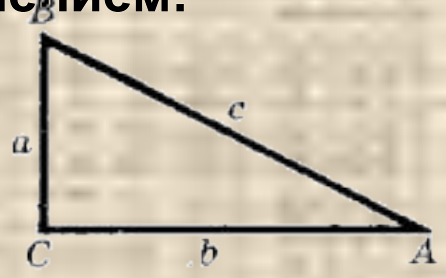


Рис. 24

- **Несмотря на ее предельную простоту, теорема Пифагора, по мнению многих математиков относится к разряду наиболее выдающихся математических теорем за всю историю математики. Гениальный астроном Иоганн Кеплер выразил свое восхищение теоремой Пифагора в следующих словах:**
- ***«В геометрии существует два сокровища – теорема Пифагора и деление отрезка в крайнем и среднем отношении. Первое можно сравнить с ценностью золота, второе можно назвать драгоценным камнем».***

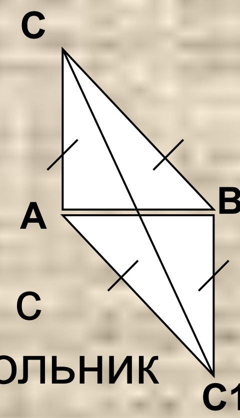
Базовая задача геометрии треугольника

В прямоугольном треугольнике ABC катеты AB и AC равны соответственно 3 и 4 (5 и 12).

Найти:

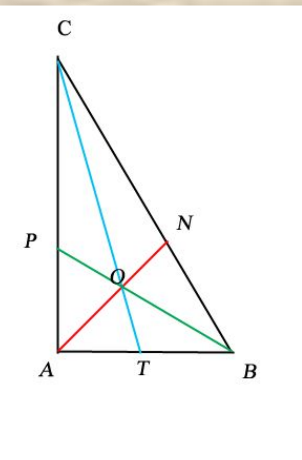
1. BC
2. S_{ABC}
3. AH – высоту, опущенную на гипотенузу. (Вывести формулу для вычисления высоты, опущенной на гипотенузу:)
4. CH:HB (можно провести вычислительную работу CH и HB по Пифагору, но обязательно закрепить теорему: проекции катетов на гипотенузу относятся, как квадраты катетов)
5. S_{AHC} и $S_{AHB.}$ (опять-таки, можно и нужно вычислить их площади, как половина произведения катетов, но очень важно из геометрии площадей обосновать, что S_{AHC}: S_{AHB}= HC:HB = AC^2:AB^2 = 16:9.). Далее воспользоваться делением площади Δ ABC в данном отношении.
6. R – радиус описанной окружности. (R = $^1/_2$BC).
7. r – радиус вписанной окружности.(S = p$\times$r,). Обе формулы доказываются, показывается универсальность первой (для любого описанного многоугольника – метод “долек”) и принадлежность второй только к классу прямоугольных треугольников.

Базовая задача геометрии треугольника



- 8. Длины медиан АМ и СК. Задача о медиане АМ связана с задачами определения R, Sabc, умением достроить треугольник АВС до прямоугольника и сделать с помощью этой конструкции необходимые выводы. Медиана СК определяется по теореме Пифагора. Так как в произвольном треугольнике это правило не срабатывает, то необходимо "притянуть за уши" формулу длины медианы произвольного треугольника: $4CK^2=2AC^2+2BC^2-AB^2$. Эта формула тяжеловата для запоминания, поэтому более эффективно запомнить её "первообразные" – достраивание треугольника до параллелограмма (что очень важно для выработки конструкторских умений) и следствие из этой теоремы косинусов: сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон. Ну и вместо этого просто пошаговая работа теоремой косинусов "туда и обратно". Из треугольника АВС по теореме косинусов (если это произвольный треугольник) определяем косинус угла В, и, зная его, опять таки по теореме косинусов из ΔСКВ находим СК.

Базовая задача геометрии треугольника



- 9. Длины отрезков AP, PC, CN, NB, TB и AT, где AN, BP и CT – биссектрисы Δ ABC (отрабатывается одно из основных свойств биссектрис и работа в делении величины в данном отношении)
- 10. Отношения PO:OB, AO:ON; CO:OT (теорема об отношении, в котором делятся биссектрисы точкой их пересечения – AO:ON = (AC + AB) : CB).
- 11. Длины биссектрис AN, CT и BP. Здесь можно отработать три метода:

Базовая задача геометрии треугольника

1) ΔANB:AB=3; BN=5*3/7=15/7; cos∟B =3/5. По теореме косинусов: AN²=9+225/49-2*3*15/7*3/5=(9*16*2)/49; $AN = \frac{12\sqrt{2}}{7}$

