# Производственные функции

# ПФ

$$q = f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

- функциональная зависимость между количеством используемых в производстве ресурсов и объемом выпускаемой продукции

# Гипотеза максимизирующего поведения производителя:

производитель из всего множества планов производства выбирает тот, который принесет ему максимальную прибыль.

# Гипотезы

- Гипотеза H1 (гипотеза измеримости): каждый ресурс является количественно измеримым.
- Гипотеза H2 (гипотеза однородности): каждая точка пространства *Rn+* может быть отождествлена с некоторым планом производства, (все ресурсы могут использоваться в количестве, измеряемом любым неотрицательным действительным числом).
- Гипотеза H3 (гипотеза однозначности): при одинаковых затратах ресурсов производитель выпускает одно и то же количество продукции.

# пространство ресурсов

- множество n-мерных векторов с неотрицательными координатами

$$R^{n+} = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i \geq 0, i = 1,2,\ldots,n\}.$$

- точки этого множества – планы производства по ресурсам.

# Основные типы производственных функций

- Линейная
- Кобба-Дугласа
- Леонтьева
- …

# Поверхность (линия) уровня

– множество значений аргумента, в которых функция принимает одно и то же значение

Геометрически **линия уровня** (уровень) функции двух переменных - плоская кривая, получаемая при пересечении графика этой функции плоскостью, параллельной координатной плоскости XOY

$Z=C$, где C=const

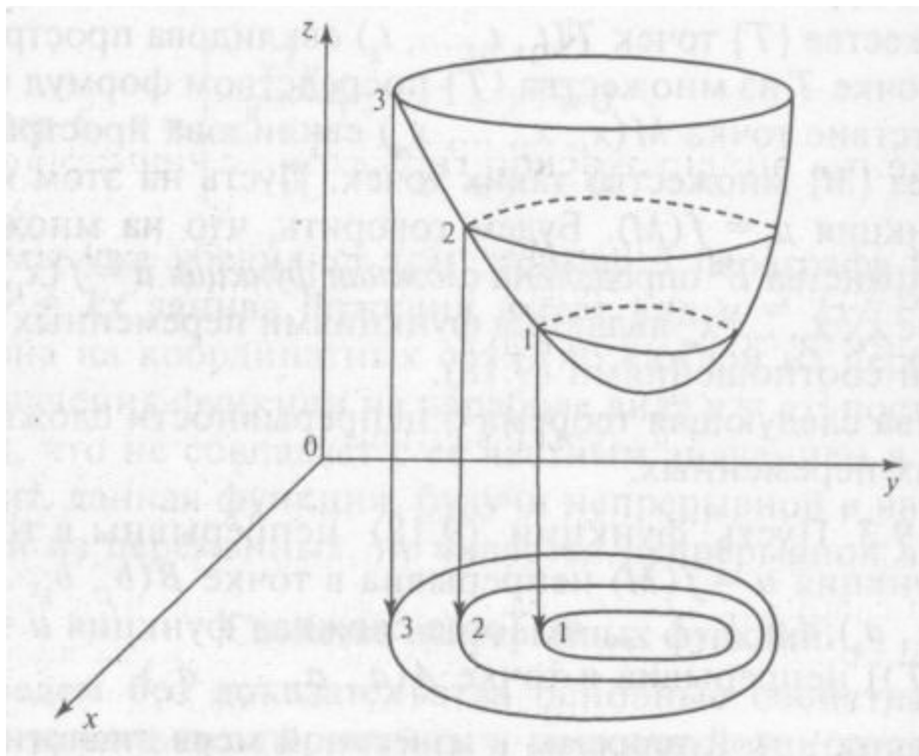
Изобразить поверхность на плоскости можно, проектируя линии уровня на плоскость XOY.

Семейство полученных кривых задается уравнениями вида

$$F(x,y)=C$$

# Линии уровня

функции двух переменных



# Частные производные

- Частная производная функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$

в точке по переменной $x_k$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x_k}$$

- обыкновенная производная функции одной переменной $x_k$ при фиксированных значениях других переменных

- она характеризует скорость изменения ФНП в направлении данной координатной оси $x_k$ при фиксированных значениях других координат.

