

Тема урока: Введение в комбинаторику.

Цель урока:

- 1) понятие комбинаторных задач
- 2) основные методы решения комбинаторных задач



Автор: учитель математики
Богданова С.В.



Эпиграф урока:

«Число , место и комбинация – три взаимно перекрещивающиеся, но отличные сферы мышления, к которым можно отнести все математические идеи».

Дж. Сильвестр

Что такое комбинаторика?

Комбинаторика – это раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов.

Выбором объектов и расположением их в том или ином порядке приходится заниматься чуть ли не во всех областях человеческой деятельности, например конструктору, разрабатывающему новую модель механизма, ученому-агроному, планирующему распределение с/х культур на нескольких полях, химику, изучающему строение органических молекул, имеющих данный атомный состав.

С комбинаторными задачами люди столкнулись в глубокой древности. В Древнем Китае увлекались составлением магических квадратов. В Древней Греции занимались теорией фигурных чисел.

Комбинаторные задачи возникли и в связи с такими играми, как шашки, шахматы, домино, карты, кости и т.д. Комбинаторика становится наукой лишь в 18 в. – в период, когда возникла теория вероятности.

После первых работ, выполненных в 16в. Итальянскими учеными Дж.Кардано, Н.Тартальей и Г.Галилеем, такие задачи изучали французские математики Б.Паскаль и П.Ферма. Первым рассмотрел комбинаторику как самостоятельная ветвь науки немецкий философ и математик Г.Лейбниц, опубликовавший в 1666г. Работу «Об искусстве комбинаторики». Замечательные достижения в области комбинаторики принадлежат Л.Эймеру.



Фигурные числа.



В древности для облегчения вычислений часто использовали камешки. При этом особое внимание уделялось числу камешков, которые можно было разложить в виде правильной фигуры. Так появились квадратные числа, сконструированы треугольные и пятиугольные числа.

Квадратное число находится по формуле:

$$N_{\text{кв.}} = n \times n$$

Треугольное число находится по формуле:

$$N_{\text{тр.}} = n(n-1):2$$

Пятиугольные числа находятся по формуле:

$$N_{\text{пят.}} = n + 3n(n-1):2$$

Все составные числа древние математики представляли в виде прямоугольников.

