

МБОУ «Инсарская средняя общеобразовательная школа №1»

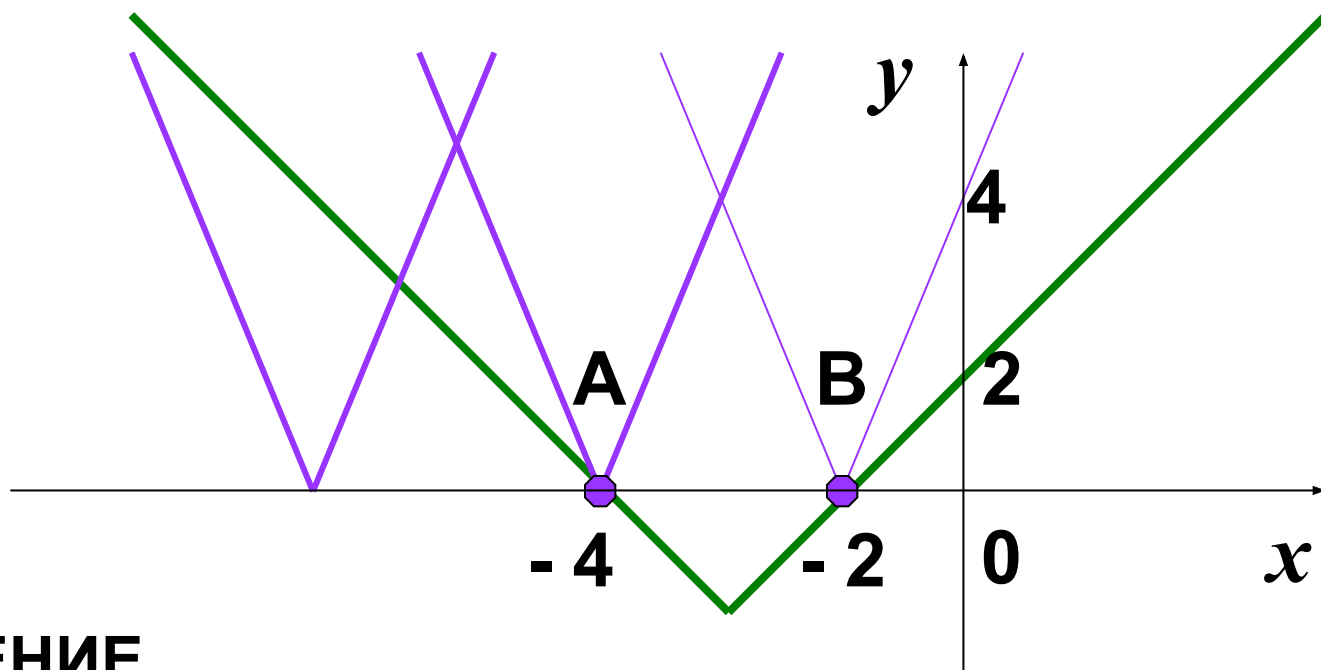
Факультативное занятие в 11 классе:

***Графический подход к решению
задач с параметром и модулем***

подборка заданий для подготовки к ЕГЭ

**Чудаева Елена Владимировна, учитель математики,
г. Инсар, Республика Мордовия**

Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $|2x - a| = |x + 3| - 1$ имеет единственное решение.



РЕШЕНИЕ.

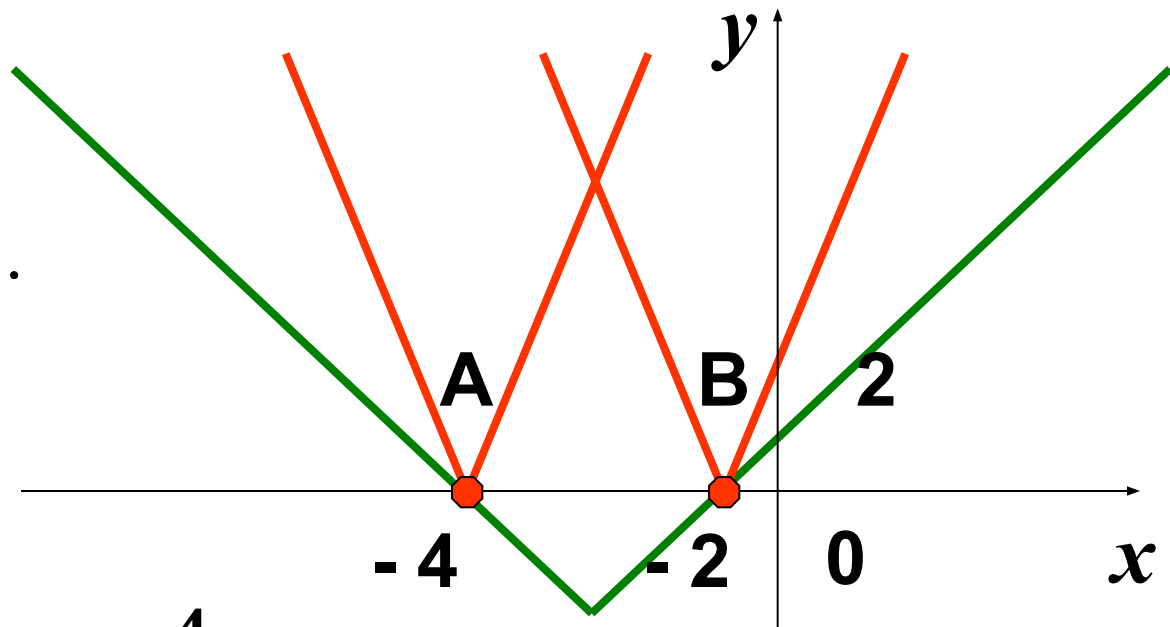
Правая часть этого уравнения задает неподвижный «уголок», левая – «уголок», вершина которого двигается по оси абсцисс.