# Предельный продукт

- =предельная эффективность ресурса, =предельная производительность ресурса,

  **=предельная отдача ресурса** при плане $x = (x_1, x_2)$

$$\boxed{MP_1 = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}} \qquad MP_2 = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}$$

$$\Delta f(x_1, x_2) \approx df(x_1, x_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 \qquad \boxed{\Delta x_1 = 1} \Rightarrow \quad MP_1 \approx \Delta q$$

# средний продукт

- средний продукт первого ресурса (средняя производительность ресурса, средняя отдача ресурса)

$$\boxed{AP_1 = \frac{f(x_1, x_2)}{x_1} = \frac{q}{x_1}}$$

- отношение объема выпущенной продукции к количеству затраченного переменного ресурса

# Производственная функция (ПФ) типа Кобба – Дугласа

$$Q = f(K, L) = a_0 K^a L^b,$$

где **$Q$ – объем производства**,

$a_0 > 0$ ,   $0 < a < 1$,   $0 < b < 1$

**$K$ – капитал,**   **$L$ – рабочая сила**,

$$f(1,1) = a_0,$$

$$f(0, L) = f(K, 0) = 0.$$

***Пример:*** ПФ небольшого цеха, изготавливающего рамы для картин, имеет вид:

$$q = f(x_1, x_2) = 4x_1^{1/2} x_2^{1/4}$$

где $x_1$ – отработанные человеко-часы,

$x_2$ – отработанные машино-часы,

$q$ – число изготовленных рам.

Найти количество продукции при плане $x^* = (64, 81)$.

# ПРИМЕР:

$$q = f(x_1, x_2) = 4x_1^{1/2} x_2^{1/4}$$

Вычислим частные производные ПФ, т.е. первый и второй предельный продукты (**предельную отдачу первого и второго ресурса**) для плана *x**=(64, 81):

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1^{-1/2} x_2^{1/4}\Big|_{(64,81)} = \frac{2 \times 81^{1/4}}{64^{1/2}} = \frac{3}{4},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1^{1/2} x_2^{-3/4}\Big|_{(64,81)} = \frac{64^{1/2}}{81^{3/4}} = \frac{8}{27}.$$

- значение 3/4 первого предельного продукта означает, что **при увеличении затрат первого ресурса на единицу** и неизменных затратах второго **выпуск продукции увеличится примерно на 3/4** ед.
- Каков экономический смысл второго предельного продукта?

# Уровень ПФ – изокванта

- Построить изокванту, проходящую через точку $x^*$

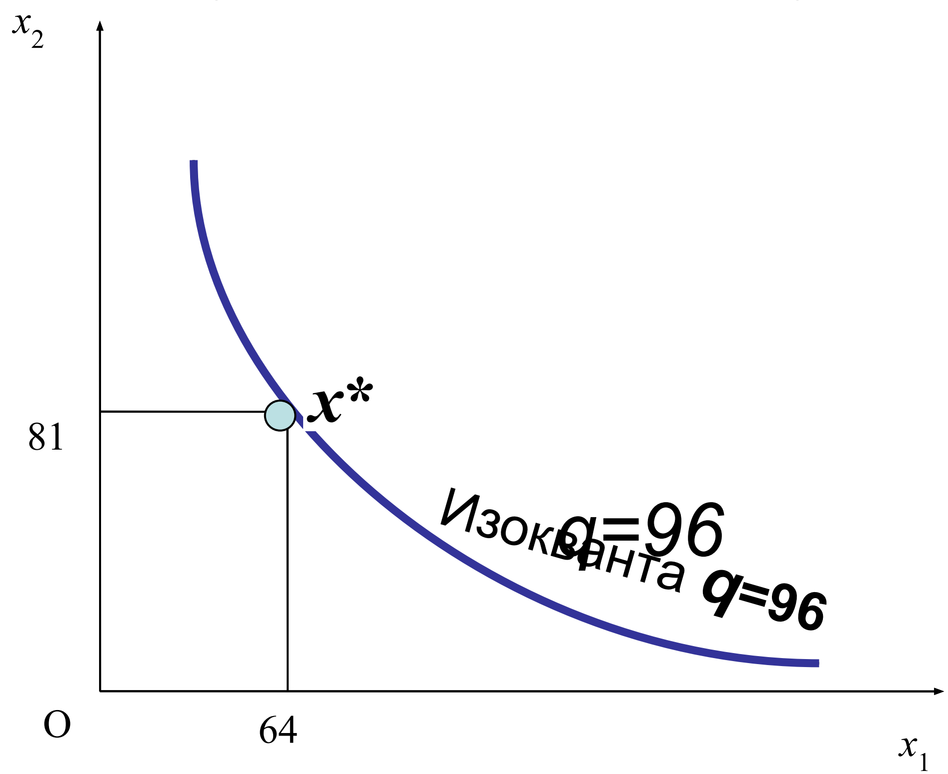
$$q = f(x^*) = 4 \cdot 64^{1/2} \cdot 81^{1/4} = 96$$