2) Геометрия площадей: Scan + Sanb= Scab

1/2AN*4*sin45°+1/2AN*3*sin45°=6; $AN \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 7 = 12$ $AN = \frac{24}{7\sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{2}}{7}$

3) И формула (теорема) о длине биссектрисы:

AN²=AC*AB-CN*BN

AN²=3*4-(5*5*3*4)/7*7=12(1-25/49)=12*24/49; AN= $\frac{12}{7}\sqrt{2}$

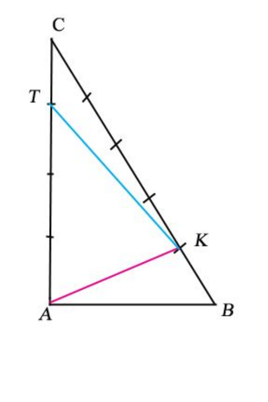
12. Длины отрезков CO, OT, AO, ON, BO, OP. Эта задача является следствием 10 и 11. Зная длины биссектрис и отношения, в которых они делятся точкой пересечения, закрепляем действие деления в данном отношении.

13. Площади шести треугольников, образовавшихся при проведении биссектрис:

1) Если учитывать предшествующие задачи, то мы знаем в каждом треугольнике основания – отрезки CP, PA, AT, TB, BN, NC и высоту – r.

Базовая задача геометрии треугольника

- **2)** Если задача решается изолированно, без предшествующих, то из геометрии площадей следует Saot:Stob=AT:TB=4:5, Stbo:Sboc:Scoa=3:5:4. (опять ссылка на равенство высот в этих треугольниках). И далее вновь отрабатывается действие деления величины в данном отношении. Ну и любопытное замечание – площади численно будут равны длинам соответствующих оснований AT, TB, BN, NC, PC, PA. Распространится ли это на прямоугольный треугольник:5,12,13? На другие треугольники? Как, используя полученные результаты, определить синусы любого из углов этой геометрической конструкции?
- **14.** Площади треугольников, получившихся при пересечении медиан (получившиеся шесть треугольников равновелики в любом треугольнике).
- **15.** а)длина AK,если BK:CK=1:4
б)длину TK, если AY:TC=3:1
в)косинус ∟TKA – одношаговые упражнения
с использованием теоремы косинусов.



Базовая задача геометрии треугольника

- **16.** а)площадь ΔCTK
  б)площадь ΔTKA
  Здесь уместно кроме вычислительного метода:
  Sctk=½CT*CK*sin∟C=½*1*4*3/=6/5, Sctk=Sabc – Stck – Sakb
  отработать применение теоремы об отношении площадей треугольников с равными углами.
  Sctk/Sabc=CT*CK/CA*CB=1/4*4/5=1/5
  Sctk=1/5*6=6/5
  Sakb/Sabc=1*3/5*3=1/5, Sakb=1/5*6=6/5
  Stka=6-12/5=18/5=3,6
- **17.** Радиус окружности, вписанной в ΔCTK (формула S=r*p)
- **18.** Радиус окружности, описанной около ΔCTK (следствие из теоремы синусов – AK/sinATK=2R, sin∟ATK=sin∟CTK)
- **19.** Расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей для ΔABC (Формула Эйлера: $d^2=R^2-2Rr$) в произвольном треугольнике и отдельно для прямоугольного треугольника:

Базовая задача геометрии треугольника

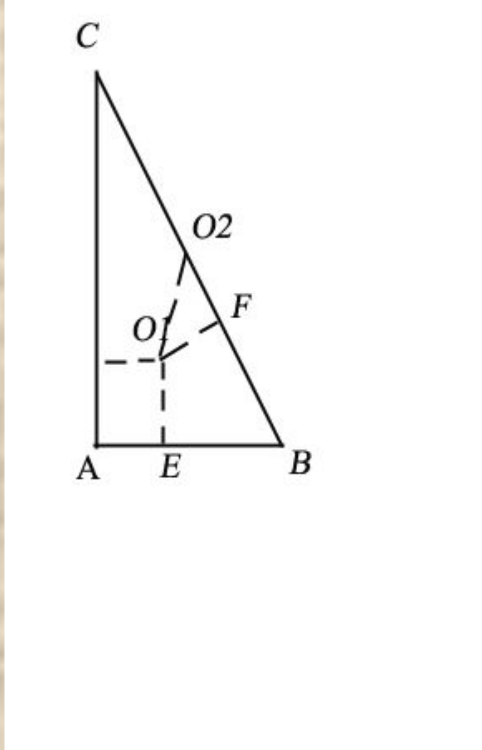
- O1F=1=r, O2B=R=2,5, FB=EB=3-1=2; O2F=2,5-2=0,5