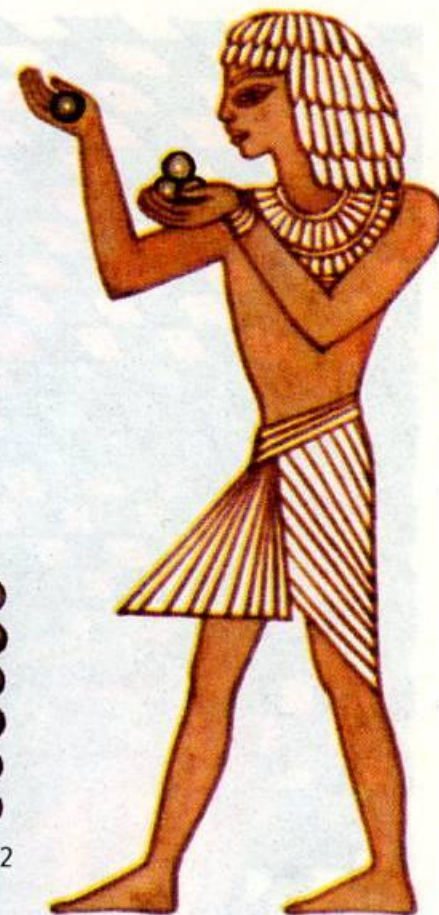
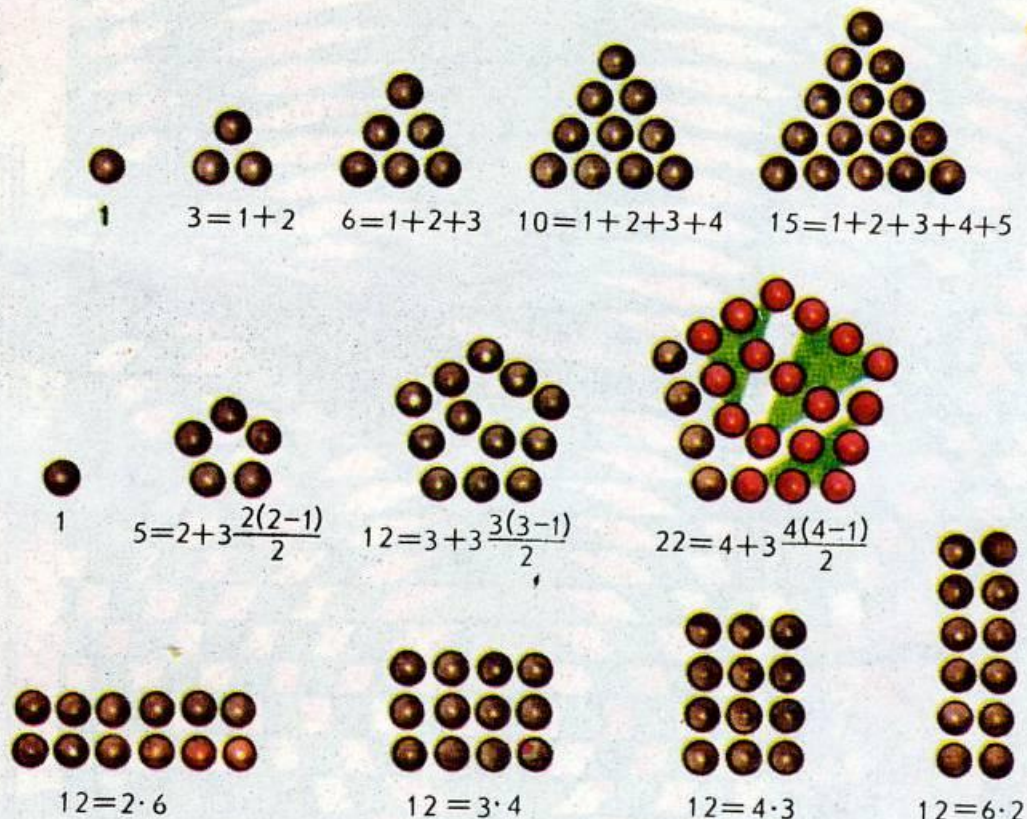