- затраты первого и второго ресурсов для всех планов производства, обеспечивающих выпуск 96 единиц продукции, связаны уравнением:

$$\boxed{4x_1^{1/2} x_2^{1/4} = 96} \longrightarrow x_2 = \frac{24^4}{x_1^2} = \frac{331776}{x_1^2}$$

- Графиком полученной функции в пространстве ресурсов является изокванта, соответствующая выпуску 96 единиц продукции

# Изокванта производственной функции, соответствующая выпуску 96 единиц продукции – линия уровня ПФ




- Построить изокванты q=60, q=80 на том же рис.

# Градиент

- Градиент ФНП в точке – вектор, координаты которого равны частным производным функции в этой точке

$$grad\, F = \nabla F(x) = \left( \frac{\partial\, F(x)}{\partial\, x_1}, \ldots, \frac{\partial\, F(x)}{\partial\, x_n} \right).$$

- Градиент указывает направление и величину максимальной скорости возрастания функции в точке

# Свойства градиента

- Градиент функции в точке перпендикулярен (ортогонален) поверхности уровня, проходящей через данную точку.
- Если приращения аргумента достаточно малы, функция возрастает (убывает)

  только для тех из них, которые составляют острый (тупой) угол с градиентом
- Функция практически не меняется для приращений, ортогональных градиенту.
- Градиент ПФ называют **вектором предельного продукта**

# Экономическая область ПФ

- область, в которой увеличение затрат любого ресурса не приводит к уменьшению выпуска продукции.
- План $(x_1, x_2)$ лежит в экономической области ПФ

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} MP_1(x_1, x_2) \geq 0 \\ MP_2(x_1, x_2) \geq 0 \end{cases}$$

# Закон убывающей отдачи ресурса

- если последовательное равномерное увеличение затрат этого ресурса при фиксированных значениях остальных приводит к последовательно уменьшающемуся приросту выпуска продукции.

- **Теорема.** Для того, чтобы в некоторой области выполнялся Закон убывающей отдачи ресурса, необходимо и достаточно, чтобы в этой области вторая частная производная ПФ по соответствующей переменной была отрицательна:

$$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_i^{\,2}} < 0$$

# Коэффициенты эластичности выпуска по затратам ресурсов

- определяются следующими формулами:

$$\boxed{e_{x_1}(q) = \frac{x_1}{f(x_1, x_2)} \cdot \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}} \qquad e_{x_2}(q) = \frac{x_2}{f(x_1, x_2)} \cdot \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}$$

- Коэффициенты эластичности равны отношению предельной отдачи ресурса к средней отдаче ресурса:

$$\boxed{e_{x_i}(q) = \frac{MP_i}{AP_i}}$$

- **Экономический смысл**: коэффициент эластичности выпуска по затратам первого ресурса показывает, на сколько примерно процентов изменится выпуск продукции, если затраты первого ресурса увеличить на 1%.

# Эффект масштаба

$q_0 = f(x_1, x_2)$ - объем выпускаемой продукции при плане ( $x_1, x_2$ ).

