ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Функции нескольких переменных, способы задания, определение, геометрический смысл.

Почти во всех зависимостях, имеющих место в природе, зависимые величины являются функциями двух, трех или нескольких переменных.

Примеры:

1) Объем идеального газа зависит от 2 величин – давления и температуры.
2) Объем кругового цилиндра есть функция от радиуса высоты $V = \pi R^2 H$.
3) Закон Ома $I = \frac{U}{R}$.
4) Объем параллелепипеда $V = a \cdot b \cdot c$.
5) Изучая физическое состояние какого-либо тела часто приходится наблюдать изменение его свойств от точки к точке. Таковы: плотность, температура, электрический потенциал и др. Все эти величины функции от координат x, y, z точки. Если физическое состояние тела меняется во времени, то к этим независимым переменным присоединяется еще и время t. В этом случае имеем дело с функциями 4 переменных.

Если каждой паре $(x;y)$ значений двух, независимых друг от друга, переменных величин x и y, из некоторой области их изменения D, соответствует определенное значение величины z, то переменная z называется ***функцией двух независимых переменных.***

Обозначение: $z = f(x,y)$ или $z = F(x,y)$

x, y - независимые переменные (аргументы)

z - зависимая переменная (функция).

Если паре чисел $(x;y)$ соответствует одно значение z, то функция называется ***однозначной***, а если более одного, то – ***многозначной***.

Способы задания функции нескольких переменных

1. ***Аналитический:*** $\left.\begin{array}{l} z = x^2 + y^2 \\ z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{array}\right\}$ функции заданы явно

$z^2 + x^2 + y^2 - 1 = 0$ - функция задана не явно

Здесь указан порядок действий, который надо проделать над аргументом, чтобы получить значение функции.

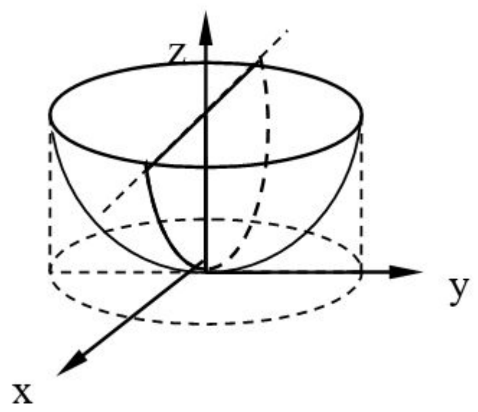
2. ***Табличный:*** Для функции двух переменных таблица с двойным входом.

$y \backslash x$	x_1	x_2	x_3	…	x_n
y_1					
y_2					
…					
y_n					

$y \backslash x$	1	2	3	4	5
3	3	6	9	12	15
1	1	2	3	4	5
2	2	4	6	8	10

$z = xy$

3. ***Графический:*** График функции двух переменных представляет собой поверхность.



Проекция графика на координатную плоскость XOY есть область определения функции $z = f(x, y)$.

Областью определения функции двух переменных $z = f(x;y)$ называется множество *всех* пар $(x;y)$, для которых существует значение z. Как найти область определения функции двух переменных?

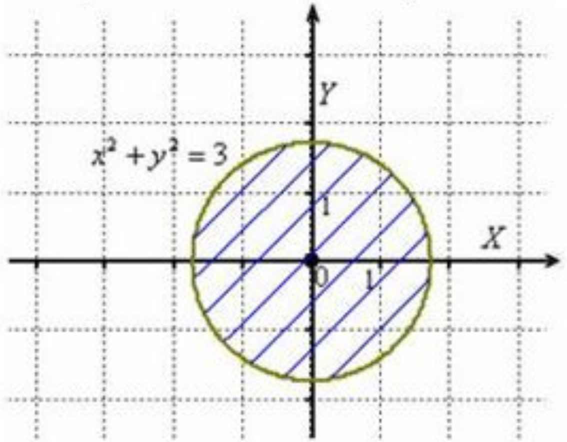
Рассматривая различные понятия функции нескольких переменных, полезно проводить аналогии с соответствующими понятиями функции одной переменной. В частности, при выяснении **области определения** $y = f(x)$ мы обращали особое внимание на те функции, в которых есть дроби, корни чётной степени, логарифмы и т. д. Здесь всё точно так же!

