Понятие функции. Свойства функций. Линейная и квадратичная функции.

Готфрид
Фридрих
Лейбниц
1646 - 1716

Иоган
Бернулли
1667 - 1748

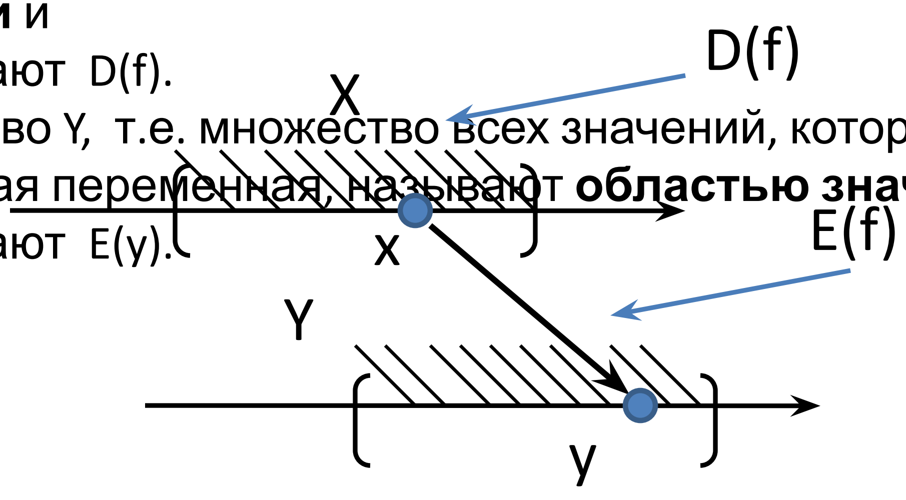
Якоб
Бернулли
1654 - 1705

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть X и Y – числовые множества. Если задано правило,
по которому каждому элементу x из множества X ставится в соответствие
единственный элемент y из множества Y, то говорят, что на множестве X
задана функция y= f(x).

Переменную x называют независимой переменной или аргументом, переменную y – зависимой переменной.

Множество X, т.е. множество всех значений, которые может принимать независимая переменная, называют **областью определения функции** и обозначают D(f).

Множество Y, т.е. множество всех значений, которые может принимать зависимая переменная, называют **областью значений функции** и обозначают E(y).



Способы задания функции:

1) аналитический
2) графический
3) табличный

Аналитический способ.

Функция задается формулой, которая указывает последовательность операций, которые надо произвести над аргументом, чтобы получить значение функции.

Примеры

:

$$1)\ y = x^2 - 2x$$

$$2)\ y = \sqrt{x}$$

$$3)\ y = \frac{1}{x-1}$$

$$4)\ y = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 2x, & -1 < x < 0 \\ -3x, & x \leq -1 \end{cases}$$

При аналитическом способе задания (в случае, если область Определения не указана явно) **область определения функции –**
это множество значений переменной х, при которых выражение,
задающее функцию, имеет смысл, т.е. выполнимы все операции над аргументом

Примеры:

$$1)\ y = x^2, -1 \le x \le 1 \quad D(y) = [-1;1] - \text{задана явно}$$

$$2)\ y = \sqrt{x} \quad D(y) = [0;+\infty)$$

$$3)\ y = \frac{1}{x-1} \quad D(y) = (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$$

Графический способ

Функция задается некоторым множеством точек на плоскости Оху, при
этом любая прямая, параллельная оси Оу, пересекает заданный график
только в одной точке. Область определения при графическом способе

Примеры

з … х точек, заданных на плоскости
(…
а … о всех ординат этих точек.

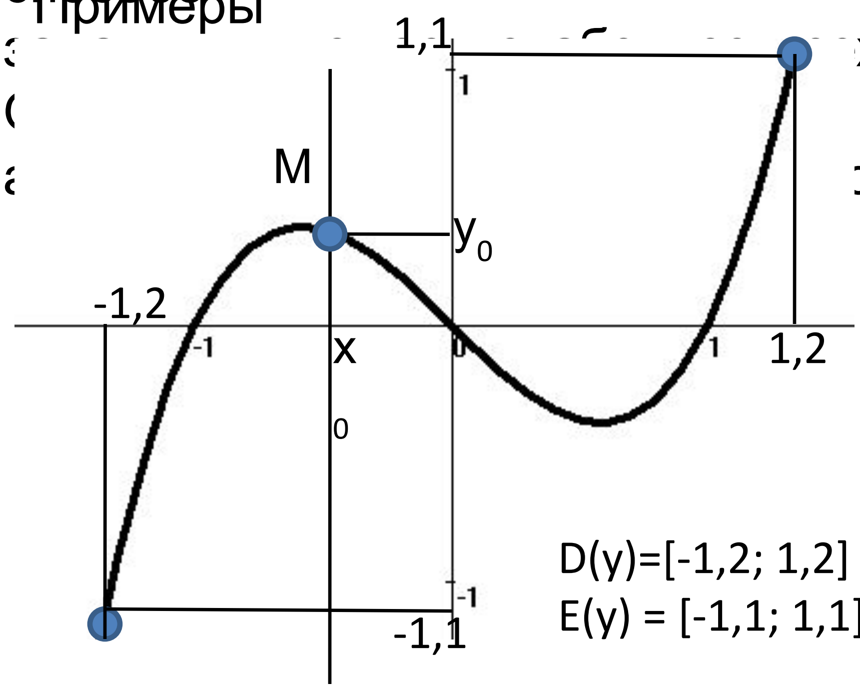


Рис. 1

Рис. 2

Табличный способ

Для избранных значений аргумента указываются соответствующие им значения функции

Примеры:

1) Таблица квадратов

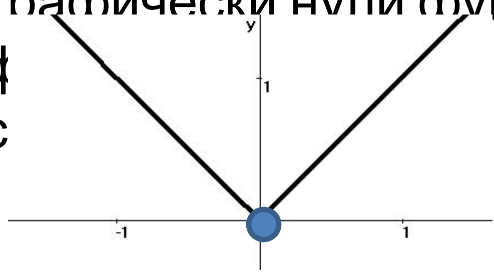
x	1	2	3	4
y	1	4	9	16

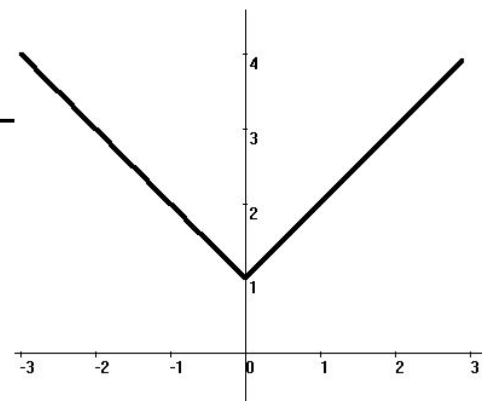
2) Многие результаты экспериментов, статистических исследований и т.д.