- При увеличении затрат ресурсов в *k* раз

(*k* > 1) выпуск составит $q_1 = f(kx_1, kx_2)$

| | | |
|---|---|---|
| выпуск продукции увеличился | **тоже в *k* раз** $q_1 = kq_0$ | **постоянный** |
| | **более, чем в *k* раз** $q_1 > kq_0$ | **возрастающий** |
| | **менее, чем в *k* раз** $q_1 < kq_0$ | **убывающий** |

**эффект от расширения масштабов** производства

# Однородные функции

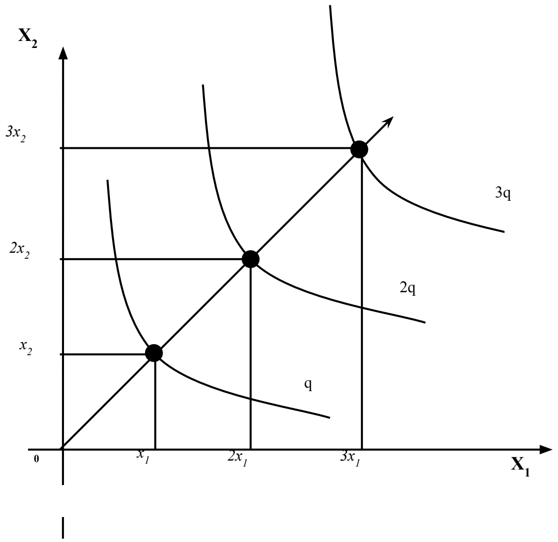
- Функция нескольких переменных называется **однородной порядка *m***, если для всех *x* из некоторой области X

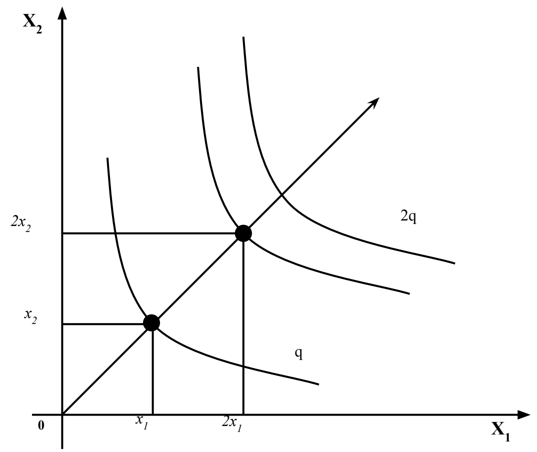
$$f(kx_1, kx_2, \ldots, kx_n) = k^m f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

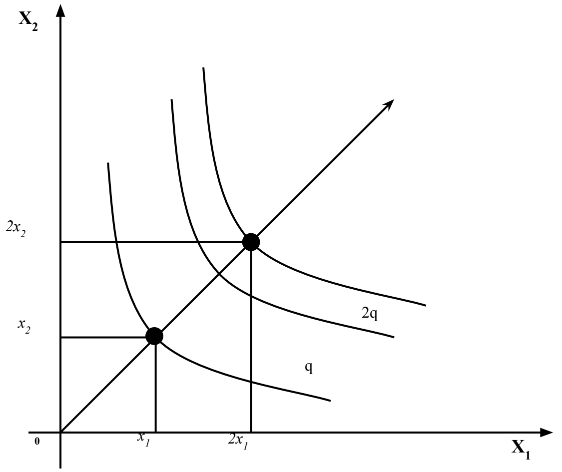
- Если ПФ является **однородной порядка *m***, то
- при ***m*=1** ПФ обладает **постоянным**;
- при ***m*>1** ПФ обладает **возрастающим**
- при ***m*<1** ПФ обладает **убывающим**

эффектом масштаба

# Эффект масштаба




**постоянный** **убывающий** **возрастающий**

# Поиск точки равновесия производителя

# Планирование производства

- **<u>Долговременное</u>**

  Long-run
- возможны изменения всех ресурсов
- **Все ресурсы переменные**
- Эффект от расширения масштаба производства

- **<u>Кратковременное</u>**

  short-run
- Есть ограничения на ресурсы
- **Ресурсы постоянные и переменные**
- Закон убывающей отдачи переменного ресурса