Пример 1: Найти область определения функции и изобразить её на чертеже $z = \sqrt{3 - x^2 - y^2}$

Решение: *подкоренное выражение должно быть неотрицательным:*

$3 - x^2 - y^2 \geq 0$ *или* $x^2 + y^2 \leq 3$

Изобразим область определения на чертеже:



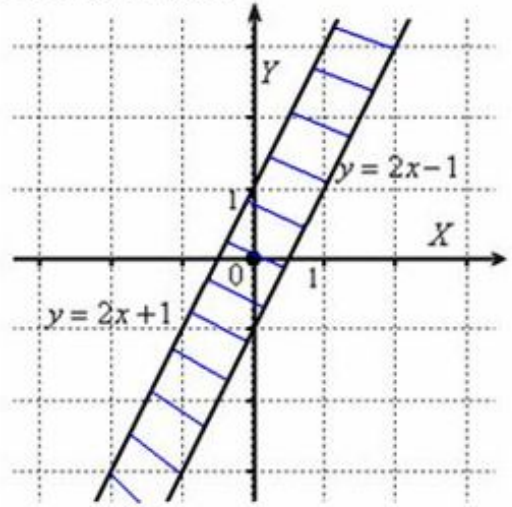
Ответ: $x^2 + y^2 \leq 3$ *– круг с центром в начале координат, радиуса* $\sqrt{3}$.

Пример 2 . Найти область определения функции $z = \arcsin(2x - y)$

Решение: аргумент арксинуса должен находиться в следующих пределах: $-1 \le 2x - y \le 1$

$$\begin{cases} -1 \le 2x - y \\ 2x - y \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + 1 \ge 0 \\ 2x - y - 1 \le 0 \end{cases}$$

Система решается как обычно – строим прямые $y = 2x + 1,\ y = 2x - 1$ и находим нужные полуплоскости. В результате:



Обратите внимание, что здесь границы входят в область определения и прямые проводятся сплошными линиями.

Ответ: область определения представляет собой решение системы $\begin{cases} 2x - y + 1 \ge 0 \\ 2x - y - 1 \le 0 \end{cases}$

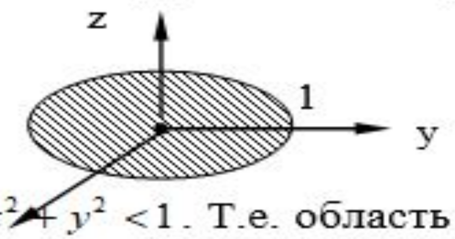
Линия, ограничивающая область определения функции нескольких переменных называется ее ***границей***. Точки области, не лежащие на границе, называются ***внутренними точками области.*** Область, состоящая из одних внутренних точек, называется ***открытой*** или ***незамкнутой.*** Область, с присоединенной к ней границей называется ***замкнутой.***

Примеры:

1. Для функции $z = x^2 + y^2$ точки могут занимать на плоскости любое положение, т.о. область определения функции вся плоскость XOY.

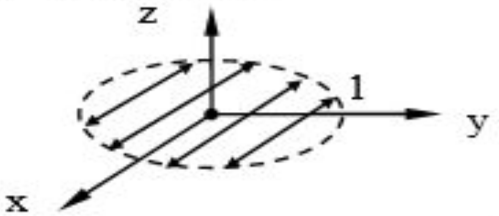
2. Для функции $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 \le 1$, т.е. точки не могут выйти за границу области. Границей области определения функции с центром C(0,0) и радиусом R=1.

Т.о. область определения функции – круг с центром C(0, 0) и R=1.



Область вместе с границей – замкнутая область.

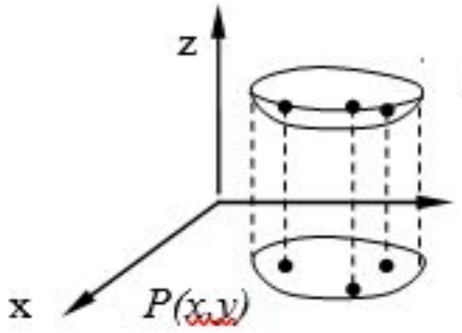
3. Для функции $z = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$, $x^2 + y^2 < 1$. Т.е. область определения функции только внутренняя часть круга



Область без границы – открытая область.

Геометрический смысл функций нескольких переменных

Геометрически функция двух переменных есть поверхность, а область определения функции есть проекция этой поверхности на плоскость XOY.