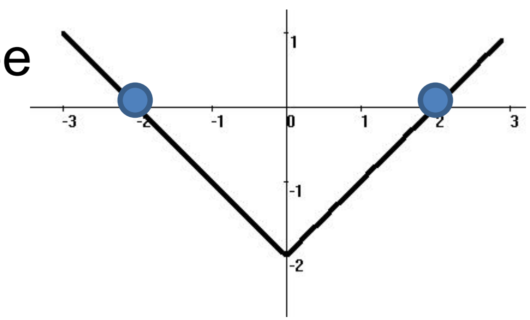
x (рост мальчиков в классе)	170	173	176	180
y (количество мальчиков, имеющих такой рост)	2	9	8	1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Графиком функции y = f(x) называется множество точек
плоскости с координатами (x; f(x)), т.е. абсцисса которых – значение аргумента,
а ордината – соответствующее ему значение функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Нулем функции называется значение аргумента, при котором
значение функции равно 0.
Графически нули функции – ... к пере
ф
с







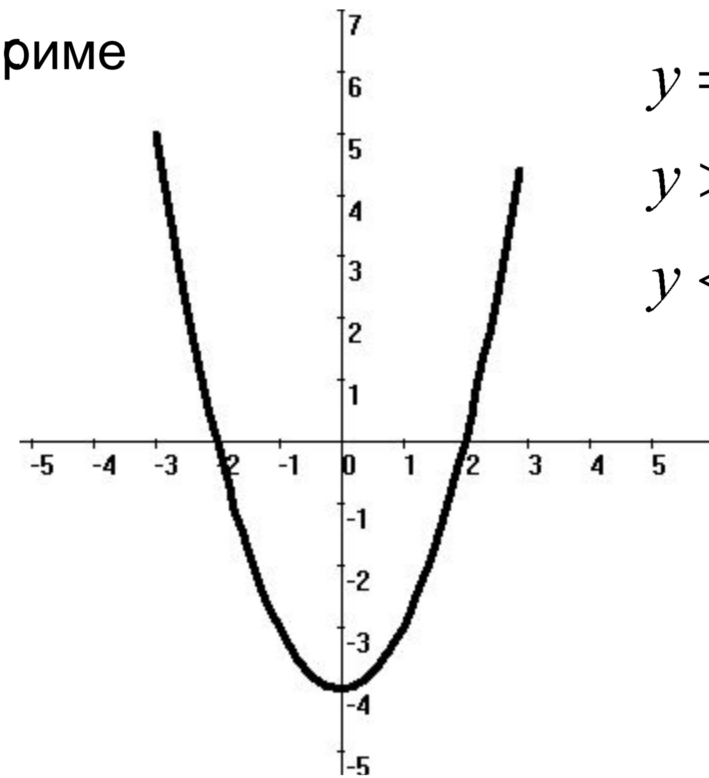
y = |x|
Нуль функции x = 0

y = |x| + 1
Нулей функции нет

y = |x| - 2
Нули функции x = 2, x = -2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Промежутки, на которых функция сохраняет знак, т.е. принимает только положительные или только отрицательные значения,
называют промежутками знакопостоянства функции.
Графически
условие f(x) > 0 означает, что график функции y = f(x) лежит **выше** оси Ox,
ус... афик функции y = f(x) лежит **ниже** оси Ox

Пример



$$y = x^2 - 4$$

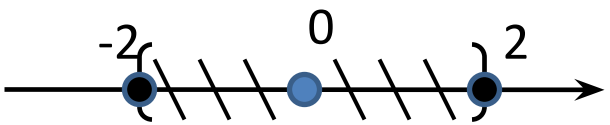
$$y > 0 \text{ на промежутках } (-\infty;2);(2;+\infty)$$

$$y < 0 \text{ на промежутке } (-2;2)$$

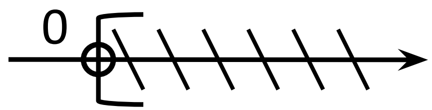
ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Числовое множество М называется симметричным
относительно 0, если для любого элемента х, принадлежащего М,
элемент –х также принадлежит М.

Примеры:

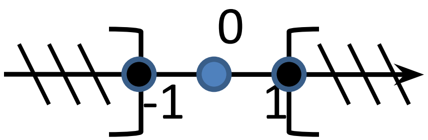
1) [-2; 2] – симметрично относительно 0



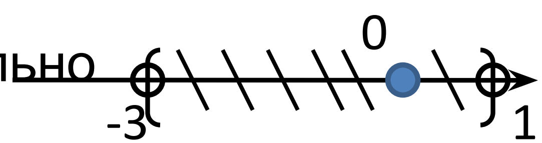
2) (0; + ∞) – не является симметричным относительно 0



3) (- ∞; - 1]U[1; + ∞) – симметрично относительно 0



4) (-3; 1) - не является симметричным относительно 0



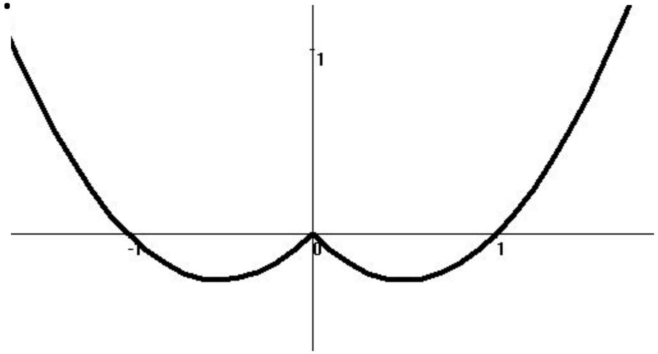
ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Функция $y = f(x)$ называется **четной**, если ее область определения симметрична относительно 0 и для любого значения x из области определения выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.
Функция $y = f(x)$ называется **нечетной**, если ее область определения симметрична относительно 0 и для любого значения x из области определения выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$

График четной функции симметричен относительно оси Oy.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат, т.е
относительно точки (0; 0).