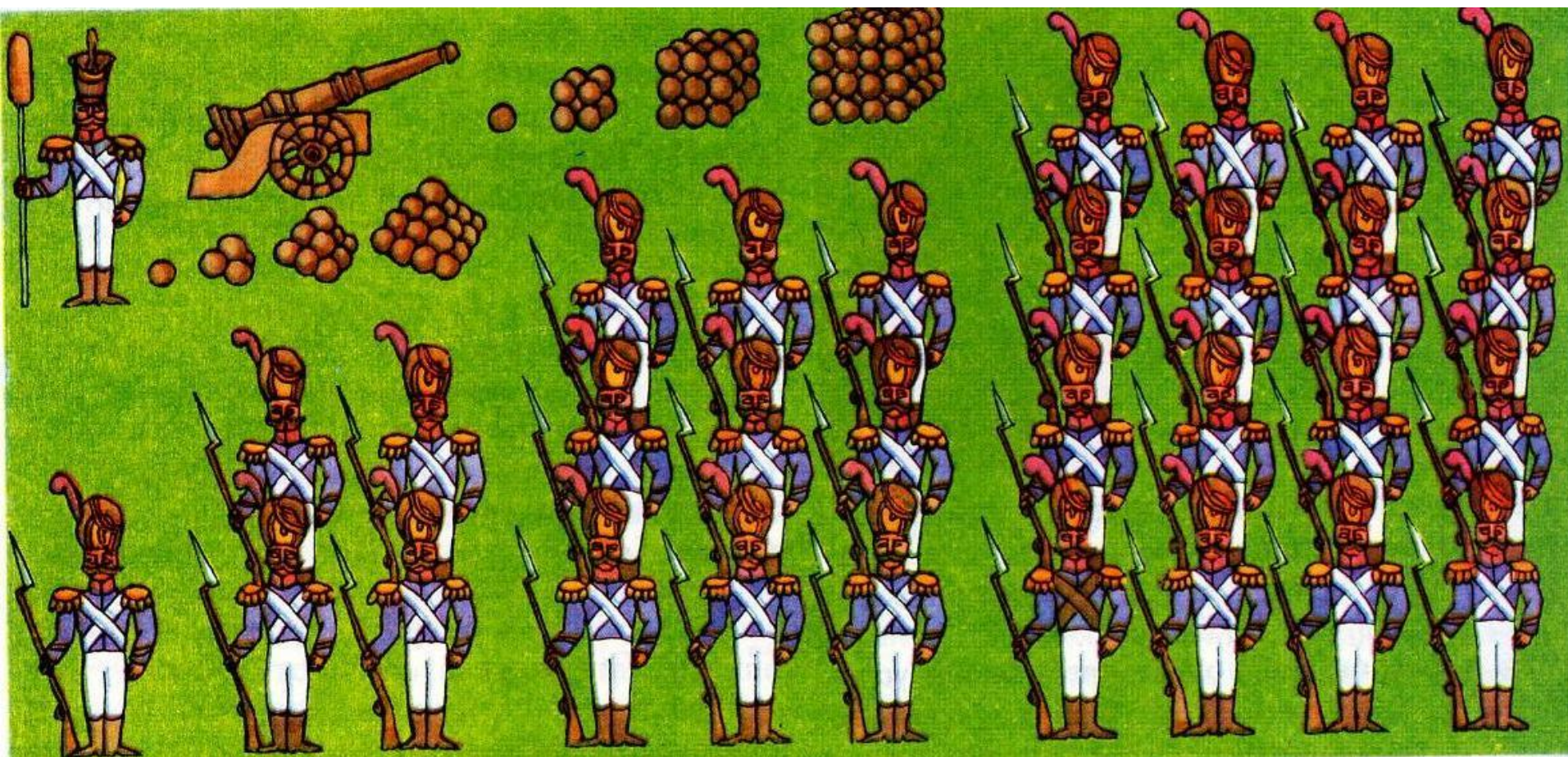
Фигурные числа.



Рис. 2



Квадратные числа



Магические и латинские квадраты.

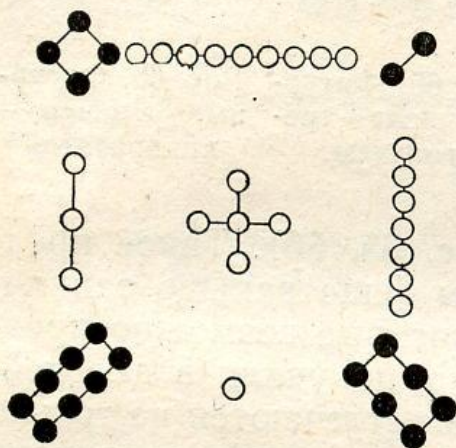


Рис. 69. Девятиклеточный старинный магический квадрат.

1	2	3	4	5
2	3	4	5	1
3	4	5	1	2
4	5	1	2	3
5	1	2	3	4

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

Рис. 71. Древнеиндийский магический квадрат.



Методы решения комбинаторных задач

- 1. Правило суммы.
- 2. Правило произведения
- 3. Таблицы.
- 4. Графы (деревья).
- 5. Формулы.



Правило суммы

- *Если элемент A может быть выбран k_1 способами, а элемент B – k_2 способами, причем выборы A и B являются взаимно исключающими, то выбор «либо A , либо B » может быть осуществлен k_1+k_2 способами.*
- ***Задача 1.*** *Сколько существует способов выбрать кратное двум или трем число из множества чисел : **2,3,4,15,16,20,21, 75,28** ?*
- *Решение:* $k_1=5$ – кратное 2 (2,4,16,20,28),
- $k_2=4$ – кратное 3 (3,15,21,75)
- $k_1+k_2 = 5+4 = 9$

Правило произведения

Если элемент A может быть выбран k_1 способами, а элемент B – k_2 способами, то выбор « A и B » может быть осуществлен $k_1 \times k_2$ способами

Задача 2. а) Сколько различных двузначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 7, 9?