Очевидно, что данное уравнение будет иметь единственное решение, если вершина движущегося «уголка» попадет в точку А, или точку В. Имеем,

$$|x + 3| - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -4, \quad x = -2,$$

тогда $A(-4; 0)$, $B(-2; 0)$ и координаты этих точек удовлетворяют уравнению $y = |2x - a|$.

$$\begin{cases} |-8 - a| = 0 \\ |-4 - a| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -8 \\ a = -4 \end{cases}$$



Ответ: $a = -8, \quad a = -4$

Графический способ решения задач с параметром

Задачу с параметром можно рассматривать как функцию $f(x; a) = 0$



•1. Строим графический образ

•2. Пересекаем полученный график прямыми параллельными оси абсцисс

•3. «Считываем» нужную информацию

Схема

решения

:

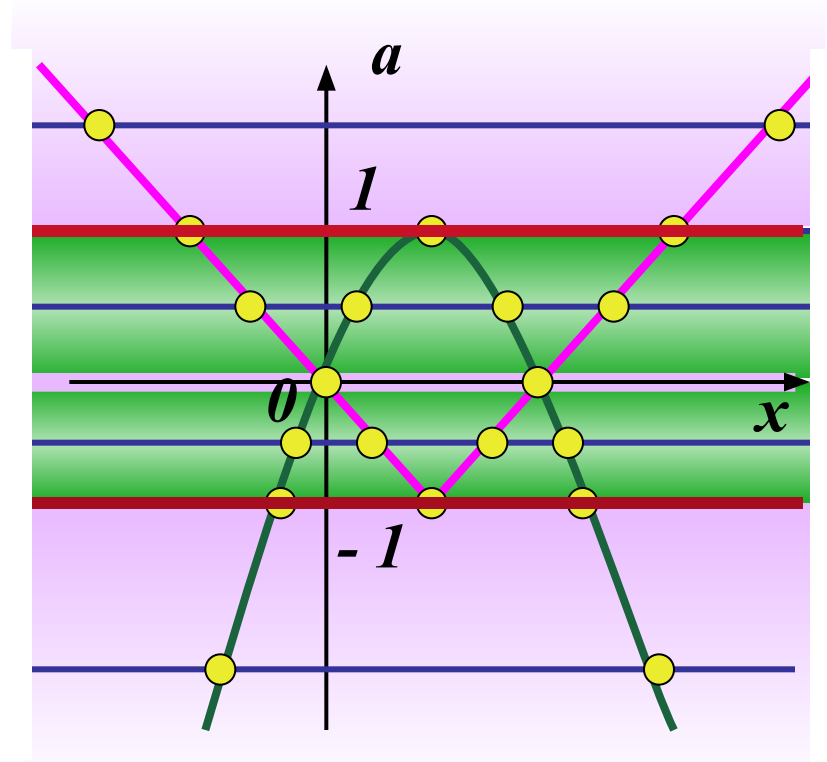
Найти количество корней уравнения в зависимости от параметра a

$$(a - 2x + x^2)(a + 1 - |x - 1|) = 0$$

Данное уравнение равносильно совокупности следующих двух уравнений:

$$\begin{cases} a = 2x - x^2 \\ a = |x - 1| - 1 \end{cases}$$

Количество решений данного уравнения - это число точек пересечения графика данного уравнения с горизонтальной прямой $a = a_0$. По рисунку «считываем» ответ



если $a < -1$, $a = 0$ и $a > 1$, то два корня

если $a = \pm 1$, то три корня

если $-1 < a < 0$ и $0 < a < 1$, то четыре корня

ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД ОБЛАСТЕЙ

(«переход» метода интервалов с прямой на плоскость)

Неравенства с
одной
переменной

Метод интервалов:

- 1. ОДЗ
- 2. Корни
- 3. Ось
- 4. Знаки на интервалах
- 5. Ответ.



Неравенства с
двумя
переменной

Метод областей:

- 1. ОДЗ
- 2. Граничные линии
- 3. Координатная плоскость
- 4. Знаки в областях
- 5. Ответ по рисунку.