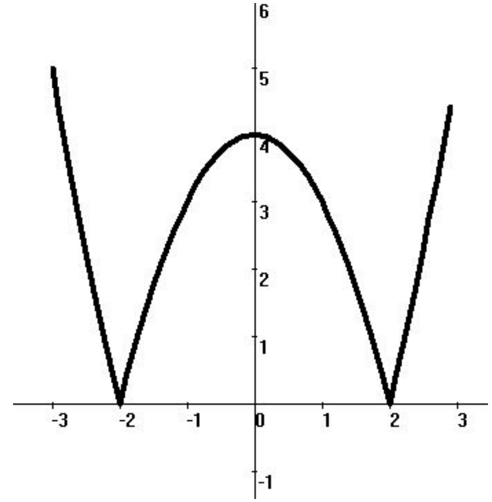
Верно и обратное: если график функции симметричен относительно оси Oy,
то функция четная, если график симметричен относительно начала координат,
то функция нечетная.

Примеры:

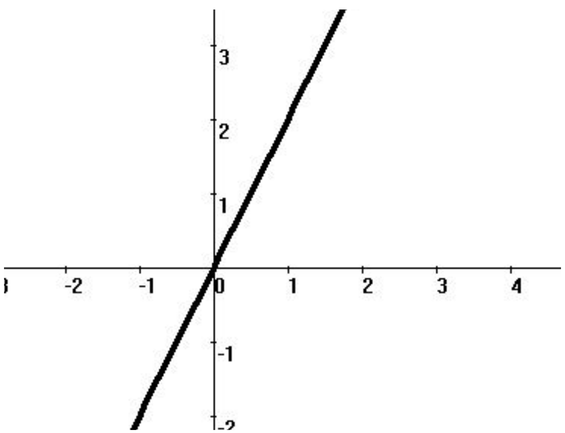


$$y = x^2 - |x|$$

четные

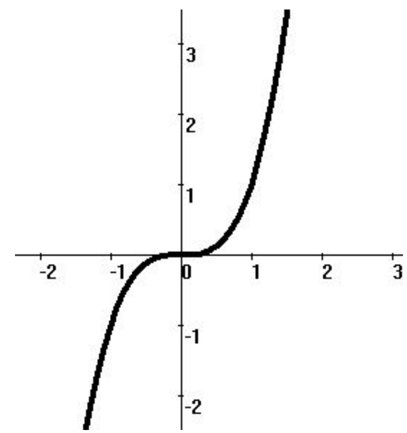


$$y = |x^2 - 4|$$

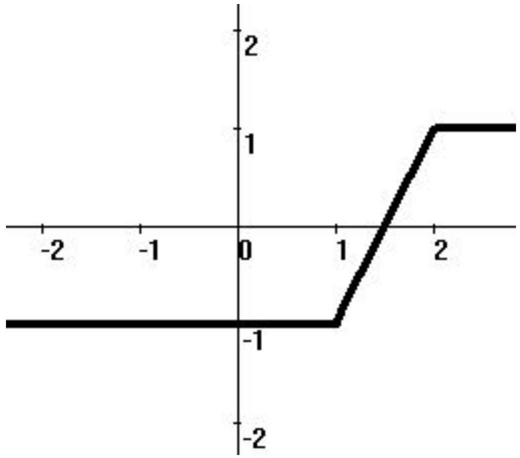


$$y = 2x$$

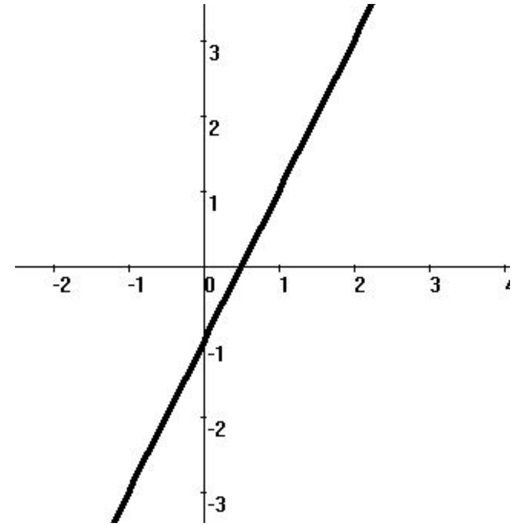
нечетные



$$y = x^3$$



$$y = |x-1| - |x-2|$$



$$y = 2x - 1$$

Функции общего вида (не являются ни четными, ни нечетными)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей** на промежутке P,
принадлежащим области определения функции, если для любых значений аргумента x_1 и x_2 из промежутка P, таких, что $x_1 < x_2$ выполняется неравенство
$f(x_1) < f(x_2)$.
Функция $y = f(x)$ называется **убывающей** на промежутке P,
принадлежащим области определения функции, если для любых значений аргумента x_1 и x_2 из промежутка P, таких, что $x_1 < x_2$ выполняется неравенство
$f(x_1) > f(x_2)$.
Функция $y = f(x)$ называется **неубывающей** на промежутке P,
принадлежащим области определения функции, если для любых значений аргумента x_1 и x_2 из промежутка P, таких, что $x_1 < x_2$ выполняется неравенство
$f(x_1) \leq f(x_2)$.
Функция $y = f(x)$ называется **невозрастающей** на промежутке P,
принадлежащим области определения функции, если для любых значений аргумента x_1 и x_2 из промежутка P, таких, что $x_1 < x_2$ выполняется неравенство
$f(x_1) \geq f(x_2)$.

Примеры:

1. $y = \sqrt{x}$

$$y = 2x - 3$$

возрастающие функции

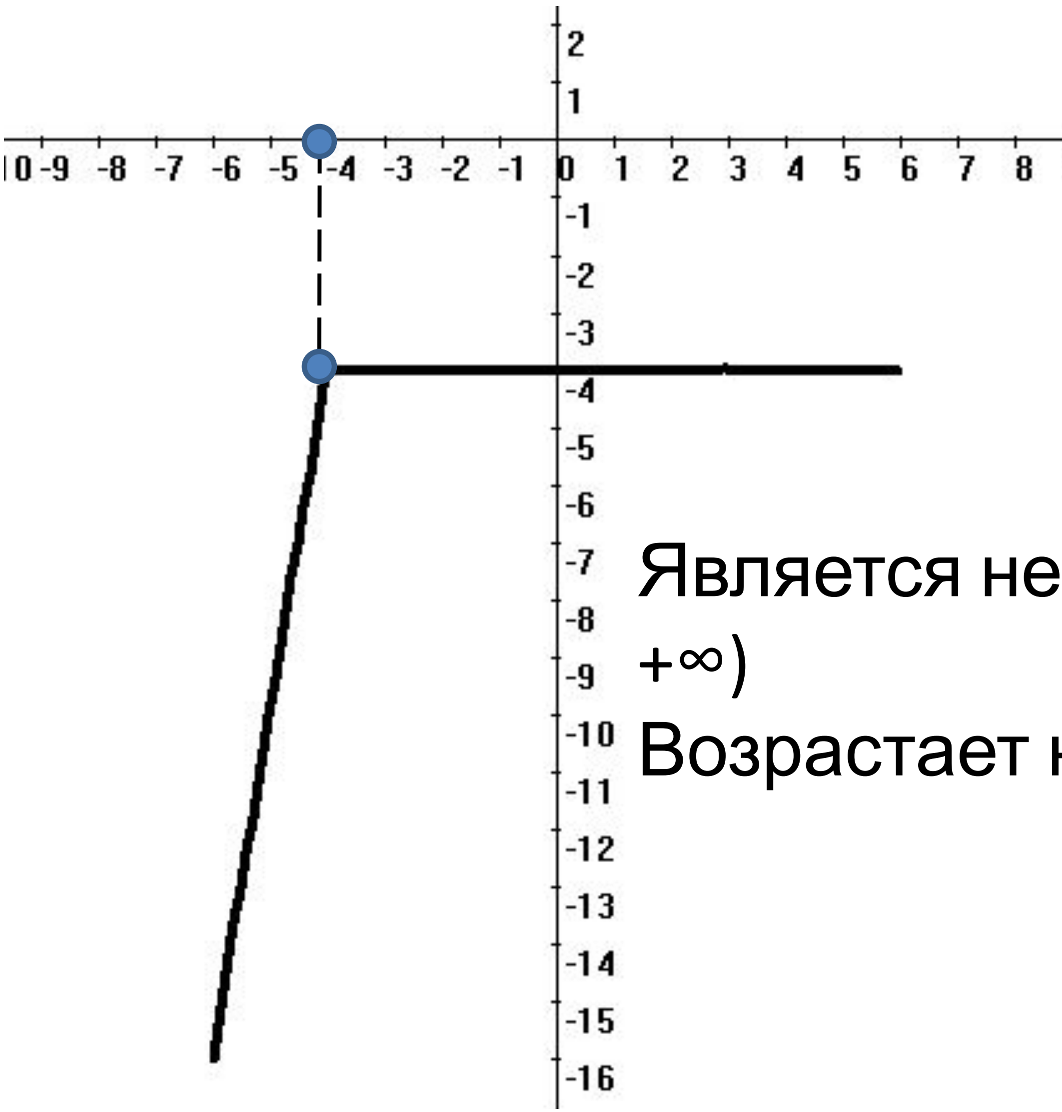
2. $y = -2x + 3$

убывающая функция

<u>Замечание.</u> Нельзя считать функцию y = k/x возрастающей или
убывающей, она возрастает или убывает на каждом из промежутков (-∞; 0) и (0; +∞), но не на всей области определения.

Примеры

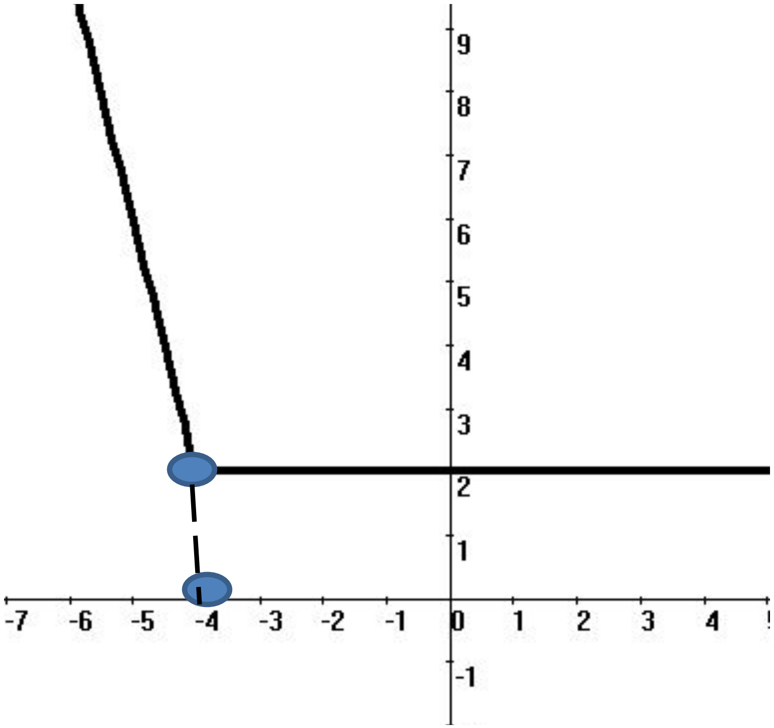
$$y = -3|x+4| + 3x = 8$$



Является неубывающей на (-∞; +∞)

Возрастает на (-∞;-4)

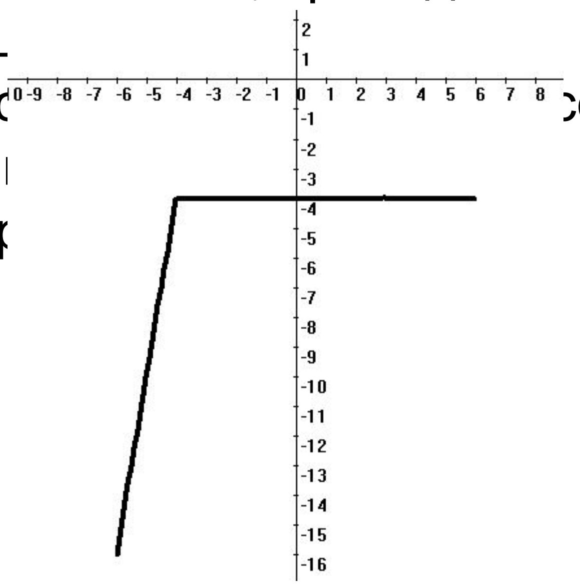
$$y = 2|x+4| - 2x - 6$$

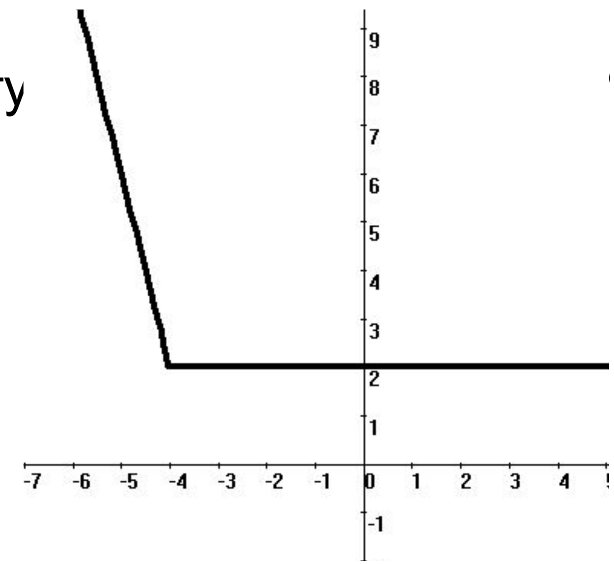


Является невозрастающей на (-∞; +∞)
Убывает на (-∞;-4)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Функция y = f(x) называется **ограниченной снизу** на множестве Р, принадлежащим области определения функции, если существует
число m, такое, что для всех значений аргумента x из множества Р выполняется
неравенство m ≤ f(x).