Решение: $N = 5 \times 5 = 25$ (Если не сказано, что элемент не повторяется, то выборка с повторениями)

б) Сколько среди них чисел, кратных 5?

Решение: Число кратно 5, если оканчивается цифрой 5 или 0. В нашем случае – 5.

На первой позиции фиксируем одну из пяти цифр, на второй – 5.

$$N = 5 \times 1 = 5$$

в) Сколько среди них чисел, кратных 11?

Решение: Двузначное число кратно 11, если обе его цифры одинаковы.

$$N = 5$$

г) Сколько среди них чисел, кратных 3?

Решение: Число кратно 3, если сумма его цифр делится на 3. Составим всевозможные пары:

1 - 1 **3 - 3** 5 - 5 7 - 7 **9 - 9**

1 - 3 3 - 5 **5 - 7** 7 - 9

1 - 5 3 - 7 5 - 9

1 - 7 **3 - 9**

1 - 9

Таких пар 15. Среди них 5 пар, сумма которых делится на 3, причем три пары допускают перестановку, т.е. могут образовать по два разных числа. Всего $5 + 3 = 8$ различных двузначных чисел.

Правило произведения

- **Задача 3.** Сколько существует способов занять 1-ое, 2-ое и 3-е места на чемпионате по футболу, в котором участвуют
 - а) 10 команд
 - **Решение:** $N=10 \times 9 \times 8=720$
 - б) 11 команд?
 - **Решение:** $N=11 \times 10 \times 9 \times 8=990$
- **Задача 4.** Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, если
 - а) цифры не повторяются?
 - **Решение:** На первом месте одна из 4-х цифр (0 не может быть), на 2-ом – одна из оставшихся 4-х:
 - $N=4 \times 4= 16$
 - б) цифры могут повторяться
 - **Решение:** На 1-ом месте может быть одна из 4-х цифр, на 2-ом – одна из 5 (0 входит):
 - $N=4 \times 5= 20$

Правило произведения

- **Задача 5.** *Несколько стран в качестве символа своего государства решили использовать флаг в виде четырех горизонтальных полос, одинаковых по ширине, но разных по цвету: белый, синий, красный, зеленый. У каждой страны свой, отличный от других, флаг.*
- **а)** Сколько всего стран могут использовать такую символику?
- **Решение:** Цвет верхней полосы можно выбрать одним из 4 способов, второй полосы – одним из трех оставшихся, цвет 3 полосы – одним из 2 оставшихся, а 4 – одним способом. По правилу произведения $N=4 \times 3 \times 2 \times 1=24$
- **б)** Сколько стран могут использовать такую символику с верхней белой полосой?
- **Решение:** Если фиксировать цвет белой полосы, то цвета следующих полос можно выбрать $3 \times 2 \times 1 = 6$ способами.
- **в)** Сколько всего стран могут использовать такую символику с нижней белой полосой?
- **Решение:** Если фиксировать цвет нижней полосы, то цвета трех расположенных над ней полос можно выбрать $3 \times 2 \times 1 = 6$ способами.
- **г)** Сколько стран могут использовать такую символику с синей и красной полосами, расположенными рядом?
- **Решение:** Две полосы, всегда расположенные рядом, можно рассматривать как одну полосу, тогда полос останется 3, из них можно составить $3 \times 2 \times 1=6$ разных флагов. Но две полосы (синюю и красную) можно «склеить» по-разному: синяя, а под ней красная, или красная, а под ней синяя. Поэтому общее количество вариантов по правилу суммы равно $6+6=12$