O1O2²=0,5²+1=0,25+1=5/4

O1O2= $\frac{\sqrt{5}}{2}$

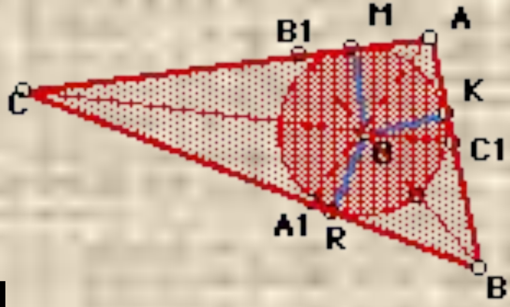
И по формуле Эйлера: d²=R²-2Rr=2,5(2,5-2)=2,5*0,5=5/4;

d= $\frac{\sqrt{5}}{2}$



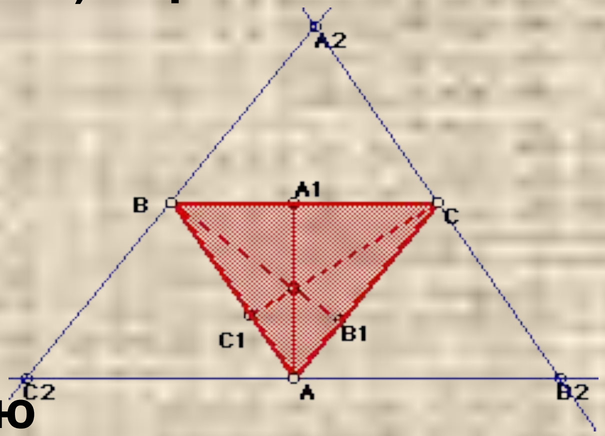
Задача

- **Теорема**
- **Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.**
- **Доказательство**
- **Обозначим буквой О точку пересечения**
- **биссектрис АА1 и ВВ1 треугольника АВС**
- **и проведём из этой точки перпендикуляры**
- **ОК, OL и ОМ соответственно к прямым АВ,**
- **ВС и СА (рис.1). Воспользуемся тем, что каждая**
- **точка биссектрисы неразвёрнутого угла**
- **равноудалена от его сторон и обратно: каждая точка, лежащая внутри угла и равноудалённая от сторон угла, лежит на его биссектрисе. Тогда ОК=OL и ОК=ОМ. А значит ОМ=OL, т. е. точка О равноудалена от сторон АВС и, значит, лежит на биссектрисе СС1 этого угла. Следовательно, все три биссектрисы треугольника АВС пересекаются в точке О.**
- **Теорема доказана.**



Задача

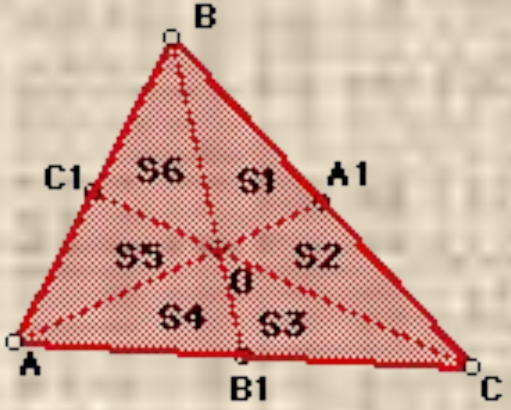
- **Теорема**
- **Высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке.**
- **Доказательство**
- **Рассмотрим произвольный треугольник**
- **ABC и докажем, что прямые AA1, BB1 и**
- **CC1 пересекаются в одной точке (рис.1).**
- **Проведём через каждую вершину**
- **треугольника ABC прямую, параллельную противоположной стороне. Получим треугольник A2B2C2. Точки A, B и C являются серединами сторон этого треугольника. Действительно, AB=A2C и AB=CB2 как противоположные стороны параллелограммов ABA2C и ABCB2, поэтому A2C=CB2. Аналогично C2A=AB2 и C2B=BA2. Кроме того, как следует из построения , CC1 перпендикулярен A2B2, AA1 перпендикулярен B2C2 и BB1 перпендикулярен A2C2. Таким обказом, прямые AA1, BB1 и CC1 являются серединными перпендикулярами к сторонам треугольника A2B2C2. Следовательно, они пересекаются в одной точке.**