Функция y = f(x) называется **ограниченной сверху** на множестве Р, принадлежащим области определения функции, если
су
чис сех значений аргу
вы
нер





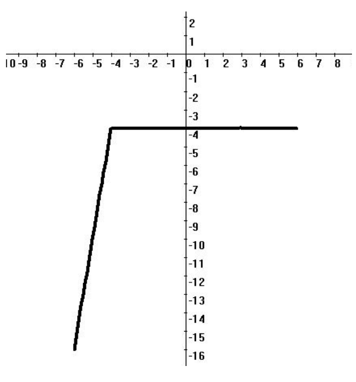
Ограничена сверху f(x) ≤ -4

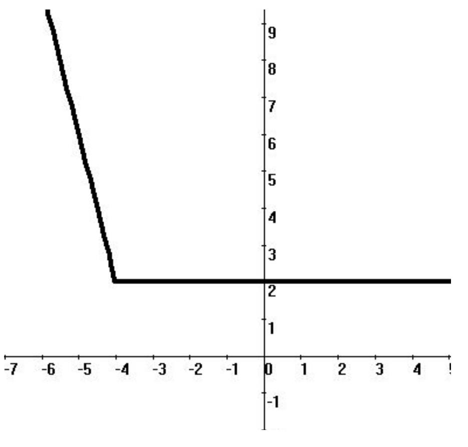
Ограничена снизу f(x) ≥ 2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Наименьшее из всех значений, которые может принимать
переменная у (если такое существует) называется наименьшим значением функции.
Наибольшее из всех значений, которые может принимать переменная у (если такое существует) называется наибольшим значением функции.

$$y_{наим} = f(x_0) \le f(x) \text{ для всех } x \in D(f)$$

$$y_{наиб} = f(x_0) \ge f(x) \text{ для всех } x \in D(f)$$





$У_{наиб} = -4$

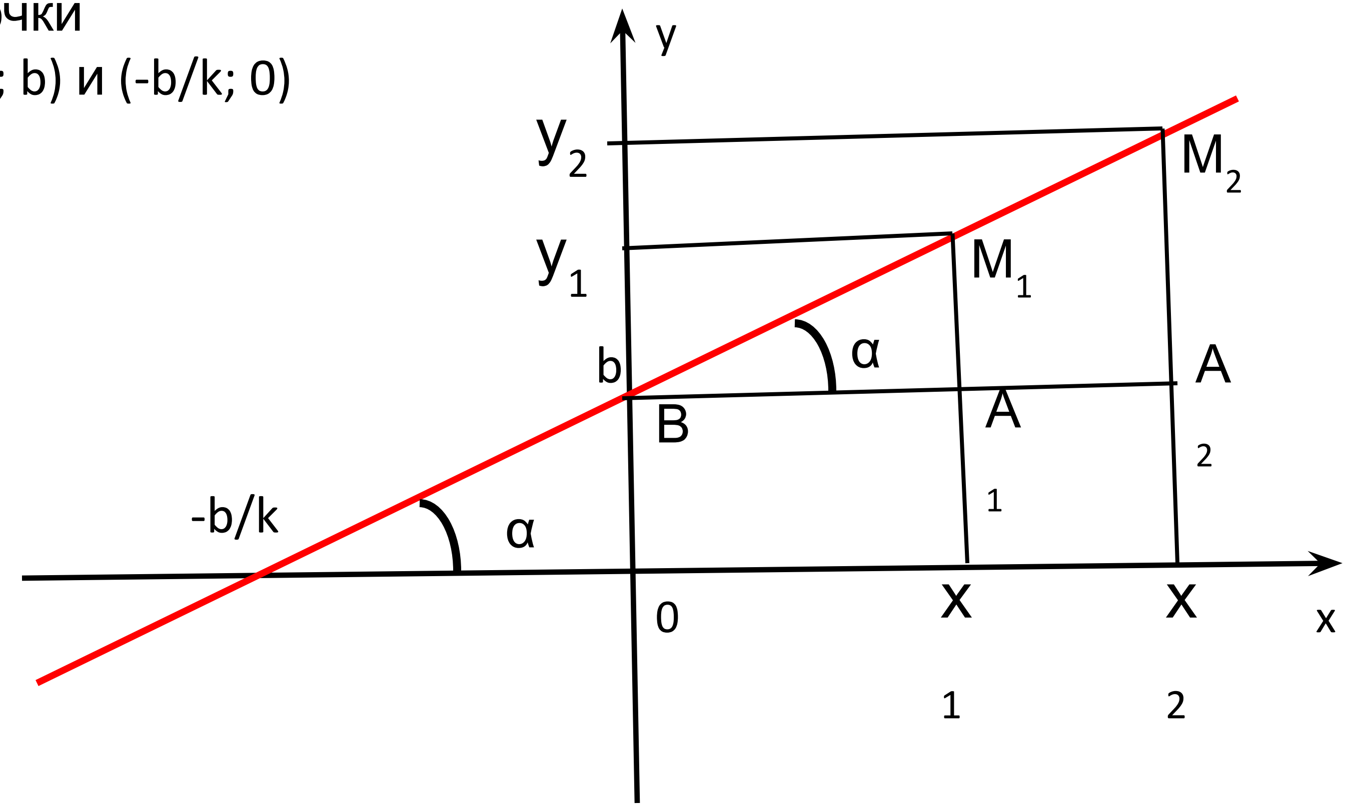
$У_{наим} = 2$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Функция вида $y = kx + b$, где k и b – действительные числа, называется **линейной.**

