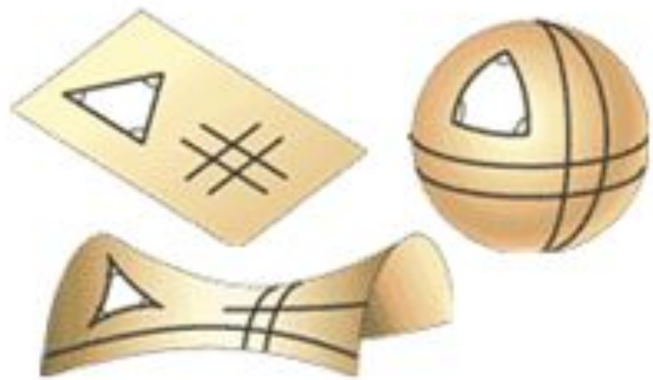
Реферат по геометрии
на тему: " Правильные многогранники"



Выполнила ученица

9 класса В

Султанова Оксана

Проверила Невзорова М.Е

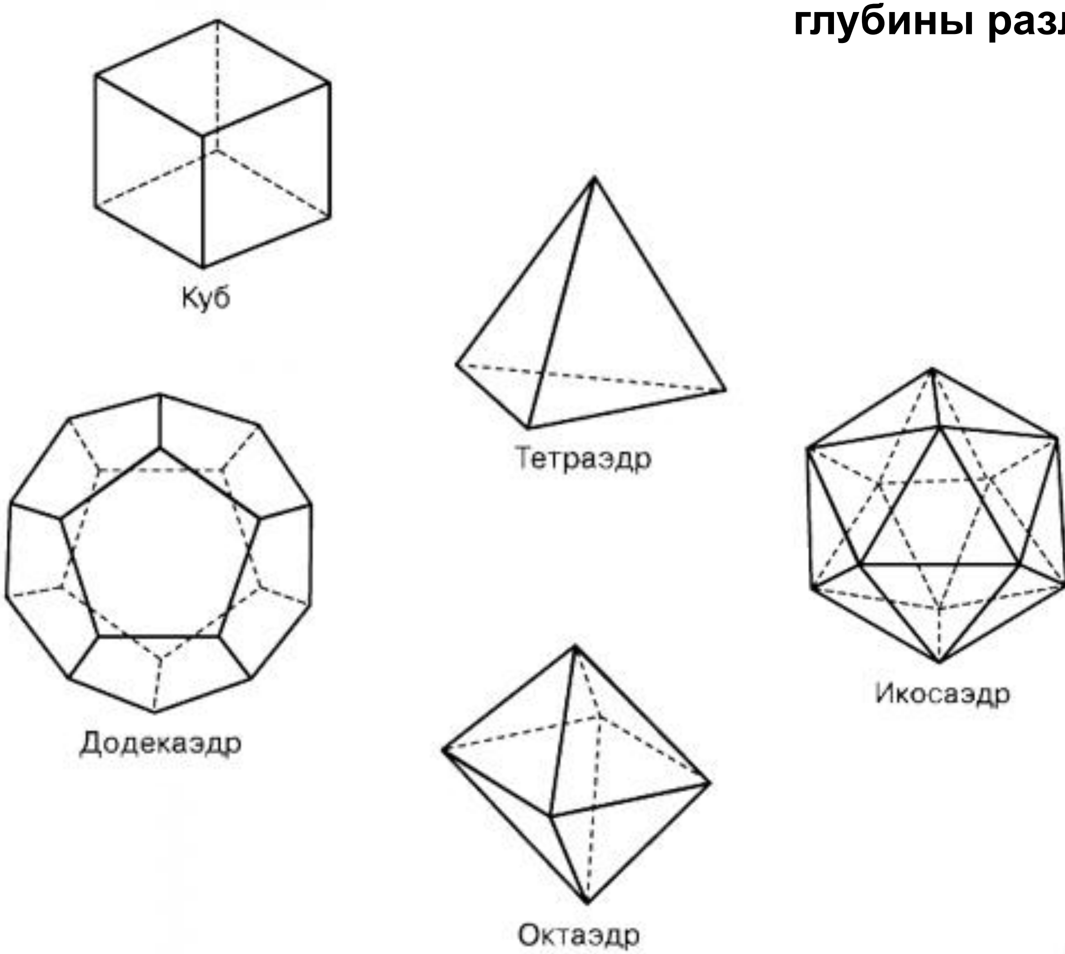
План

1. Правильные многоугольники
2. Из истории многоугольников
3. Эти удивительные многоугольники
4. Планета - многоугольник?
5. Заполненные пространства
6. Правильные многоугольники
7. Архимедовы тела
8. Призмы и антипризмы
9. 13 полуправильных многогранников
10. Псевдоромбокубооктаэдр
11. Другие виды многогранников - Равногранно-полуправильные многогранники
12. Другие виды многогранников – Изоэдры
13. Другие виды многогранников - Изогоны