На координатной плоскости
изобразите множество точек,
удовлетворяющих неравенству

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 - 1} \leq 0$$

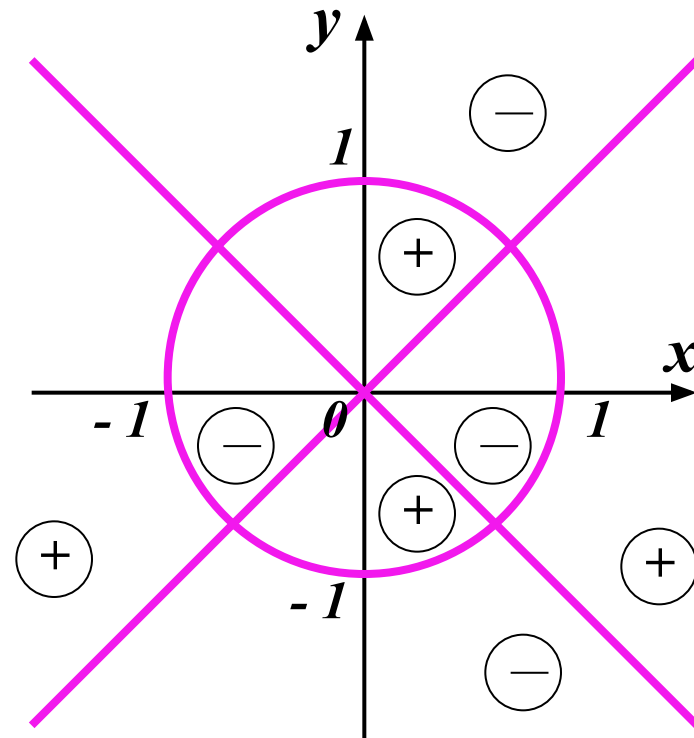
Найдем ОДЗ: $x^2 + y^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \neq 1$

Граничные
линии:

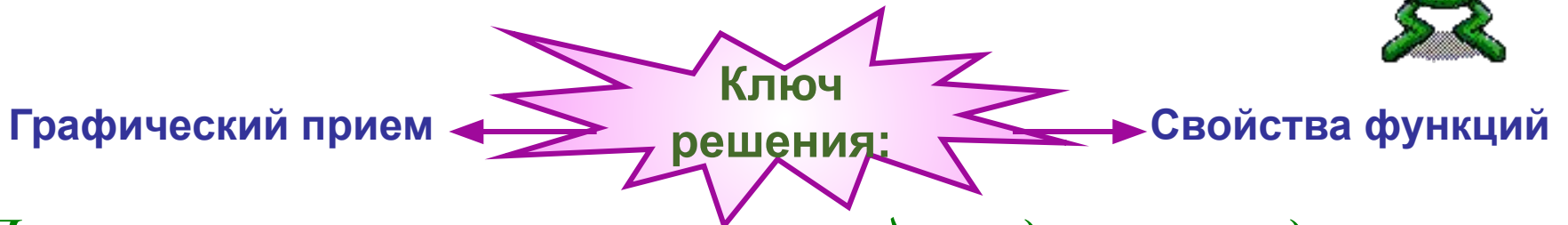
$$x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow |y| = |x| \text{ и } x^2 + y^2 = 1$$

Строим граничные
линии.

Они разбивают
плоскость на восемь
областей, определяя
знаки подстановкой в
отдельных точках,
получаем решение.



МЕТОД ОБЛАСТЕЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ



Параметр – «равноправная» переменная \Rightarrow отведем ему координатную ось т.е. задачу с параметром будем рассматривать как функцию $f(x; a) > 0$

Общие признаки задач подходящих под рассматриваемый метод

В задаче дан один параметр a и одна переменная x

Они образуют некоторые аналитические выражения $F(x;a), G(x;a)$

Графики уравнений $F(x;a)=0, G(x;a)=0$ строятся несложно

•1. Строим графический образ

•2. Пересекаем полученный график прямыми перпендикулярными параметрической оси

•3. «Считываем» нужную информацию

Схема

решения:

Найти все значения параметра p , при каждом из которых множество решений неравенства $(p - x^2)(p + x - 2) < 0$ не содержит решений неравенства $x^2 \leq 1$

Применим обобщенный метод областей.