Пусть $k \neq 0$ и $b \neq 0$

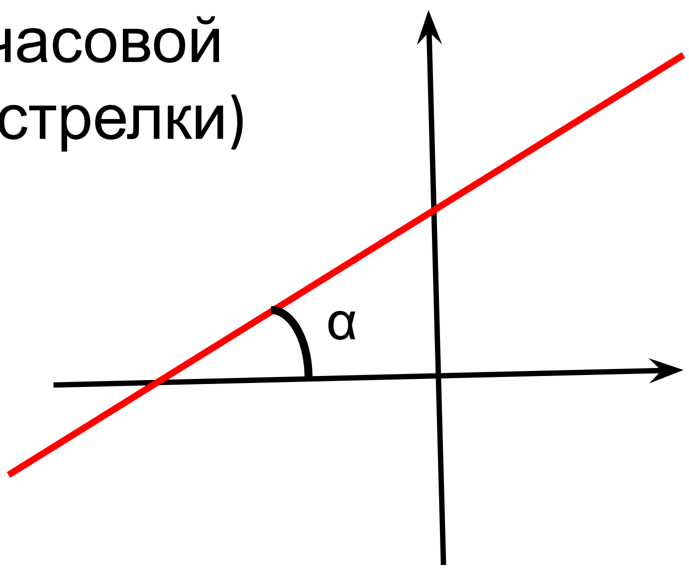
K > 0	K < 0
1. D(y) = R 2. E(y) = R 3. y=0 при x = -b/k 4. y > 0 при x > -b/k y < 0 при x < -b/k 5. Общего вида (Док-ть) 6. Возрастает на R (Док-ть) 7. Не ограничена ни сверху, ни снизу 8. Наибольшего и наименьшего значения нет	1. D(y) = R 2. E(y) = R 3. y=0 при x = -b/k 4. y > 0 при x < -b/k y < 0 при x > -b/k 5. Общего вида 6. Убывает на R 7. Не ограничена ни сверху, ни снизу 8. Наибольшего и наименьшего значения нет

Утверждение.
График линейной функции $y = kx + b$ – прямая, проходящая через точки
(0; b) и (-b/k; 0)

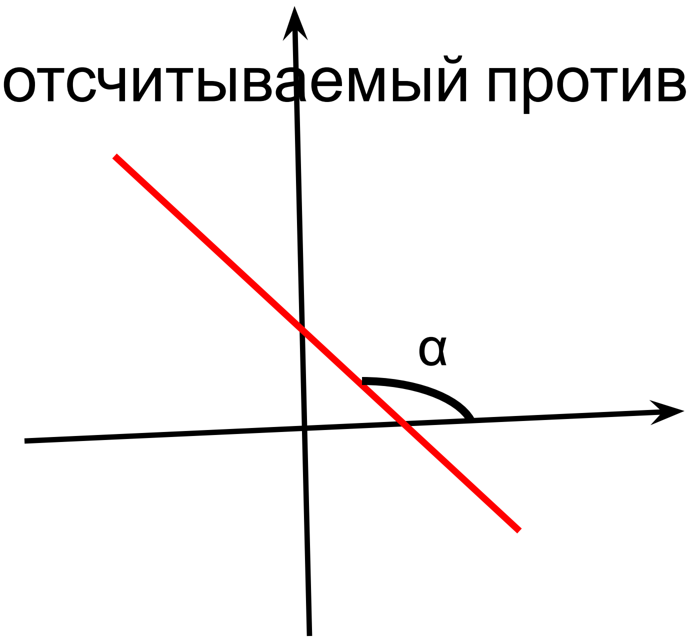


Число k в формуле y = kx + b называют **угловым коэффициентом.**

Его геометрический смысл заключается в том, что **k = tg α,**
где α – угол наклона прямой (т.е. угол между прямой и
положи-
тельным направлением оси Ох, отсчитываемый против
часовой
 стрелки)



k > 0

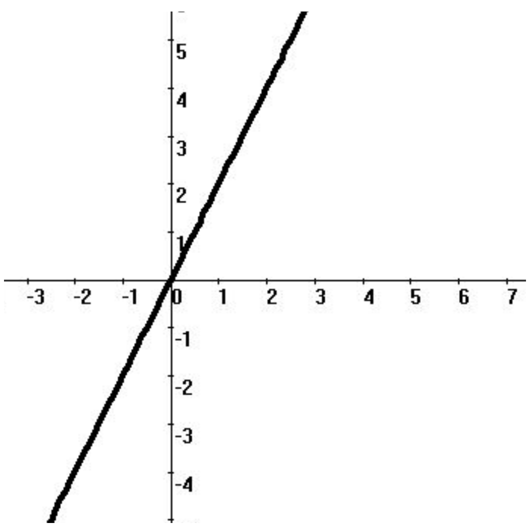


k < 0

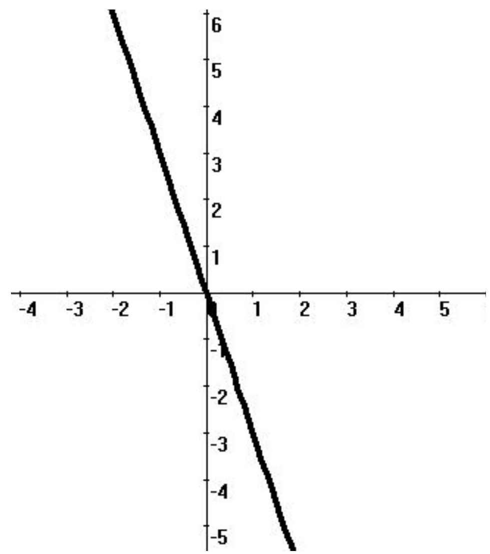
Коэффициент b в формуле y = kx + b равен ординате точки пересечения прямой
с осью Oy. Иногда его называют начальной ординатой.