Правильные многоугольники

Правильных многогранников вызывающе мало, но этот весьма скромный по численности отряд сумел пробраться в самые глубины различных наук.

Л. Кэролл



Из истории многоугольников

Каково же это вызывающе малое количество и почему их именно столько. А сколько? Оказывается, ровно пять - ни больше ни меньше. Подтвердить это можно с помощью развертки выпуклого многогранного угла. В самом деле, для того чтобы получить какой-нибудь правильный многогранник согласно его определению, в каждой вершине должно сходиться одинаковое количество граней, каждая из которых является правильным многоугольником. Сумма плоских углов многогранного угла должна быть меньше 360о, иначе никакой многогранной поверхности не получится. Перебирая возможные целые решения неравенств: 60к < 360, 90к < 360 и 108к < 360, можно доказать, что правильных многогранников ровно пять

Названия правильных многогранников пришли из Греции. В дословном переводе с греческого "тетраэдр", "октаэдр", "гексаэдр", "додекаэдр", "икосаэдр" означают: "четырехгранник", "восьмигранник", "шестигранник". "двенадцатигранник", "двадцатигранник". Этим красивым телам посвящена 13-я книга "Начал" Евклида. Их еще называют телами Платона, т.к. они занимали важное место в философской концепции Платона об устройстве мироздания. Четыре многогранника олицетворяли в ней четыре сущности или "стихии". Тетраэдр символизировал огонь, т.к. его вершина устремлена вверх; икосаэдр - воду, т.к. он самый "обтекаемый"; куб - землю, как самый "устойчивый"; октаэдр - воздух, как самый "воздушный". Пятый многогранник, додекаэдр, воплощал в себе "все сущее", символизировал все мироздание, считался главным.

Из истории многоугольников

Гармоничные отношения древние греки считали основой мироздания, поэтому четыре стихии у них были связаны такой пропорцией: **земля/вода=воздух/огонь**. Атомы "стихий" настраивались Платоном в совершенных консонансах, как четыре струны лиры

Первая система элементов, включавшая четыре элемента - землю, воду, воздух и огонь, - была канонизирована Аристотелем. Эти элементы оставались четырьмя краеугольными камнями мироздания в течение многих веков. Вполне возможно отождествить их с известными нам четырьмя состояниями вещества - твердым, жидким, газообразным и плазменным.

Важное место занимали правильные многогранники в системе гармоничного устройства мира И. Кеплера. Все та же вера в гармонию, красоту и математически закономерное устройство мироздания привела И. Кеплера к мысли о том, что поскольку существует пять правильных многогранников, то им соответствуют только шесть планет. По его мнению, сферы планет связаны между собой вписанными в них платоновыми телами. Поскольку для каждого правильного многогранника центры вписанной и описанной сфер совпадают, то вся модель будет иметь единый центр, в котором будет находиться Солнце.

Проделав огромную вычислительную работу, в 1596 г. И. Кеплер в книге "Тайна мироздания" опубликовал результаты своего открытия. В сферу орбиты Сатурна он вписывает куб, в куб - сферу Юпитера, в сферу Юпитера - тетраэдр, и так далее последовательно вписываются друг в друга сфера Марса - додекаэдр, сфера Земли - икосаэдр, сфера Венеры - октаэдр, сфера Меркурия. Тайна мироздания кажется открытой.