$z = f(x, y)$

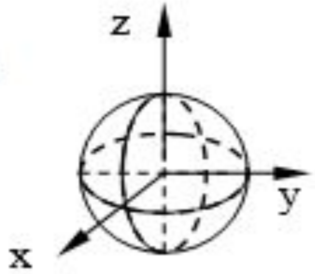
Функции трех и более переменных

$$u = u(x, y, z)$$

С геометрической точки зрения функцию трех переменных толковать нельзя, т.к. мы живем в трехмерном пространстве. Здесь лучше пользоваться аналитическим способом задания функции.

1. $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$, $1 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

сфера

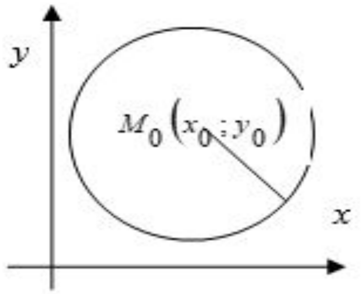


2. $u = \dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 - z^2}$, $x^2 + y^2 - z^2 \neq 0$

Все точки пространства, кроме точек, лежащих на конической поверхности.

2. Предел и непрерывность функции нескольких переменных

Окрестностью радиуса r ***точки*** $M_0(x_0;y_0)$ называется совокупность всех точек (x,y), удовлетворяющих неравенству $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r$, т.е. совокупность всех точек, лежащих внутри круга радиуса r с центром в точке $M_0(x_0;y_0)$.



Число A называется пределом функции $z=f(x,y)$ при стремлении точки $M(x;y)$ ***к точке*** $M_0(x_0;y_0)$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon>0$, найдется такое число $r>0$, что для всех точек (x,y) за исключением точки $M_0(x_0;y_0)$, для которых расстояние между точками $M\,M_0$, меньше r, выполняется неравенство $|f(x,y)-A|<\varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$

Пример 2.1: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x\cdot y}{\sqrt{x\cdot y+1}-1}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x\cdot y\cdot(\sqrt{x\cdot y+1}+1)}{x\cdot y+1-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(\sqrt{x\cdot y+1}+1)=2$

Пример 2.2: $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x\cdot y)}{y}=\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x\cdot y)\cdot x}{x\cdot y}=3$

Функция предела не имеет, т.к. при различных значениях k предел будет меняться. Предел будет зависеть от пути по которому стремиться точка.

Функция $f(x,y)$ называется ***непрерывной*** в точке $M_0(x_0,y_0)$, если предел функции при $M \to M_0$ равен значению функции в этой точке.

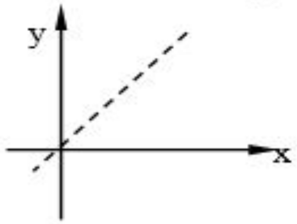
$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0) \text{ или } \lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$$

Функция $f(x,y)$ непрерывна в точке M_0, если она определена в этой точке и если для любого малого $\varepsilon > 0$ найдется такое $r = r(\varepsilon)$, что как только $|MM_0| < r$ так выполняется неравенство $|f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon$ $\begin{matrix} x - x_0 < r \\ y - y_0 < r \end{matrix}$ или $|MM_0| < r$.

Точки, в которых условие непрерывности не выполняются называются ***точками разрыва.***

Для функции двух переменных $z = f(x,y)$ точки разрыва будут образовывать линии, а для функции трех переменных $w = f(x,y,z)$ точки разрыва будут образовывать поверхности.

Пример 3.1: $z = \dfrac{x}{x-y}$ $\quad x - y \neq 0$



Точки разрыва $x - y = 0$

$y = x$ - биссектриса первого и третьего координатных углов

Пример 3.2: $u = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}}$ $\quad \begin{matrix} 1 - x^2 - y^2 - z^2 > 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{matrix}$

Поверхностью разрыва будет сфера

Функция называется ***непрерывной*** в области, если она непрерывна в каждой ее точке.

3. Частные производные и дифференциалы первого порядка функции нескольких переменных.

Пусть задана функция $z = f(x; y)$. Так как x и y — независимые переменные, то одна из них может изменяться, а другая сохранять свое значение. Дадим независимой переменной x приращение Δx, сохраняя значение y неизменным. Тогда z получит приращение, которое называется *частным приращением* z по x и обозначается $\Delta_x z$. Итак,

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x; y).$$

Аналогично получаем частное приращение z по y:

$$\Delta_y z = f(x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Полное приращение Δz функции z определяется равенством

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Если существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x; y) - f(x; y)}{\Delta x},$$

то он называется *частной производной* функции $z = f(x; y)$ в точке $M(x; y)$ по переменной x и обозначается одним из символов:

$$z'_x, \frac{\partial z}{\partial x}, f'_x, \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Частные производные по x в точке $M_0(x_0; y_0)$ обычно обозначают символами $f'_x(x_0; y_0)$, $f'_x\Big|_{M_0}$.