Правило произведения

- **Задача 6.** В клетки квадратной таблицы 2×2 произвольно ставят крестики и нолики.
- **а)** Сколькими способами можно заполнить эту таблицу?
- **Решение:** Для заполнения первой клетки есть 2 способа (крестик или нолик); для заполнения каждой последующей – тоже 2 способа; общее количество способов заполнить таблицу по правилу произведения равно $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$.
- **б)** В скольких случаях в левой нижней клетке будет стоять крестик?
- **Решение:** Если в левой нижней клетке фиксируем крестик, то остальные 3 клетки можно заполнить $2 \times 2 \times 2 = 8$ различными способами.
- **в)** В скольких случаях в верхней левой и нижней правой будут разные значки?
- **Решение:** Если в верхней клетке – крестик, а нижней – нолик, то остальные клетки можно заполнить $2 \times 2 = 4$ способами. Если в верхней клетке – нолик, а нижней – крестик, то еще 4 способа заполнения. Всего $4 + 4 = 8$ способов.

Правило произведения

- **Задача 7.** Сколькими способами можно посадить шестерых школьников на скамейку так, чтобы Коля и Оля оказались рядом?
- **Решение:** Будем считать, что на скамейке 6 пустых мест. Посадить Колю можно шестью способами, после чего Олю посадить рядом с ним одним или двумя способами. Это зависит от того, куда мы посадили Колю – на крайнее место или нет.
- Пусть Коля сидит на краю. Место на краю можно выбрать 2 способами, после чего Олю можно посадить одним способом, после чего оставшиеся 4 места можно занять $4 \times 3 \times 2 \times 1$ способами, значит, всего $2 \times 1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 48$ способов
- Коля сидит где-то в середине. Место для Коли можно выбрать 4 способами, Олю можно посадить 2 способами, значит, всего
- $4 \times 2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 192$ способами.
- По правилу сложения $48 + 192 = 240$ способов.

Правило произведения

- **Задача 8.** Из цифр 1,2,3,5 составили все возможные четырехзначные числа (без повторения цифр). Сколько среди них таких чисел, которые больше 2000, но меньше 5000?
- **Решение:** Выбор 1-ой цифры – 2 способа (3,4), 2-ой цифры – 3 способа, третьей – 2 способа, четвертой -1. По правилу произведения $N=2 \times 3 \times 2 \times 1=12$ чисел.
- **Задача 9.** На входной двери дома установлен домофон, на котором нанесены цифры 0,1,2,...9. Каждая квартира получает кодовый замок из двух цифр типа 0-2, 3-7 и т.п. Хватит ли кодовых замков для всех квартир, если в доме 96 квартир? (код 0-0 не существует)
- **Решение:** Выбор 1-й цифры – 10 вариантов, 2-й – 10 вариантов.
- Всего $10 \times 10 - 1 = 99$ вариантов
- Ответ: хватит.

Правило произведения

- **Задача 10.** В контрольной работе будет 5 задач – по одной из каждой пройденной темы. Задачи будут взяты из общего списка по 10 задач в каждой теме, а всего было пройдено 5 тем. При подготовке к контрольной работе Вова решил только по 8 задач в каждой теме. Найдите:
- а) общее число всех возможных вариантов контрольной работы
- **Решение:** Каждая задача может быть выбрана 10 способами. По правилу произведения $N=10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100000$
- б) число тех вариантов, в которых Вова умеет решать все 5 задач
- **Решение:** $N=8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 = 32768$
- в) число тех вариантов, в которых Вова не сможет решить ни одной задачи
- **Решение:** $N=2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$
- г) число тех вариантов, в которых Вова умеет решать все задачи, кроме первой.
- **Решение:** $N=2 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 = 8192$