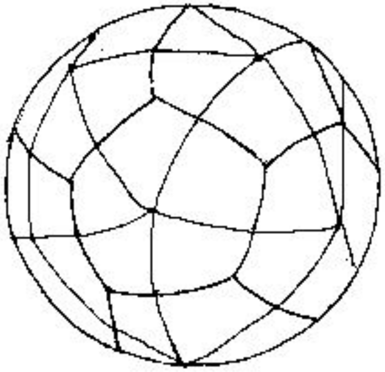
Эти удивительные многоугольники

Где еще можно увидеть эти удивительные тела? В книге немецкого биолога начала нашего века Э. Геккеля "Красота форм в природе" можно прочитать такие строки: "Природа вскармливает на своем лоне неисчерпаемое количество удивительных созданий, которые по красоте и разнообразию далеко превосходят все созданные искусством человека формы". Создания природы, приведенные в этой книге, красивы и симметричны. Это неотделимое свойство природной гармонии. Но здесь видны и одноклеточные организмы - феодарии, форма которых точно передает икосаэдр. Чем же вызвана такая природная геометризация? Может быть, тем, что из всех многогранников с таким же количеством граней именно икосаэдр имеет наибольший обьем и наименьшую площадь поверхности. Это геометрическое свойство помогает морскому микроорганизму преодолевать давление водной толщи.

Интересно и то, что именно икосаэдр оказался в центре внимания биологов в их спорах относительно формы вирусов. Вирус не может быть совершенно круглым, как считалось ранее. Чтобы установить его форму, брали различные многогранники, направляли на них свет под теми же углами, что и поток атомов на вирус. Оказалось, что только один многогранник дает точно такую же тень - икосаэдр. Его геометрические свойства, о которых говорилось выше, позволяют экономить генетическую информацию. Правильные многогранники - самые выгодные фигуры. И природа этим широко пользуется. Кристаллы некоторых веществ имеют форму правильных многогранников. Так, куб передает форму кристаллов поваренной соли NaCl, монокристалл алюминиево-калиевых квасцов (KAlSO4)2 12H2O имеет форму октаэдра, кристалл сернистого колчедана FeS имеет форму додекаэдра, сурьменистый сернокислый натрий - тетраэдра, бор - икосаэдра. Правильные многогранники определяют форму кристаллических решеток некоторых химических веществ.

Планета - многоугольник?

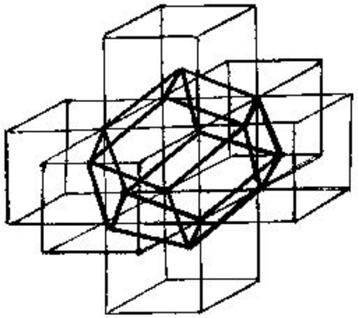
Идеи Пифагора, Платона, И. Кеплера о связи правильных многогранников с гармоничным устройством мира уже в наше время нашли свое продолжение в интересной научной гипотезе, авторами которой (в начале 80-х годов) явились московские инженеры В. Макаров и В. Морозов. Они считают, что ядро Земли имеет форму и свойства растущего кристалла, оказывающего воздействие на развитие всех природных процессов, идущих на планете. Лучи этого кристалла, а точнее, его силовое поле, обусловливают икосаэдро-додекаэдрическую структуру Земли, проявляющуюся в том, что в земной коре как бы проступают проекции вписанных в земной шар правильных многогранников: икосаэдра и додекаэдра. Их 62 вершины и середины ребер, называемых авторами узлами, обладают рядом специфических свойств, позволяющих объяснить некоторые непонятные явления.



Если нанести на глобус очаги наиболее крупных и примечательных культур и цивилизаций Древнего мира, можно заметить закономерность в их расположении относительно географических полюсов и экватора планеты. Многие залежи полезных ископаемых тянутся вдоль икосаэдрово-додекаэдровой сетки. Еще более удивительные вещи происходят в местах пересечения этих ребер: тут располагаются очаги древнейших культур и цивилизаций: Перу, Северная Монголия, Гаити, Обская культура и другие. В этих точках наблюдаются максимумы и минимумы атмосферного давления, гигантские завихрения Мирового океана, здесь шотландское озеро Лох-Несс, Бермудский треугольник. Дальнейшие исследования Земли, возможно, определят отношение к этой красивой научной гипотезе, в которой, как видно, правильные многогранники занимают важное место.