Аналогично определяется и обозначается частная производная от $z = f(x; y)$ по переменной y:

$$z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x; y + \Delta y) - f(x; y)}{\Delta y}.$$

Таким образом, частная производная функции нескольких (двух, трех и больше) переменных определяется как производная функции одной из этих переменных при условии постоянства значений остальных независимых переменных. Поэтому частные производные функции $f(x; y)$ находят по формулам и правилам вычисления производных функции одной переменной (при этом соответственно x или y считается постоянной величиной).

Примеры:

$z = 2x^5 + 3x^2y + y^2 - 4x + 5y - 1$

Решение:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(2x^5 + 3x^2y + y^2 - 4x + 5y - 1\right)'_x \underset{y=const}{=} 10x^4 + 6xy - 4;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(2x^5 + 3x^2y + y^2 - 4x + 5y - 1\right)'_y \underset{x=const}{=} 3x^2 + 2y + 5.$$

Найти частные производные функции $u = z^{-xy}$

Решение

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(z^{-xy}\right) = z^{-xy} \cdot \ln z \cdot (-xy)'_x = -y \cdot z^{-xy} \cdot \ln z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(z^{-xy}\right) = z^{-xy} \cdot \ln z \cdot (-xy)'_y = -x \cdot z^{-xy} \cdot \ln z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(z^{-xy}\right) = -xy \cdot z^{-xy-1}.$$

Найти частные производные функции $u = y \sin x + \sin y$.

Решение

Частная производная функции u по независимой переменной x определяется слагаемым $u = y \sin x$. Производная второго слагаемого – $\sin y$ равна нулю, как производная от константы.

$\frac{\partial u}{\partial x} = y \cos x$

В свою очередь, частная производная функции u по независимой переменной y будет определяться обоими слагаемым:

$(y \sin x)_y{}' = \sin x$

$(\sin y)_y{}' = \cos y$

Таким образом, окончательно получаем:

$\frac{\partial u}{\partial y} = \sin x + \cos y$

Ответ

$\frac{\partial u}{\partial x} = y \cos x,\ \frac{\partial u}{\partial y} = \sin x + \cos y$

4. Полный дифференциал. Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям.

Если для функции $z = f(x, y)$ аргументу x дать приращение Δx, а y дать приращение Δy, получим для функции $z = f(x, y)$ приращение Δz, которое называется ***полным приращением*** функции и определяется формулой

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Функция $z = f(x, y)$ называется ***дифференцируемой в точке*** (x, y), если в этой точке полное приращение можно представить в виде

$$\Delta z = \underbrace{A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y}_{\text{главная часть приращения функции}} + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y,$$

где $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y) \to 0$ и $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Главная часть приращения функции $z = f(x, y)$, линейная относительно Δx и Δy, называется ***полным дифференциалом функции.***

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy.$$

Для функции трех переменных $u = f(x, y, z)$:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot dz.$$

Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x, y). Найдем полное приращение этой функции:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y); \qquad f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \Delta z$$

Если подставить в эту формулу выражение

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y$$

то получим приближенную формулу:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y$$

Пример 2. Вычислить $(1{,}02)^{2{,}04}$

$$z = x^y \qquad x_0 + \Delta x = 1 + 0{,}002 \qquad x_0 = 1 \qquad \Delta x = 0{,}002$$

$$y_0 + \Delta y = 2 + 0{,}004 \qquad y_0 = 2 \qquad \Delta y = 0{,}004$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1} \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x_0 y_0} = 2 \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x_0 y_0} = 0$$

$$f(x_0, y_0) = f(1{,}2) = 1^2 = 1$$

$$(1{,}02)^{2{,}04} \approx 1 + 2 \cdot 0{,}002 + 0 \approx 1{,}004$$

- Пример 1.

Найти полный дифференциал функции $z = \ln(x \cdot y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x \cdot y} \cdot y = \frac{1}{x}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x \cdot y} \cdot x = \frac{1}{y} \quad \text{значит} \quad dz = \frac{1}{x} \cdot dx + \frac{1}{y} \cdot dy$$

- Пример 2.