Построим граничные линии

$$p = x^2 \text{ и } p = 2 - x$$

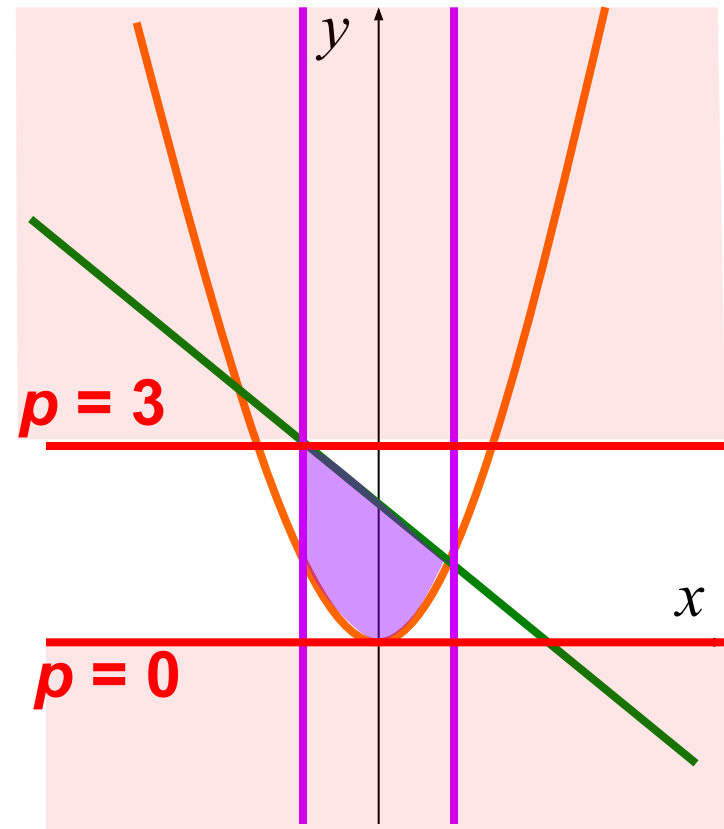
Определим знаки в полученных областях, и получим решение данного неравенства.

Осталось из полученного множества исключить решения неравенства $x^2 \leq 1$

По рисунку легко считываем ответ

$$p \leq 0, p \geq 3$$

Ответ: $p \leq 0, p \geq 3$



Сколько решений имеет система
в зависимости от параметра a ?