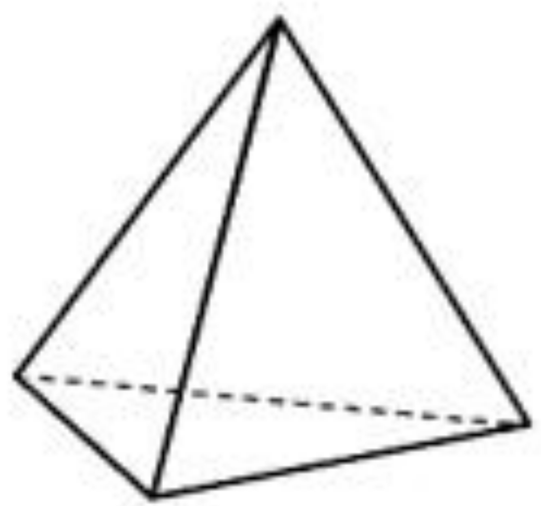
Заполненные пространства

И еще один вопрос возникает в связи с правильными многогранниками: можно ли ими заполнить пространство так, чтобы между ними не было просветов? Он возникает по аналогии с правильными многоугольниками, некоторыми из которых можно заполнить плоскость. Оказывается, заполнить пространство можно только с помощью одного правильного многогранника-куба. Пространство можно заполнить и ромбическими додекаэдрами.
Задача. С помощью семи кубов, образующих пространственный "крест", построить ромбододекаэдр и показать, что ими можно заполнить пространство.



Решение. Кубами можно заполнить пространство. Рассмотрим часть кубической решетки. Средний куб оставить нетронутым, а в каждом из "окаймляющих" кубов провести плоскости через все шесть пар противолежащих ребер. При этом "окаймляющие" кубы разобьются на шесть равных пирамид с квадратными основаниями и боковыми ребрами, равными половине диагонали куба. Пирамиды, примыкающие к нетронутому кубу, и образуют вместе с последним ромбический додекаэдр. Отсюда ясно, что ромбическими додекаэдрами можно заполнить все пространство. Как следствие получаем, что объем ромбического додекаэдра равен удвоенному объему куба, ребро которого совпадает с меньшей диагональю грани додекаэдра.
Решая последнюю задачу, мы пришли к ромбическим додекаэдрам. Интересно, что пчелиные ячейки, которые также заполняют пространство без просветов, также являются в идеале геометрическими фигурами. Верхняя часть пчелиной ячейки представляет собой часть ромбододекаэдра.

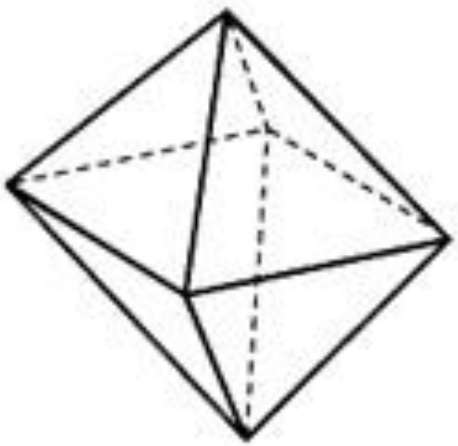
Тетраэд



Правильный тетраэдр составлен из четырех равносторонних треугольников. Каждая его вершина является вершиной 3-х треугольников. Следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине равна 180 градусов.

Октаэдр

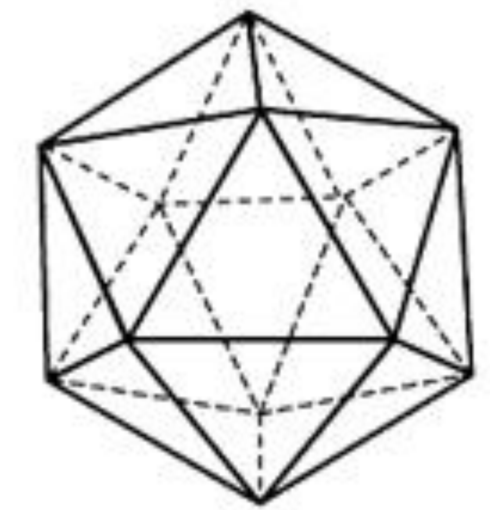
Правильный **октаэдр** составлен из 8-и равносторонних треугольников. Каждая вершина октаэдра является вершиной 4-х треугольников. Сумма плоских углов при каждой вершине равна 240 градусов.