# Приращение ФНП

$$\Delta f = f(M) - f(M_0) = f(x+dx,\ y+dy) - f(x,y)$$

функция $f(x,y)$ имеет в точке $M_0$ непрерывные частные производные, то
по известным приращениям аргументов $\Delta x$, $\Delta y$, приближенно вычислим
полное приращение функции

$$\Delta f \approx d f = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

# Дифференциал ФНП

**полным дифференциалом** функции называется линейная по приращениям аргументов часть приращения функции

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2$$

$$\Delta x_i = dx_i$$

# Замещение ресурсов

без изменения объёма выпуска

$$0 = \Delta q \approx \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_2$$

$$0 \approx MP_1(x_1, x_2)\Delta x_1 + MP_2(x_1, x_2)\Delta x_2$$

$$\boxed{\Delta x_2 \approx -\frac{MP_1(x_1, x_2)}{MP_2(x_1, x_2)}\Delta x_1}$$

# Предельная норма технологического замещения второго ресурса первым

$$\boxed{MRTS_{12}(x_1, x_2) = \left.\frac{MP_1(x_1, x_2)}{MP_2(x_1, x_2)}\right|_{q=const}}$$

*MRTS – marginal rate of technical substitution.*

- **Экономический смысл предельной нормы замещения** - это примерное количество второго ресурса, которое можно сэкономить, увеличив затраты первого ресурса на 1 единицу, при этом объем выпуска не изменится.

$$\boxed{MRTS_{12}(x_1, x_2) \approx -\Delta x_2}$$

# **Геометрический смысл** предельной нормы замещения второго ресурса первым:

$$MRTS_{12}(x_1, x_2)$$

численно равна тангенсу угла наклона касательной к изокванте в точке *($x_1$,$x_2$)*, взятому с обратным знаком.

- *мы будем рассматривать* ***тангенс смежного острого угла****, поскольку тангенсы этих углов отличаются только знаком.*

# Основные **свойства** $MRTS_{1,2}(x_1, x_2)$

$MRTS_{12}(x_1, x_2)$

численно равна тангенсу острого угла $tg\alpha$ наклона касательной к изокванте в точке *($x_1$,$x_2$)*.

$$MRTS_{12}(x_1, x_2) \approx -\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$$

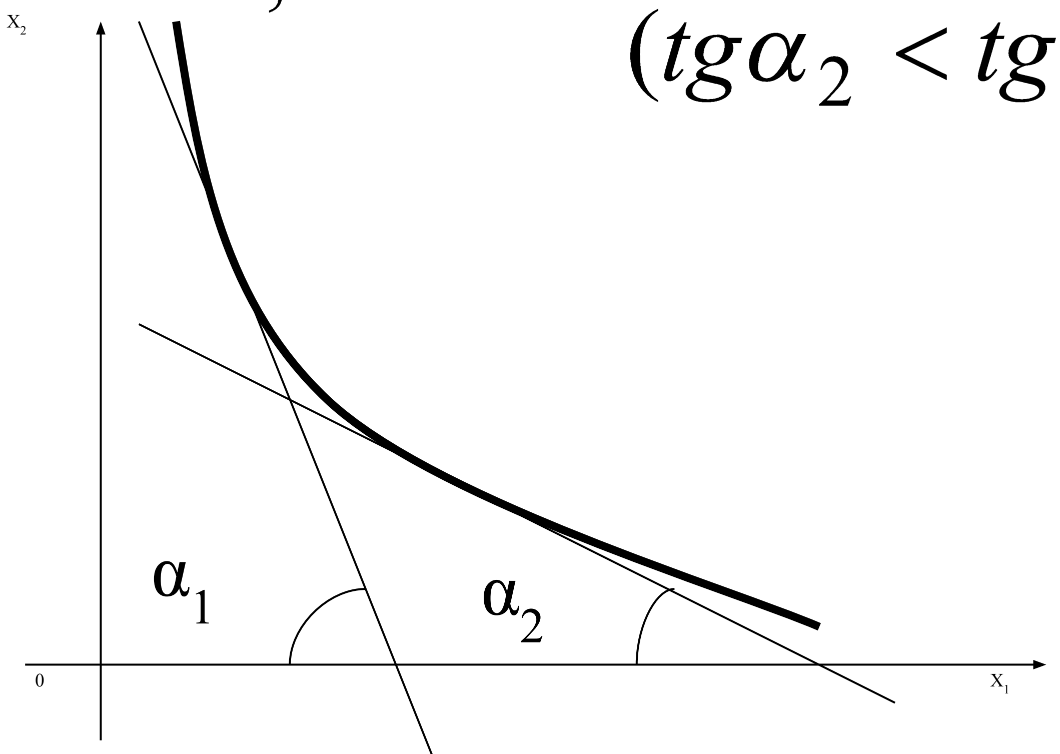
$$\boxed{\Delta x_2 \approx -MRTS_{12}(x_1, x_2)\Delta x_1}$$