$$\begin{cases} |x|+|y|=a, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

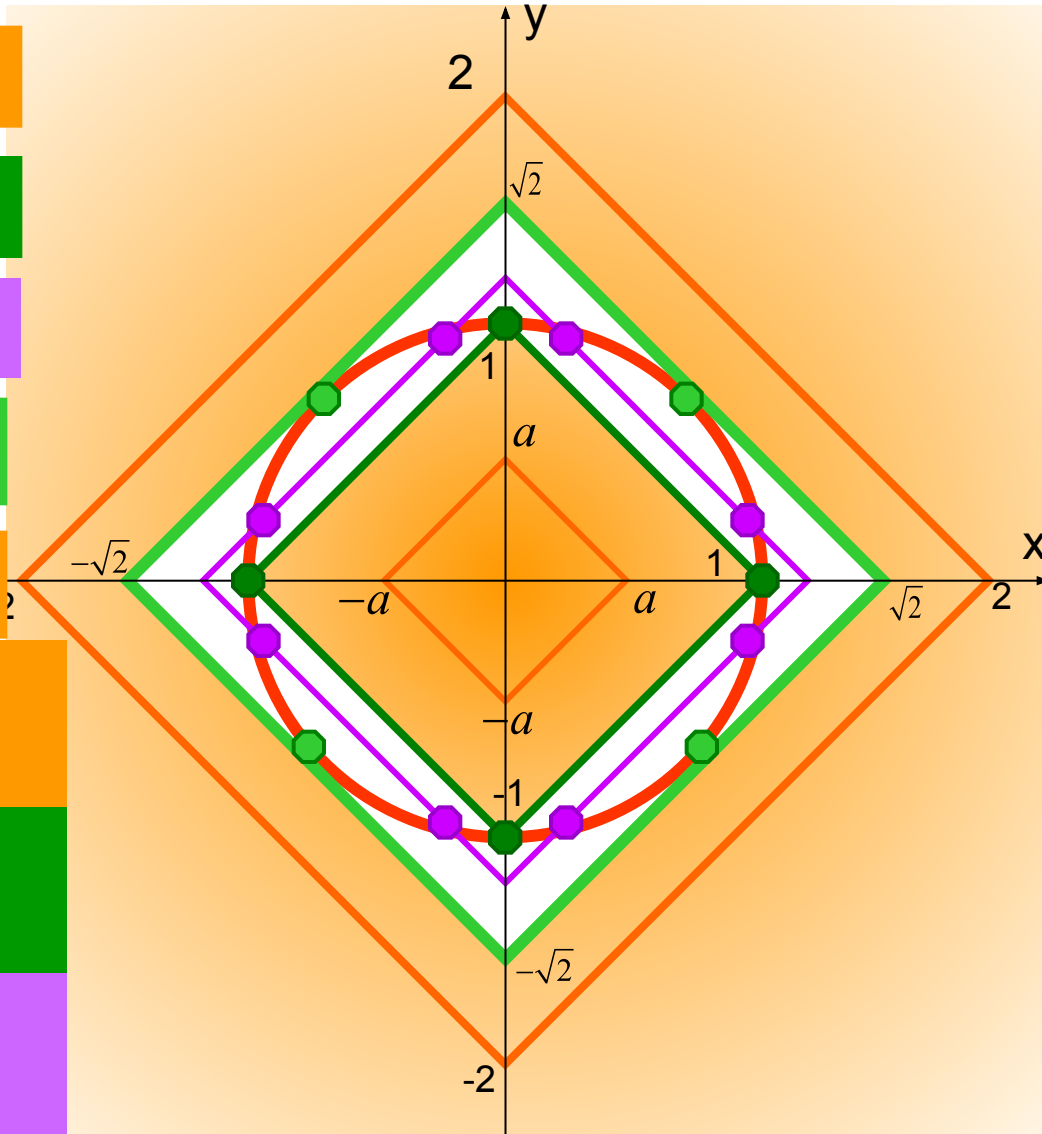
решений нет при $a < 1$

4 решения при $a = 1$

8 решений при $1 < a < \sqrt{2}$

4 решения при $a = \sqrt{2}$

решений нет при $a > \sqrt{2}$



Ответ: решений нет, если
 $a < 1$ или $a > 2\sqrt{2}$

4 решения, если

$a = 1$ или $a = 2\sqrt{2}$

8 решений, если
 $1 < a < \sqrt{2}$

При каких положительных значениях параметра a , система уравнений имеет ровно четыре решения?

$$\begin{cases} |4 - |x - 2|| - |y| = 0 \\ x^2 + y^2 = a^2 + 4(x - 1) \end{cases}$$

Запишем $|4 - |x - 2|| = |y|$

решений нет при $a < 2\sqrt{2}$

Построим графики обоих уравнений.

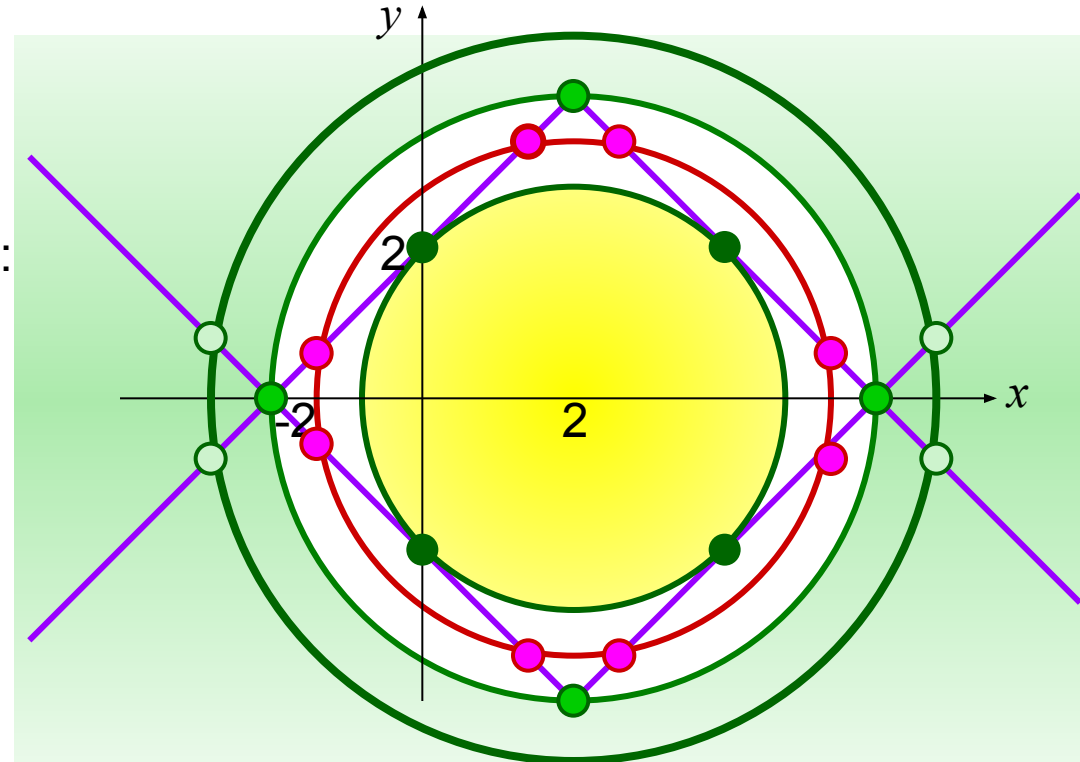
4 решения при $a = 2\sqrt{2}$

$y = |4 - |x - 2||$ и симметрично

8 решений при $2\sqrt{2} < a < 4$.

Второе уравнение задает семейство

4 решения при $a \geq 4$



Итак:

при $a < 2\sqrt{2}$ решений нет; при $a = 2\sqrt{2}$ и $a \geq 4$ система имеет 4 решения; система имеет 8 решений при $2\sqrt{2} < a < 4$.

Ответ: $a = 2\sqrt{2}$ и $a \geq 4$

Задачи, взятые из материалов ЕГЭ прошлых лет



При каких значениях параметра a сумма $\log_a(\cos^2 x + 1)$ и $\log_a(\cos^2 x + 5)$ равна 1 хотя бы при одном значении x ?