- **Теорема доказана.**

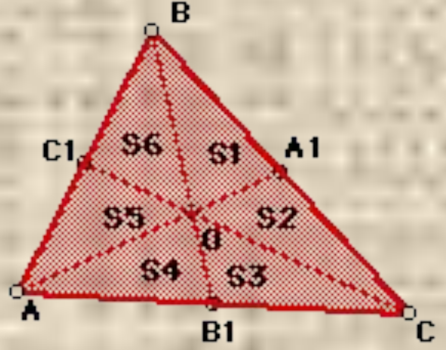
Задача

- Теорема
- Медианы треугольника делят его на шесть треугольников, площади которых равны.
- Доказательство 1
- 1) Рассмотрим треугольники А1ОВ и А1ОС (рис.2).Так как ВА1=А1С и высота у этих треугольников общая, то S1=S2. Аналогично S3=S4; S5=S6. 2) Рассмотрим треугольники АВВ1 и В1ВС. Так как АВ1=В1С и высота у них общая, то S АВВ1=S В1ВС, т. е. S4+S5+S6=S1+S2+S3. Так как S3=S4, то S5+S6=S1+S2. А так как S5=S6 и S1=S2то 2S5=2S1 следовательно S5=S1 или 2S6=2S1 следовательно S6=S1, и S1=S2=S5=S6. Аналогично, рассмотрев треугольники ВСС1 и АСС1, получим
- S1=S2=S3=S4=S5=S6.
- Теорема доказана.



Задача

- Доказательство 2
- Так как медианы точкой пересечения делятся в отношении 2:1, начиная от вершины треугольника, то OC=2OC1, OA=2OA1, OB=2OB1.
- 1) Находим
- S1/S4=0,5 OA1 2OB1 sinBOA1/0,5 2OA1 OB sinAOB1=sinBOA1/sinAOB1; (1)
- BOA1= AOB1 (как вертикальные), следовательно выражение (1) и S1=S4; аналогично S2=S5 и S3=S6.
- 2) Рассмотрим треугольники OBA1 и OCA1; A1B=A1C и высота у них общая, следовательно S1=S2. Аналогично S3=S4 и S5=S6 следовательно S1=S2=S3=S4=S5=S6.
- Теорема доказана.



Формула Герона

$$s/p = r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

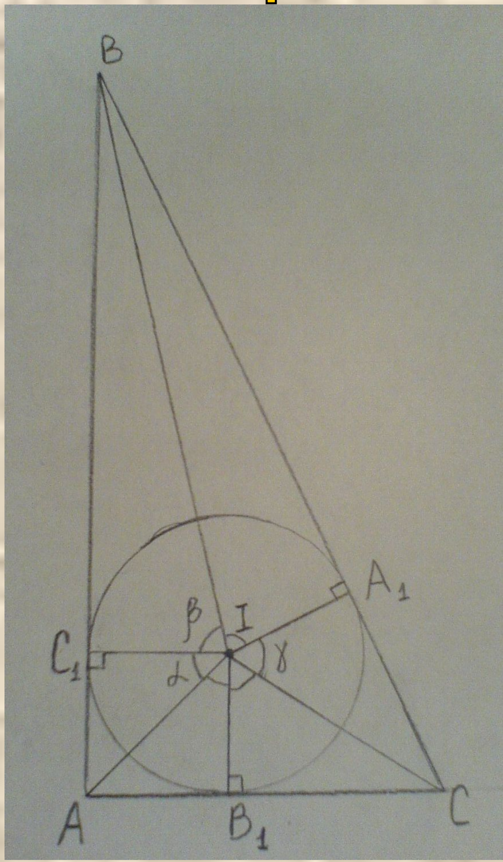
$$h_a = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$$

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

симметричный вывод формулы Герона

Точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника обозначим через $A_1B_1C_1$. Треугольники AIB_1 и AIC_1 BIA и BIC_1 CIA_1 CIB_1 попарно равны, как прямоугольные треугольники, имеющие общую гипотенузу и равные углы.



Обозначим **BC=a, AC=b, AB=c**.Тогда $AB_1 = b - CB_1, AC_1 = c - BC_1$

$$AB_1 + AC_1 = 2AB_1 = 2AC_1 = b + c - (CB_1 + BC_1) = b + c - (CA_1 + BA_1) = b + c - a$$

откуда $AB_1 = AC_1 = \frac{b+c-a}{2}$

аналогично $CA_1 = CB_1 = \frac{a+b-c}{2}$

. И $BA_1 = BC_1 = \frac{a+c-b}{2}$,

.

Обозначим углы $\angle C_1IB_1 = \alpha$, $\angle C_1IA_1 = \beta$, $\angle A_1IB_1 = \gamma$.