Октаэдр

Икосаэдр

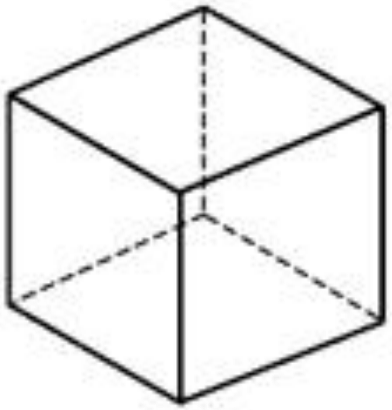
Правильный **икосаэдр** составлен из 20-и равносторонних треугольников. Каждая вершина икосаэдра является вершиной 5-и треугольников. Сумма плоских углов при каждой вершине равна 300 градусов.



Икосаэдр

Куб

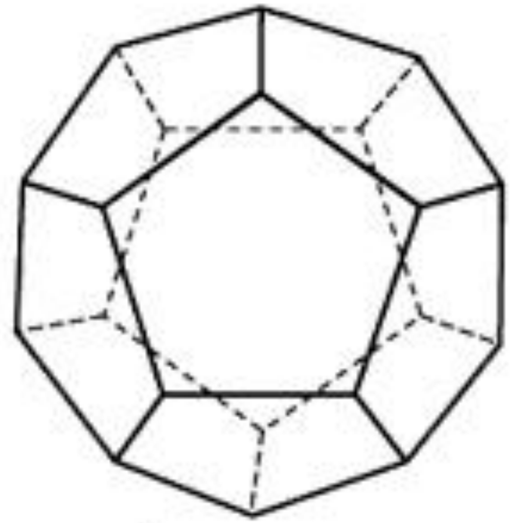
Куб составлен из 6-и квадратов. Каждая вершина октаэдра является вершиной 3-х квадратов. Сумма плоских углов при каждой вершине равна 270 градусов.



Куб

Додекаэдр

Правильный **додекаэдр** составлен из 12-и правильных 5-иугольников. Каждая вершина додекаэдра является вершиной 3-х правильных пятиугольников. Сумма плоских углов при каждой вершине равна 324 градусов.



Додекаэдр

Архимедовы тела

Многогранник называется равноугольно-полуправильным или архимедовым, если все его **многогранные углы** равны между собой (не обязательно правильные), а все его грани — **правильные многоугольники** (но не все равны между собой).

Эти многогранники были впервые рассмотрены Архимедом в 111 в. до н. э. в недошедшем до нас сочинении, его работа дошла до нас только через сочинения других авторов. Все эти многогранники были вновь открыты и описаны в эпоху Ренессанса. Известный немецкий астроном и математик Иоганн Кеплер (1571 — 1630) в книге «Гармония мира» в 1619 г. полностью восстановил потерянную информацию о них.

Призмы и антипризмы

Простейшим примером архимедова многогранника может служить архимедова призма, т. е. правильная n-угольная призма с квадратными боковыми гранями.

Другой пример - так называемая n-угольная **архимедова антипризма**. Она может быть получена, если одно из оснований правильной n-угольной призмы (n>4) повернуть вокруг оси призмы на угол - и затем соединить отрезками каждую вершину этого основания с ближайшими вершинами другого основания; при этом высота призмы должна быть подобрана так, чтобы эти отрезки оказались равными стороне основания (боковые грани антипризмы должны быть правильными треугольниками). Меняя n, мы получим две бесконечные серии архимедовых многогранников — призм и антипризм.

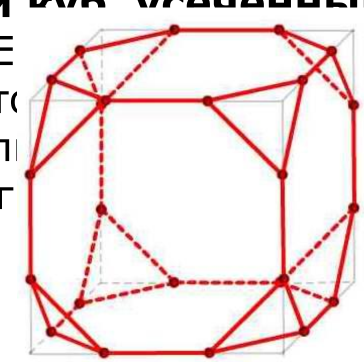
Будем относить к одному и тому же типу два полуправильных многогранника нулевого рода, если:

- при любом n у них одно и то же число n-угольных граней. (Одинаковое число треугольников, 4-хугольников и т. д.);
- при любом s у них одно и то же число s-гранных углов (одинаковое число 3-хгранных углов, одинаковое число 4-хгранных углов и т. п.).

У таких многогранников также совпадают характеристики Г (граней), В (вершин), Р (ребер). Как показал Иоганн Кеплер, существуют еще 13 различных типов простых архимедовых многогранников.