Решение. Рассмотрим сумму данных выражений

$$\log_a(\cos^2 x + 1) + \log_a(\cos^2 x + 5) = 1.$$

Пусть $t = \cos^2 x + 1$, $t \in [1; 2]$ тогда уравнение примет вид

$$\log_a t \cdot (t + 4) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 4t = a, (a > 0, a \neq 1).$$

Построим в прямоугольной системе координат график

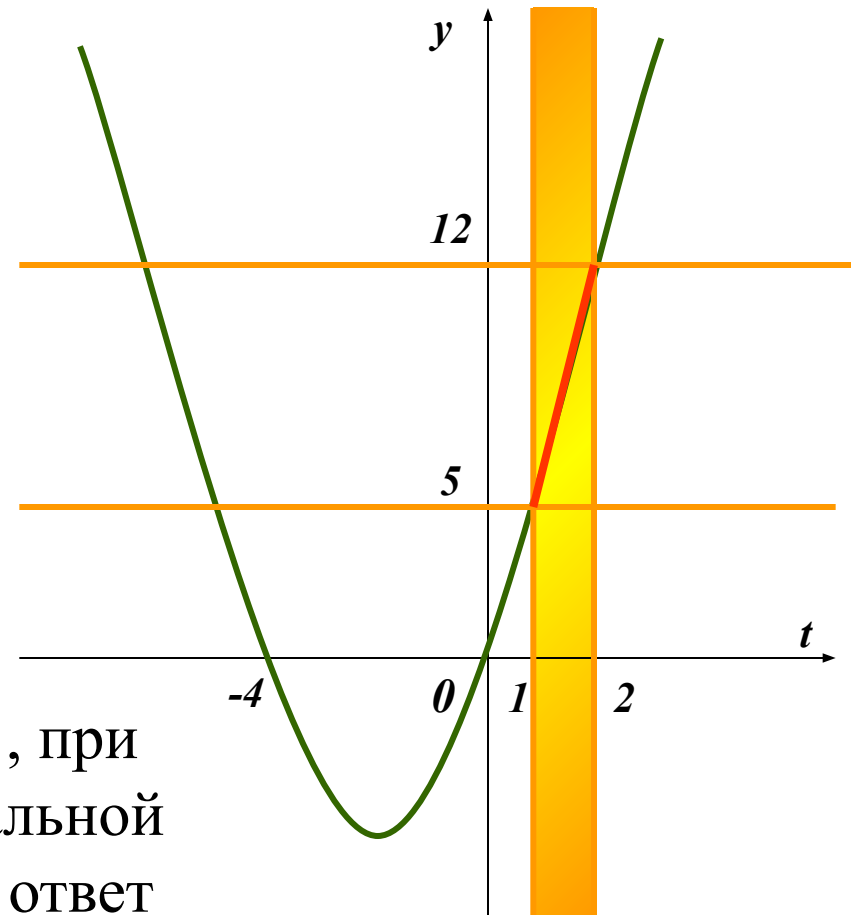
параболы $y(t) = t^2 + 4 \cdot t$,

и прямые $y = a$, учитывая

ОДЗ: $t \in [1; 2]$.

Сумма данного выражения равна 1, при пересечении параболы с горизонтальной прямой. По рисунку «считываем» ответ

Ответ: $a \in [5; 12]$



Найдите все значения параметра a , при которых количество корней уравнения $(5-a)x^3 - 4x^2 + x = 0$ равно количеству общих точек линий $x^2 + y^2 = a^2$ и $y = 5 - |x - 1|$