Правило произведения

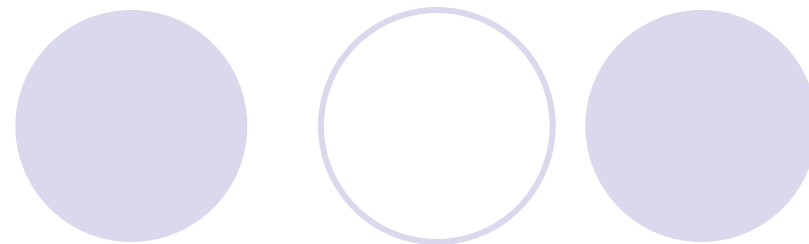
- **Задача 11.** Три вершины правильного 10-угольника покрасили в рыжий цвет, а остальные – в черный. Сколько можно провести отрезков с разноцветными концами?
- **Решение:** Первую рыжую вершину можно соединить отрезком с любой из $10 - 3 = 7$ черных вершин, после этого вторую рыжую вершину можно соединить отрезком с любой из 6 оставшихся черных вершин, а третью рыжую – с любой из 5 оставшихся черных вершин. Общее число вариантов (отрезков с разноцветными концами) по правилу произведения равно:
 - $7 \times 6 \times 5 = 210$
- **Задача 12.** Сколько ребер имеет полный граф (каждая вершина соединена с каждой), если количество его вершин 12?
- **Решение:** Первую вершину можно выбрать из 12, вторую – из 11; всего $12 \times 11 = 132$ пары. Но они учитывают порядок выбора (каждая пара входит дважды). Поэтому количество ребер равно $12 \times 11 : 2 = 66$

Таблицы вариантов

- **Задача 13.** Составляя расписание уроков на понедельник для 7а класса, завуч хочет первым уроком поставить либо физику, либо алгебру, а вторым – либо русский язык, либо литературу, либо историю. Сколько существует вариантов составления расписания на первые два урока?
- **Решение:** Составим таблицу вариантов:
- Всего существует $2 \times 3 = 6$ вариантов

2 урок 1 урок	русский	литература	история
физика	Физика русский	Физика литература	Физика история
алгебра	Алгебра русский	Алгебра литература	Алгебра история

Таблицы вариантов



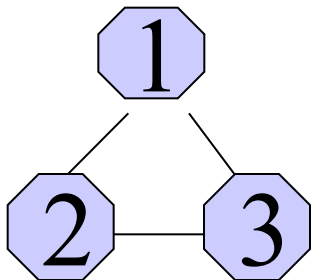
- **Задача 14.** Сколько двузначных чисел, кратных 3, можно получить из цифр 1,3,5,7,9?
- а) цифры не повторяются -
- 6 вариантов (15,39,57,51,75,93)
- б) цифры могут повторяться – 8 вариантов (еще 33,99)

1 2	1	3	5	7	9
1	1 - 1	1-3	1-5	1-7	1-9
3	3-1	3-3	3-5	3-7	3-9
5	5-1	5-3	5-5	5-7	5-9
7	7-1	7-3	7-5	7-7	7-9
9	9-1	9-3	9-5	9-7	9-9

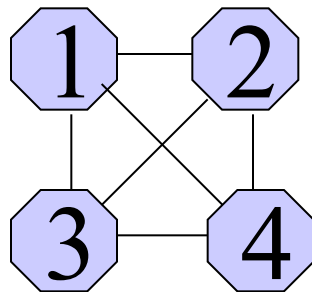
Подсчет вариантов с помощью графов

- **Задача 15.** При встрече каждый из друзей пожал другому руку. Сколько было рукопожатий, если друзей:
 - а) трое б) четверо в) пятеро

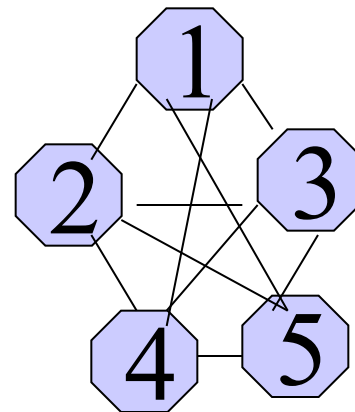
- $N=3$



- $N=6$



- $N=10$



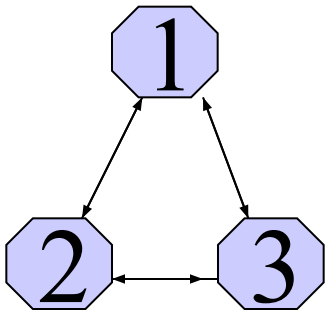
Построение графов

Задача 16. По окончании деловой встречи специалисты обменялись визитными карточками. Сколько всего визитных карточек было роздано, если во встрече участвовали:

А) 3 человека

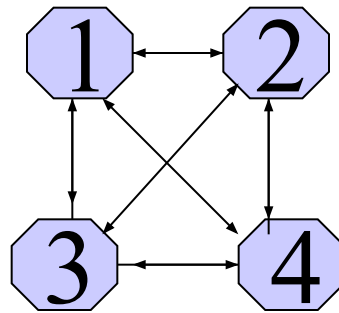
б) 4 человека

в) 5 человек



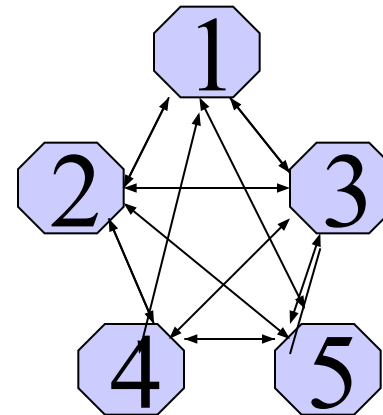
3 ребра, 6 стрелок
20 стрелок

$N=6$



6 ребер, 12 стрелок

$N=12$

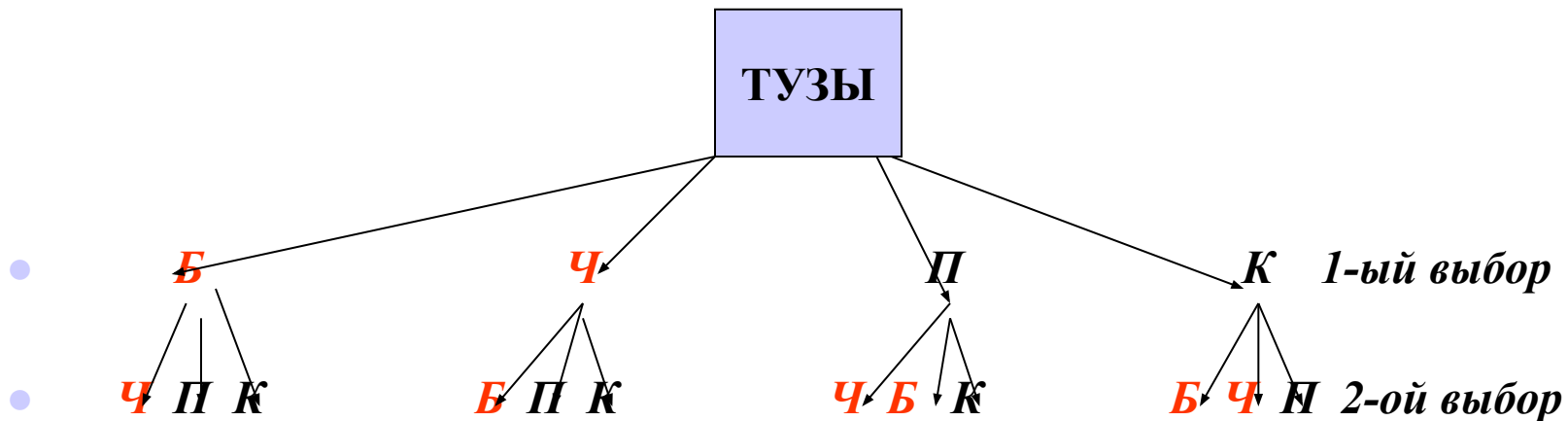


10 ребер,

$N=20$

Граф-дерево

- **Задача 17.** Из 4-х тузов поочередно выбирают два.
- А) Нарисуйте дерево возможных вариантов (12 вариантов)
- Б) В скольких случаях среди выбранных будет бубновый туз? (6)
- В) В скольких случаях вторым выбранным будет туз пик? (3)
- Г) В скольких случаях тузы будут разного цвета? (8)