Частные случаи линейной функции

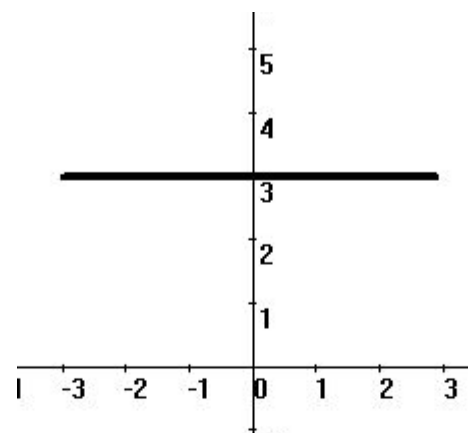
1. b = 0   y = kx – прямая пропорциональная зависимость, график – прямая, проходящая через начало координат.
   особое свойство: нечетная. График симметричен относительно (0; 0) (д-ть)
2. k = 0   y = b – постоянная. График – прямая, параллельная оси Ox. Функция четная



y = 2x



y = -3x



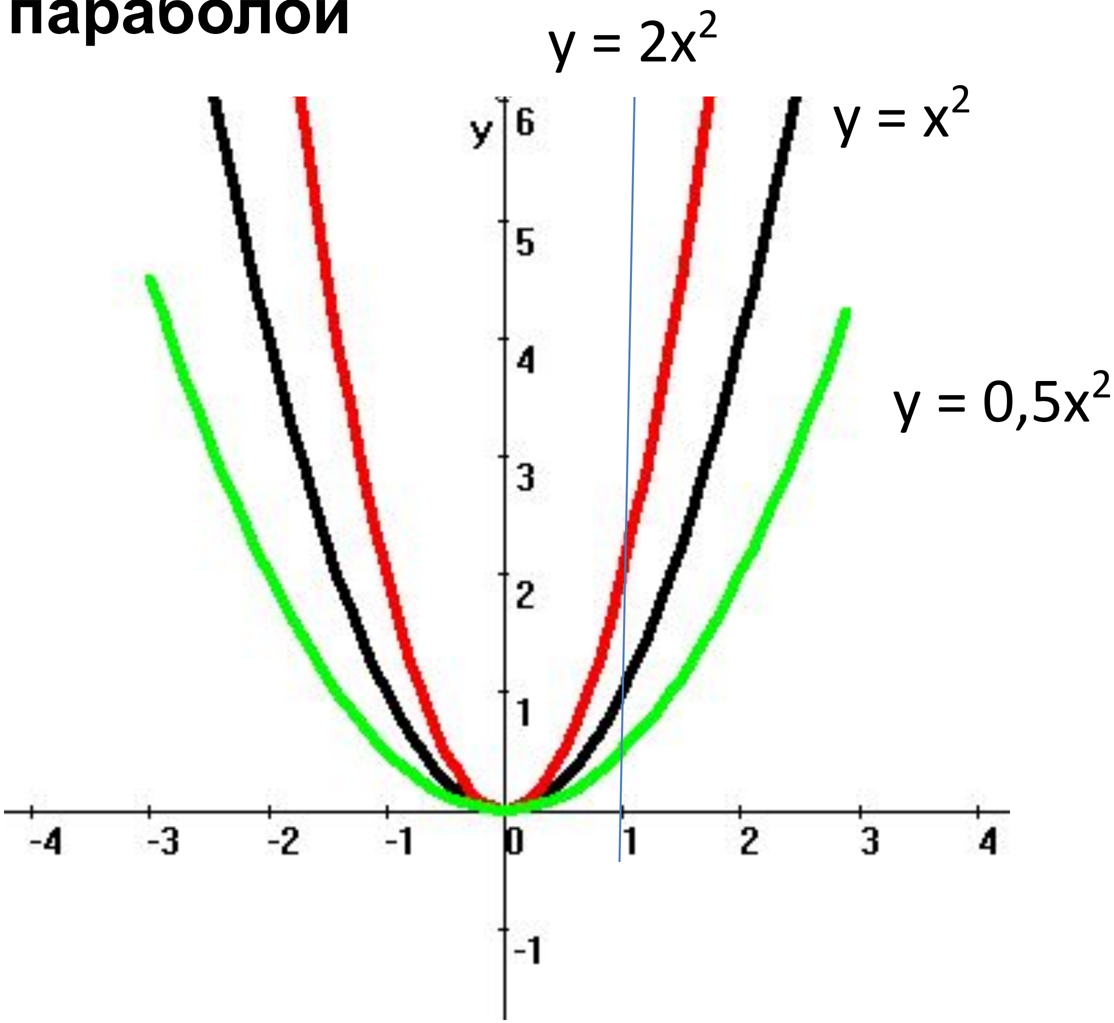
y = 3

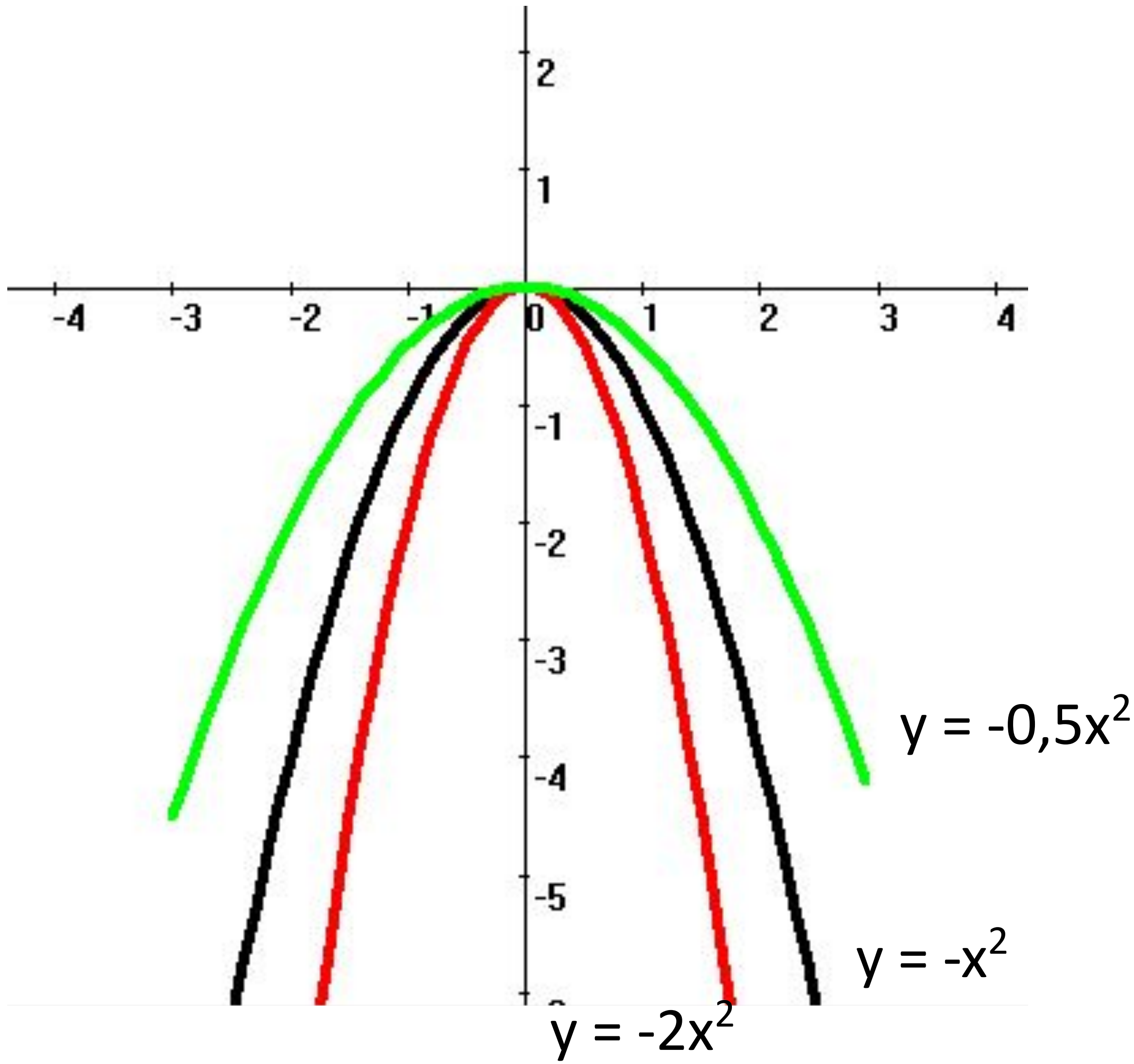
ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Функция вида $y = ax^2 + bx + c$, где a, b и c – действительные числа, ($a \neq 0$) называется **квадратичной.**