1 решение при $|a| = 2\sqrt{2}$

задает неподвижный

2 решения при $2\sqrt{2} < |a| < 3\sqrt{2}$

3 решения при $|a| = 3\sqrt{2}$

соединяет семейство

4 решения при $3\sqrt{2} < |a| < \sqrt{26}$

3 решения при $|a| = \sqrt{26}$

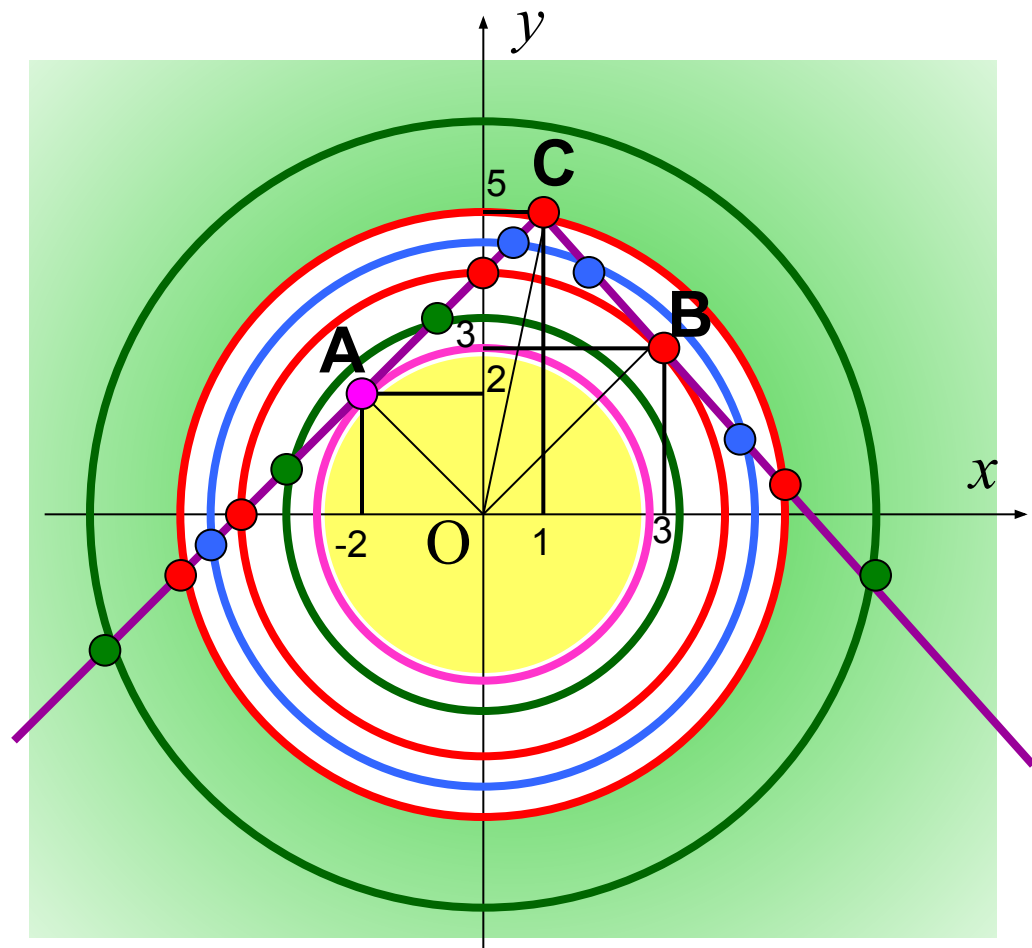
2 реш. при $a < -\sqrt{26}, a > \sqrt{26}$

Построим эскиз этих линий и определим из

рисунка количество их общих точек.

$a_1 = OA = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$
 $a_2 = OB = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$
 $a_3 = OC = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$

нет решение при $|a| < 2\sqrt{2}$



Запишем первое уравнение в виде $x \cdot ((5 - a)x^2 - 4x + 1) = 0$

Заметим, что $x = 0$ – корень не зависимо от параметра a .

Уравнение $(5 - a)x^2 - 4x + 1 = 0$ может иметь 0, 1 или 2 решения в зависимости от параметра a и дискриминанта $D = 4(a - 1)$

	<i>одно решение</i>	<i>Два решения</i>	<i>Три решения</i>
<i>первое уравнение</i>	$a < 1$	$a = 5; a = 1$	$a > 1$
<i>совокупность линий</i>	$a = 2\sqrt{2}$ $a = -2\sqrt{2}$	$-3\sqrt{2} < a < -2\sqrt{2},$ $2\sqrt{2} < a < 3\sqrt{2},$ $a < -\sqrt{26}, a > \sqrt{26}$	$a = -3\sqrt{2}, a = -\sqrt{26}$ $a = 3\sqrt{2},$ $a = \sqrt{26}$

Осталось заметить, что условие задачи выполняется только в трех точках при $a = -\sqrt{2}, a = 3\sqrt{2}, a = \sqrt{26}$

Ответ: $a = -\sqrt{2}, a = 3\sqrt{2}, a = \sqrt{26}$

Найти все положительные значения параметра a при

каждом из которых данная система имеет хотя бы одно решение.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6|x| - 6|y| + 17 \leq 0 \\ x^2 - a^2 = -y^2 \end{cases}$$

Решение.