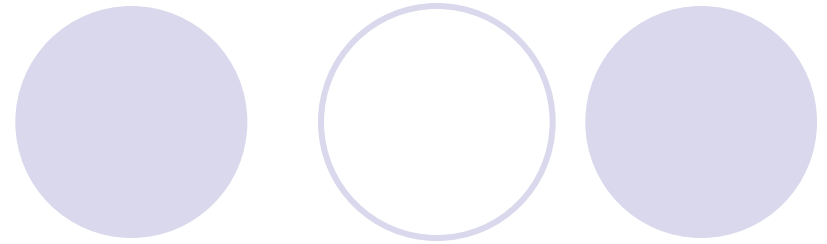
Граф-дерево

- Задача 18.** Маше на день рождения подарили 3 букета цветов: из роз (р), астр (а) и гвоздик (г). В доме было 2 вазы: хрустальная (х) и керамическая (к). Маша пробовала устанавливать каждый букет в каждую вазу. Перечислить все полученные сочетания букета с вазой.



Исходы: к-г, к-а, к-р, х-г, х-а, х-а – всего 6 вариантов

Виды выборок



- Перестановки
 - Размещения
 - Сочетания
- без повторений*
- Размещения с повторениями (строки)
 - Перестановки с повторениями
 - Сочетания с повторениями
- условные объекты*
- Разбиения
 - Подмножества
- частные случаи размещений и перестановок с повторениями*

Формулы комбинаторики

Факториал числа

Произведение n первых натуральных чисел называется факториал числа n и обозначается $n!$

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120;$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$$

Перестановка без повторений.

Даны цифр: 1,2,3,4,5,6,7. Сколько различных чисел можно составить из этих цифр? Каждое число является перестановкой из 7 элементов.

Примеры: 1234567, 2354167, 7546321.

Перестановка-упорядоченное множество.

Число перестановок из n элементов вычисляют по формуле $P_n = n!$.

По условию $n=7$

Так из 7 цифр можно $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$ различных чисел.

Перестановка с повторениями.

Даны цифр: 1,2,2,3,3,3,4,. Сколько различных чисел можно составить из этих цифр? Каждое число является перестановкой из 7 элементов.

Примеры: 1223334, 4232331, 2233314.

Некоторые числа при перестановке одинаковых цифр не меняется. Число таких перестановок вычисляется по формуле

$$P_n = n! / (n_1! \cdot n_2! \cdot n_3!).$$

По условию $n=7, n_1=2, n_2=3$

Получаем $7! / (2! \cdot 3!) = 5040 / 12 = 420$ различных чисел.



Формулы комбинаторики.

Сочетание.

Имеется 7 цветных карандашей. Выбирается 3 карандаша. Сколько существует способов выбрать 3 карандаша, чтобы не было повторяющихся наборов? Выборка из трёх карандашей – это сочетание из 7-ми по 3 элемента в каждом.

Сочетание-неупорядоченная выборка из данного множества элементов.

Число сочетаний из n элементов по m в каждом находим по формуле: $C_n = n! / (m! \cdot (n-m)!)$.

Пример. В классе обучается 20 человек. Сколько существует способов выбрать актив, состоящий из 4 человек?

Решение. Находим число сочетаний из 20 элементов по 4 в каждом:

$20! / (4! \cdot 16!) = 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 / 24 = 4845$ способов выбрать актив.

Размещение.

Буквы алфавита записаны на карточках. Выбирается 4 карточки и затем из набора составляют различные слова. Под словом будем понимать порядок следования букв. Например: *плот, лотп, лпот* - разные слова. Каждое полученное слово-это размещение.

Размещение –упорядоченная выборка из данного множества элементов.

Число размещений из n элементов по m в каждом находим по формуле: $A_n = n! / (n-m)!.$

Сколько слов можно получить в предложенной задаче? По формуле получаем решение $32! / (32-4)! = 32! / 28! = 29 \cdot 30 \cdot 31 \cdot 32 = 863040$ слов можно получить.