Найти полный дифференциал функции $u = x^{y^2 z}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z x^{y^2 z - 1}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^2 z} \ln x \cdot 2yz; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^2 z} \ln x \cdot y^2;$$

$$du = y^2 z x^{y^2 z - 1} dx + 2x^{y^2 z} yz \ln x dy + y^2 x^{y^2 z} \ln x dz$$

5. Дифференцирование сложной и неявной функции нескольких переменных.

1 случай

Пусть дана функция двух переменных $z = f(x, y)$, причем аргументы этой функции являются функциями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ и функции $f(x, y)$, $\varphi(t), \psi(t)$ дифференцируемы. Тогда производная сложной функции $z = f[\phi(t), \psi(t)]$ вычисляется по формуле:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

2 случай

Если $z = f(x, y)$, где $y = \phi(x)$, то ***полная производная*** от z по x находится по формуле:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}..$$

3 случай

Пусть дана функция двух переменных $z = f(u, v)$, причем аргументы этой функции являются функциями $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$, то

$z = f[\varphi(x, y), \psi(x, y)] = F(x, y)$

u, v - промежуточные переменные,

x, y - независимые переменные.

Частные производные по x и y

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

Пример 1. $z = e^{x^2+y^2}$, $x = \cos t$, $y = \sin t$. Найти $\dfrac{dz}{dt}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2+y^2}\cdot 2x,\quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2+y^2}\cdot 2y,\quad \frac{dx}{dt} = -\sin t,\quad \frac{dy}{dt} = \cos t;$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} = e^{x^2+y^2}\cdot 2x\cdot(-\sin t) + e^{x^2+y^2}\cdot 2y\cdot\cos t;$$

$$\frac{dz}{dt} = e\cdot 2\cos t\cdot(-\sin t) + e\cdot 2\sin t\cdot\cos t = 0.$$

Пример 2. $z = \ln(x^2 - y^2)$, $y = e^x$. Найти $\dfrac{dz}{dx}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x^2-y^2}\cdot 2x;\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x^2-y^2}\cdot(2y);\qquad \frac{dy}{dx} = e^x$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2-y^2} + \frac{-2y}{x^2-y^2}\cdot e^x = \frac{2(x - ye^x)}{x^2-y^2}.$$

Пример.3. $z=\ln(u\cdot v)$, $u=x^2+y^2$, $v=\sin(x+y)$. *Найти* $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{1}{uv}\cdot v, \qquad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{1}{uv}\cdot u,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=2y, \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=\cos(x+y), \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=\cos(x+y);$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{v}{u\cdot v}\cdot 2x+\frac{u}{u\cdot v}\cdot\cos(x+y)\Rightarrow$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2}+ctg(x+y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{2y}{u}+\frac{1}{v}\cdot\cos(x+y) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}+ctg(x+y)$$

6. Дифференцирование сложной и неявной функции нескольких переменных.

Производная неявной функции $y = y(x)$, заданной с помощью уравнения $F(x,y) = 0$, где $F(x,y)$ - дифференцируемая функция переменных x и y, вычисляется по формуле

$$y' = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial y} \text{ при условии } \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0.$$

Частные производные неявной функции двух переменных $z = \phi(x,y)$, заданной с помощью уравнения $F(x,y,z) = 0$, где $F(x,y,z)$ - дифференцируемая функция переменных x, y, z, вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F / \partial y}{\partial F / \partial z} \text{ при условии } \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0.$$

Пример 1. $y - \sin y = x$. Найти y'.

$$F(x,y) = y - \sin y - x;\ \frac{\partial F}{\partial x} = -1;\ \frac{\partial F}{\partial y} = 1 - \cos y;\ y' = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} = \frac{1}{1 - \cos y}.$$

Пример 2. $z^3 = 3xyz$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x};\ \frac{\partial z}{\partial y}$.

$$F(x,y,z) = z^3 - 3xyz;\ \frac{\partial F}{\partial x} = -3yz;\ \frac{\partial F}{\partial y} = -3xz;\ \frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 - 3xy;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} = \frac{3yz}{3z^2 - 3xy} = \frac{yz}{z^2 - xy};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z} = \frac{3xz}{3z^2 - 3xy} = \frac{xz}{z^2 - xy}.$$

7. Производная в данном направлении. Градиент функции.

Пусть в некоторой области D задана функция $u = u(x, y, z)$ и точка $M(x, y, z)$. Проведем из точки M вектор $\overline{s}$, направляющие косинусы которого $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$. На векторе $\overline{s}$, на расстоянии Δs от его начала рассмотрим точку $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$, т.е. $\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$.