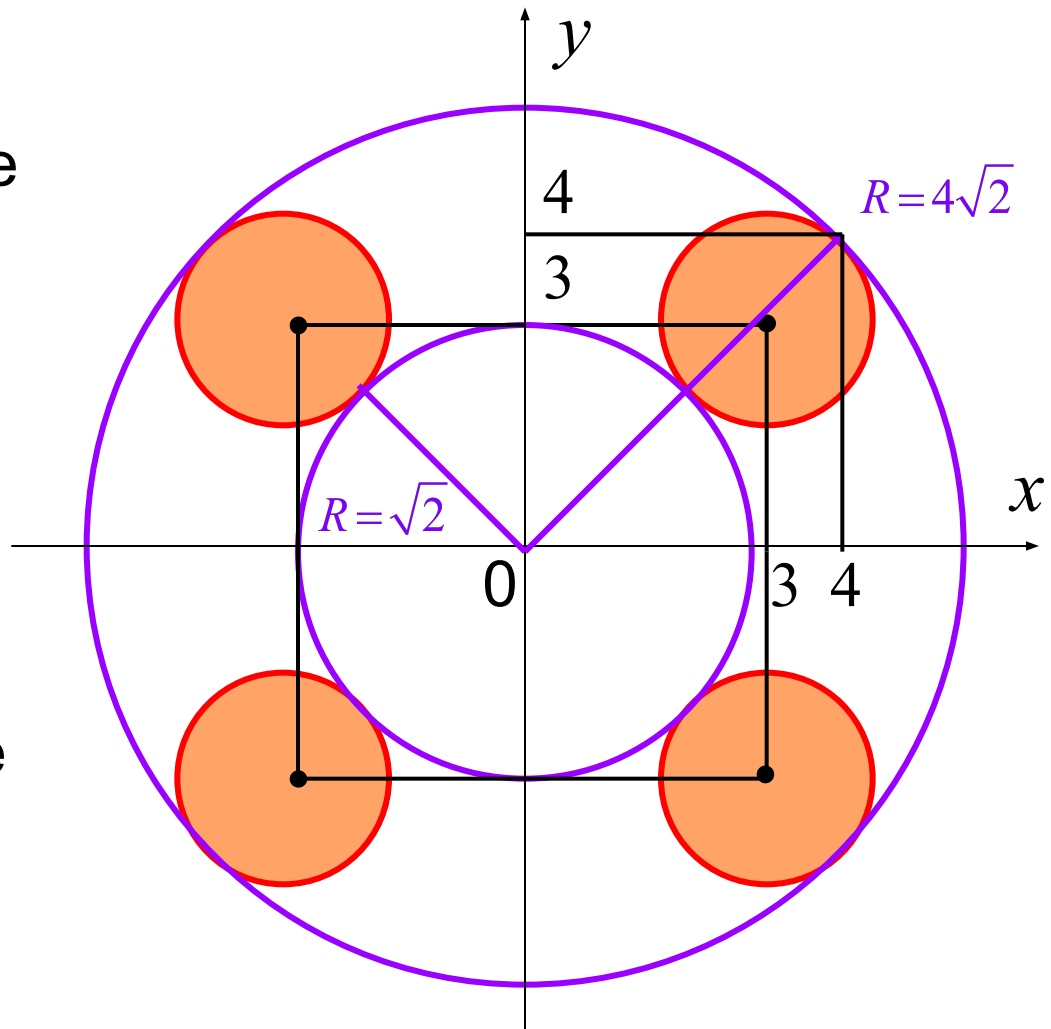
Запишем систему в виде

$$\begin{cases} (|x| - 3)^2 + (|y| - 3)^2 \leq 2 \\ x^2 + a^2 = -y^2 \end{cases}$$

Построим графический образ соответствий, входящих в систему.

Очевидно, что условие задачи выполняется при

Ответ: $\sqrt{2} \leq a \leq 4\sqrt{2}$



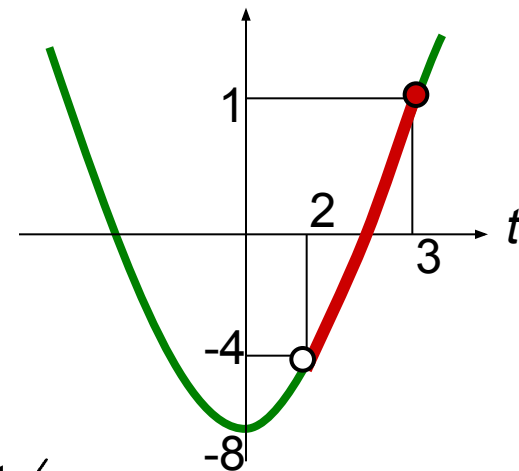
Найдите все значения параметра a , для которых при каждом x из промежутка $(4;8]$ значение выражения $\log_2^2 x - 8$ не равно значению выражения $(2a - 1)\log_2 x$

Решим задачу при условии равенства данных выражений.

Введем новую переменную $\log_2 x = t, t \in (2;3]$

тогда уравнение примет вид: $t^2 - 8 = (2a - 1)t$

График левой части – парабола $f(t)$,
график правой части – прямая $g(t)$.



$$f(2) \neq 2^2 - 8 = -4, \quad g(2) \neq (2a - 1) \cdot 2 = -4, \quad a \neq -\frac{1}{2}$$

$$f(3) = 3^2 - 8 = 1, \quad g(3) = (2a - 1) \cdot 3 = 1, \quad a = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow a \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{2}{3} \right]$$

Значит условие исходной задачи выполняется при

$$a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2} \right] \cup \left(\frac{2}{3}; \infty \right)$$

Литература



Анимация с сайта: <http://badbad-girl.narod.ru/zelenie.html>

Задачи для решения из книг:

1. Внеурочная работа по математике в контексте реализации инновационных технологий. Дидактические материалы для организации деятельности обучающихся: учеб. пособие/авт.-сост.: А. Т. Лялькина, Е.В. Чудаева и др. – Саранск, 2007
2. П.И. Горнштейн, В. Б. Полонский, М.С. Якир. Задачи с параметрами. – М.: Илекса, Харьков: Гимназия, 2003.
3. Черкасов О.Ю., Якушев А.Г. Математика: интенсивный курс подготовки к экзамену. – 6-е изд., - М.: Рольф, 2002.
4. Экзаменационные материалы для подготовки к единому государственному экзамену. Математика. ЕГЭ – 2007. Составитель: Клово А.Г. – 2006.