В треугольнике AIB_1 катеты связаны соотношением: $r = \frac{AB_1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{b+c-a}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$

Откуда $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{b+c-a}{2r}$

Аналогично

$$tg\frac{\beta}{2} = \frac{a+c-b}{2} \quad \text{и} \quad tg\frac{\gamma}{2} = \frac{a+b-c}{2}$$

Так как $\frac{\alpha}{2} + \pi \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} =$

То легко доказать $tg\frac{\alpha}{2} + tg\frac{\beta}{2} + tg\frac{\gamma}{2} = tg\frac{\alpha}{2}\, tg\frac{\beta}{2}\, tg\frac{\gamma}{2}$ (*)

Подставив в (*) выражения $tg\frac{\alpha}{2} \quad tg\frac{\beta}{2} \quad tg\frac{\gamma}{2}$

Через **a,b,c** и **r,** получим $\frac{a+b+c}{2r} = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{r^3}$

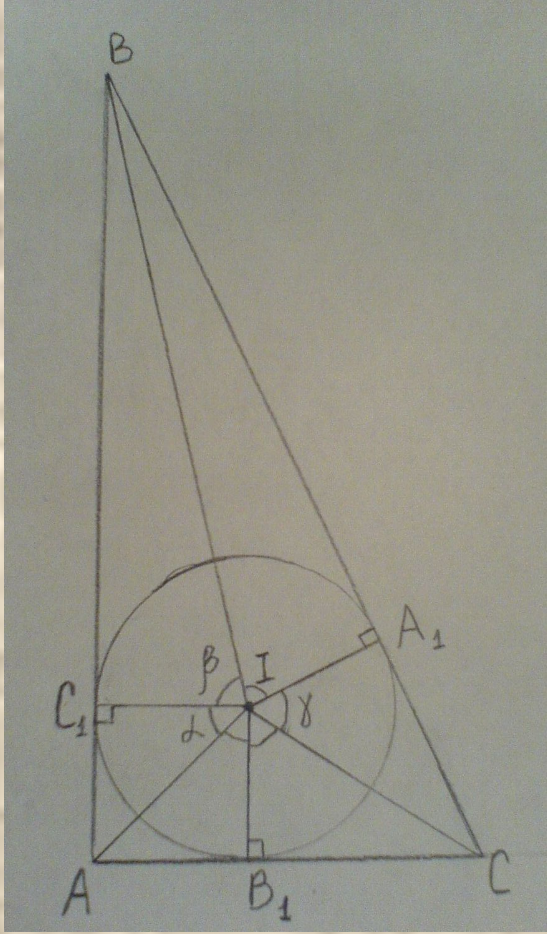
Откуда

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

Так как ,то отсюда следует **формула Герона:**

$$S_{ABC} = rp$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$



Вывод:

- Ну вот, пожалуй, можно остановиться в наборе основных проблем треугольника. Работа в формировании знаний, умений и навыков, связанных с этой Задачей, начинается с пятого класса – пропедевтического курса геометрии (геометрии площадей, деления отрезка данном отношении, конструктивные навыки – построение биссектрис, медиан и высот произвольным набором инструментов (метрической линейкой, транспортиром, угольником)) и длится практически до окончания курса планиметрии. Многие теоремы используются в работе задолго до их доказательства, подготовляя сознание детей к логическим операциям с используемыми понятиями. Например, биссектриса треугольника может быть построена как с помощью транспортира, так и с использованием факта деления противоположной стороны в известном отношении и только спустя значительное время это получает как чёткую логическую, так и конструктивную основу.

Литература

- **1.** Успенский В. А. Треугольник Паскаля. М.: Наука, Наука, 1948. 48 с
- **2.** Green T. M., Hamberg C. L. Pascal’s Triangle. Palo Alto: Dale Seymour? 1986.
- **3.** Бондаренко Б. А. Обобщенные треугольники и пирамиды Паскаля, их фрактали, графы и приложения. Ташкент: Фан, 1990. 192 с.
- **4.** Докин В. Н., Жуков В. Д., Колокольникова Н. А. и др. Комбинаторные числа и полиномы в моделях дискретных распределений. Иркутск: Изд-во Иркут. Ун-та, 1990. 208 с.
- **5.** Кузьмин О. В. Некоторые комбинаторные числа в обобщенной пирамиде Паскаля // Асимптотические и перечислительные задачи комбинаторного анализа. Иркутск: Изд-во Иркут. Ун-та, 1997. С. 90-100.
- **6.** Колокольникова Н. А., Кузьмин О. В. Обобщения триномиальных коэффициентов // Исследования по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца М.: 1983. Вып. 63. С. 60-67.

- Рецензент статьи Ю. П. Соловьев.