$$f(x_1, x_2) = f(x_1 + \Delta x_1; x_2 - MRTS_{12}(x_1, x_2)) = const.$$

# Закон убывания $MRTS_{1,2}$ у ПФ типа Кобба-Дугласа

$MRTS_{1,2}$ непрерывно убывает

$$(tg\alpha_2 < tg\alpha_1)$$




возможна замещаемость ресурсов в определенных границах

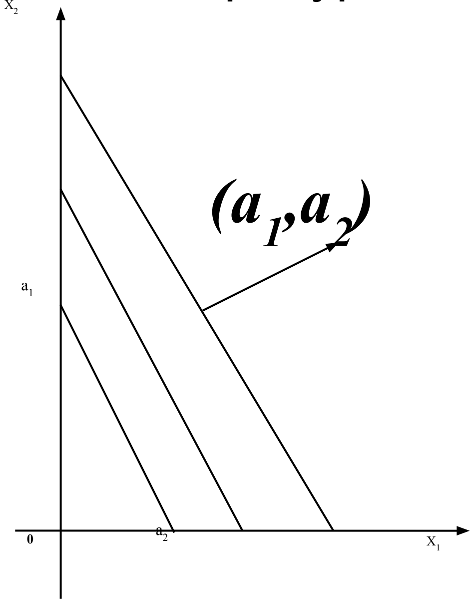
# Линейная производственная функция

$$q = f(x_1, x_2) = a_1 x_1 + a_2 x_2,$$

- применяется при моделировании таких производственных процессов, где выпуск **однородной** продукции является результатом одновременного функционирования нескольких технологий,
- выпуск **линейно** зависит от затрат,
- **ресурсы полностью взаимозаменяемы**, т.е. для выпуска достаточно наличия хотя бы одного ресурса.

$$MRTS_{1,2} = \frac{a_1}{a_2};$$

$$MRTS_{2,1} = \frac{a_2}{a_1}$$



# ПРИМЕРЫ применения линейной ПФ:

- производство однотипных деталей рабочими различных разрядов,
- выемка грунта рабочими или экскаваторами,
- выручка дистрибьюторов однородного товара,
- сегмент рынка, крупная отрасль,
- народное хозяйство в целом.

# Ресурсы

**переменные**

- $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ - план по затратам переменных ресурсов
- вектор $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$ задает цены переменных ресурсов.
- Стоимость переменных ресурсов = **переменные издержки**

$$G(x) = w \cdot x$$

**постоянные**

- стоимость затраченных постоянных ресурсов $C_0$ = **постоянные издержки**,

• общая стоимость затраченных ресурсов = **общие издержки**

$$C_0 + w \cdot x$$

# Изокоста

\- множество планов производства с одинаковыми переменными издержками

- Уравнение изокосты

$$G(x) = w_1 x_1 + w_2 x_2 = c$$

- Семейство изокост на плоскости – множество отрезков параллельных прямых с нормалью $w = (w_1, w_2)$
- Угол наклона изокосты к оси $Ox_1$ определяется отношением цен на ресурсы: **$\mathrm{tg}\,\phi = -\, w_1 / \, w_2$**.

# Поиск оптимального плана – точки равновесия x*

- выпуск **заданного** количества продукции *q* с **наименьшими** переменными **издержками**

$$\boxed{G(x) = w \cdot x \to \min,}$$

при условии

$$\boxed{q(x) = const}$$

$$x \geq 0.$$

- выпуск **максимального** количества продукции при наличии бюджетного ограничения

$$\boxed{q(x) \to \max}$$

при условии

$$\boxed{G(x) = w \cdot x = const}$$

$$x \geq 0.$$