Будем предполагать, что функция $u = u(x, y, z)$ и ее частные производные первого порядка непрерывны в области D.

Предел отношения $\frac{\Delta u}{\Delta s}$ при $\Delta s \to 0$ называется **производной от функции** $u = u(x, y, z)$ **в точке** $M(x, y, z)$ **по направлению вектора** $\overline{s}$ и обозначается $\frac{\partial u}{\partial s}$, т.е. $\frac{\partial u}{\partial s} = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta s}$.

Для нахождения производной от функции $u = u(x, y, z)$ в заданной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ по направлению вектора $\overline{s}(s_x, s_y, s_z)$ используют формулу: $$\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_{M_0} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_0} \cdot \cos\alpha + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{M_0} \cdot \cos\beta + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{M_0} \cdot \cos\gamma,$$

где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $\bar{s}(s_x, s_y, s_z)$, которые вычисляются по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{s_x}{|\bar{s}|}, \quad \cos\beta = \frac{s_y}{|\bar{s}|}, \quad \cos\gamma = \frac{s_z}{|\bar{s}|}.$$

Пусть в каждой точке некоторой области D задана функция $u = u(x, y, z)$.
Вектор, проекциями которого на оси координат являются значения частных производных этой функции в соответствующей точке, называется **градиентом функции** $u = u(x, y, z)$ и обозначается $grad\, u$ или ∇u (читается «набла у»): $$grad\, u \equiv \nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \bar{k}.$$

При этом говорят, что в области D определено векторное поле градиентов.

Для нахождения градиента функции $u = u(x, y, z)$ в заданной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ используют формулу:

$$\left(grad\ u\right)_{M_0} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_0} \cdot \bar{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{M_0} \cdot \bar{j} + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{M_0} \cdot \bar{k}.$$

Свойства градиента

1. Производная в данной точке по направлению вектора $\bar{s}$ имеет наибольшее значение, если направление вектора $\bar{s}$ совпадает с направлением градиента. Это наибольшее значение производной равно $|grad\ u|$.

2. Производная по направлению вектора, перпендикулярного к вектору $grad\ u$, равна нулю.

8. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Если поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, то *уравнение касательной плоскости* в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ к данной поверхности:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0), \tag{10.8}$$

а *канонические уравнения нормали*, проведенной через точку $M_0(x_0, y_0)$ поверхности:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \tag{10.9}$$

В случае, когда уравнение гладкой поверхности задано в неявном виде: $F(x, y, z) = 0$, и $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, то уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0, \tag{10.10}$$

а уравнение нормали —

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}. \blacktriangleleft \tag{10.11}$$

9. Экстремум функции двух переменных.

Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется *точкой локального максимума (минимума) функции* $z = f(x, y)$, если для всех точек $M(x, y)$, отличных от $M_0(x_0, y_0)$ и принадлежащих достаточно малой ее окрестности, выполняется неравенство

$$f(x_0, y_0) \geqslant f(x, y) \quad (f(x_0, y_0) \leqslant f(x, y)).$$

Максимум или минимум функции называется ее *экстремумом*. Точка, в которой достигается экстремум функции, называется *точкой экстремума функции*.

Теорема 1 (необходимые условия экстремума). *Если точка $M_0(x_0, y_0)$ является точкой экстремума функции $f(x, y)$, то $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$ или хотя бы одна из этих производных не существует.*

Точки, для которых эти условия выполнены, называются *стационарными* или *критическими*. Точки экстремума всегда являются стационарными, но стационарная точка может и не быть точкой экстремума. Чтобы стационарная точка была точкой экстремума, должны выполняться *достаточные условия экстремума*.

Для того чтобы сформулировать достаточные условия экстремума функции двух переменных, введем следующие обозначения: $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$, $\Delta = AC - B^2$.

Теорема 2 (достаточные условия экстремума). Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно в некоторой области, содержащей стационарную точку $M_0(x_0, y_0)$. Тогда:

1) *если $\Delta > 0$, то точка $M_0(x_0, y_0)$ является точкой экстремума для данной функции, причем M_0 будет точкой максимума при $A < 0$ $(C < 0)$ и точкой минимума при $A > 0$ $(C > 0)$;*

2) *если $\Delta < 0$, то в точке $M_0(x_0, y_0)$ экстремума нет;*

3) *если $\Delta = 0$, то экстремум может быть, а может и не быть.*

Отметим, что случай 3 требует дополнительных исследований.