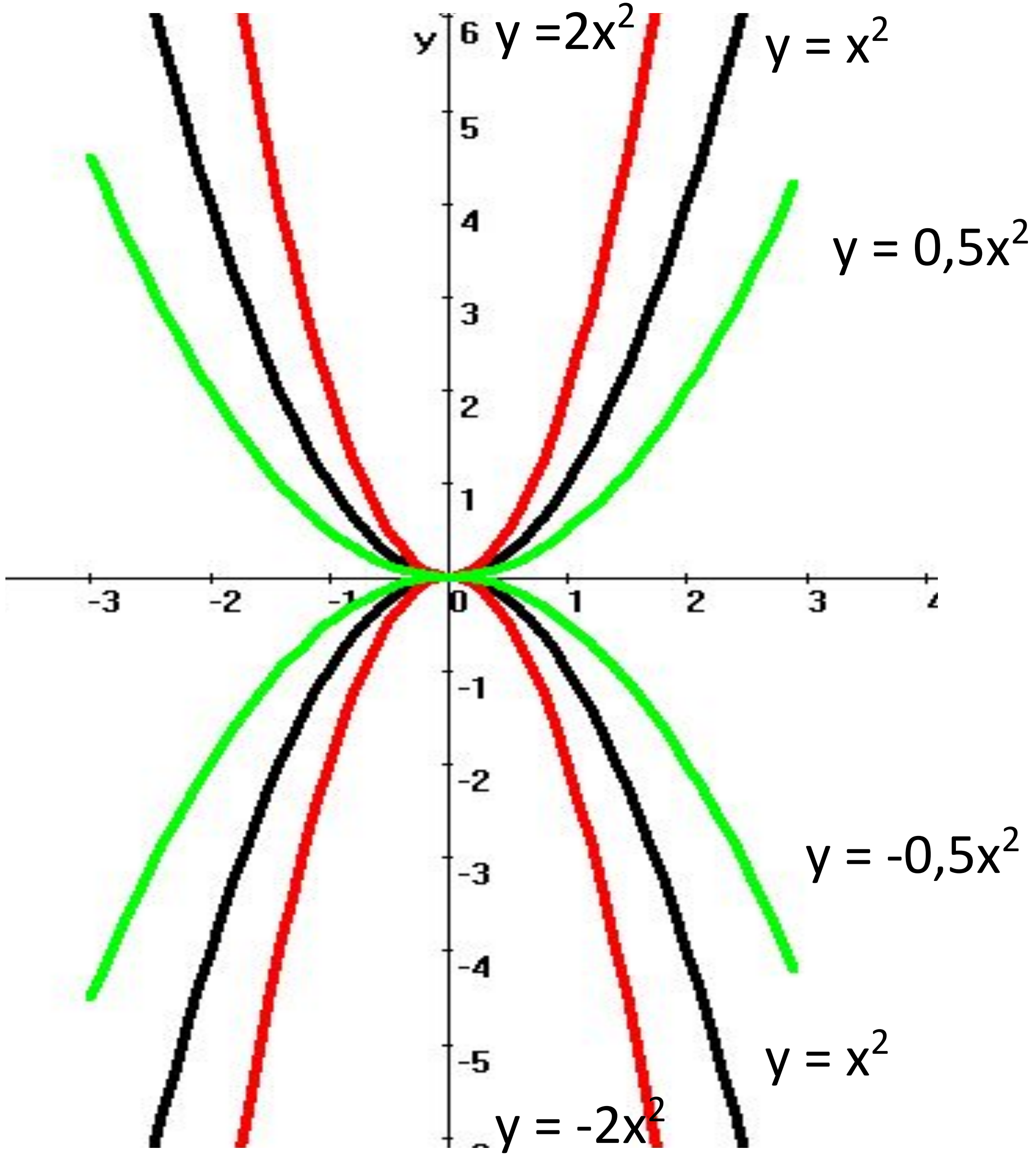
Рассмотрим функцию $y = ax^2$

$a > 0$	$a < 0$
1. $D(y) = R$ 2. $E(y) = [0; +\infty)$ 3. $y=0$ при $x = 0$ 4. $y > 0$ при всех $x \neq 0$ 5. Четная (Док-ть) 6. Возрастает на $[0; +\infty)$ Убывает на $(-\infty; 0]$ (Док) 7. Ограничена снизу 8. Наибольшего значения нет $y_{наим} = y(0) = 0$	1. $D(y) = R$ 2. $E(y) = (-\infty; 0]$ 3. $y=0$ при $x = 0$ 4. $y < 0$ при всех $x \neq 0$ 5. Четная 6. Убывает на $[0; +\infty)$ Возрастает на $(-\infty; 0]$ 7. Ограничена сверху 8. наименьшего значения нет $y_{наиб} = y(0) = 0$

График функции $y = ax^2$ называется **параболой**




2
1
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
-1
-2
-3
-4
-5
y = -0,5x²
y = -x²
y = -2x²


y =2x2
y = x2
y = 0,5x2
y = -0,5x2
y = x2
y = -2x2
y
6
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-3
-2
-1
0
1
2
3