13 полуправильных многогранников

Несмотря на то, что названия многогранников не идеальны, в них есть определенная логика. Они были созданы на основе кеплеровской латинской терминологии.
Термин **"усеченный"** означает, что многогранник был получен в процессе отсечения от правильного многогранника правильных пирамид с вершинами, лежащими на ребрах и в вершине многогранника. Усечение добавляет новые грани для каждой существующей вершины и превращает существующие n-угольники в 2n-угольники (например, квадраты - в восьмиугольники).
Перечислим все многогранники, полученные усечением: усеченный тетраэдр**усеченный тетраэдр,** усеченный октаэдр**усеченный тетраэдр, усеченный октаэдр,** усеченный куб**усеченный тетраэдр, усеченный октаэдр, усеченный куб,** усеченный икосаэдр**усеченный тетраэдр, усеченный октаэдр, усеченный куб, усеченный икосаэдр,** усеченный додекаэдр**.** Е
отсечь углы на такую глубину, кот
все грани в правильные многоугол
получится полуправильный многог



13 полуправильных многогранников

Термин **"курносый"** означает, что каждую грань многогранника окружили треугольниками или, что каждое ребро заменили парой треугольников, а в каждой вершине добавили еще один многоугольник. Примером может служить **курносый куб.** Он может быть получен из куба, как видно, четырехугольные грани повернуты, а вместо вершин вставлены треугольники. Если получать курносый куб из октаэдра, то вместо вершин будут вставлены четырехугольники. Получить одну и ту же фигуру из разных многогранников можно за счет свойства двойственности (вершины одного многогранника являются центрами граней другого). Благодаря свойству двойственности существует еще два полуправильных многогранника: **кубооктаэдр** **кубооктаэдр и** **икосододекаэдр**. Каждый из этих многогранников имеет нечто общее с каждым из пары двойственных правильных многогранников. Их получают также как и усеченные архимедовы тела отсечением пирамид, но количество сторон в каждой грани при этом остается прежним. Например, кубооктаэдр можно получить и из куба, и из октаэдра, если соединить середины ребер.

13 полуправильных многогранников

У кубооктаэдра 6 квадратных граней, остальные 8 граней — правильные треугольники. В каждую вершину сходятся два квадрата и два треугольника. Форму кубооктаэдра имеет кристалл аргентита (Ag_2S).
Труднее получить оставшиеся четыре Архимедовых тела: ромбокубооктаэдр**ромбокубооктаэдр,** ромбоикосододекаэдр**ромбокубооктаэдр, ромбоикосододекаэдр,** ромбоусеченный куб**,** Эти многогранники можно вписать в платоновы тела, являющиеся их прообразами, но получить их простым усечением нельзя.
Установлено, что архимедов многогранник может иметь грани, не более чем трех различных наименований. Самое большое число граней у архимедова многогранника, отличного от призмы и антипризмы, равно 92: у него 80 треугольных и 12 пятиугольных граней.

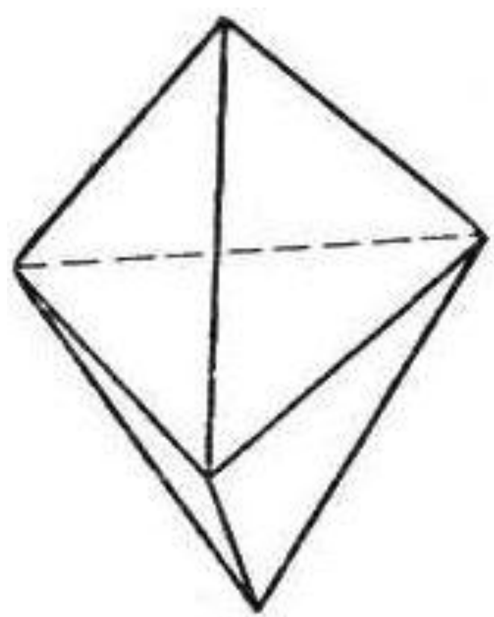
Псевдоромбокубооктаэдр

Существует и еще один многогранник - четырнадцатый - который некоторые ученые причисляют к полуправильным, а некоторые - нет. Он называется псевдоромбокубооктаэдр. Спорный вопрос заключается в том, что в нем нарушена симметрия, поэтому он не соответствует некоторым определениям полуправильных многогранников. Именно этот многогранник изображен на рисунке выше справа.

Другие виды многогранников

Равногранно-полуправильные многогранники

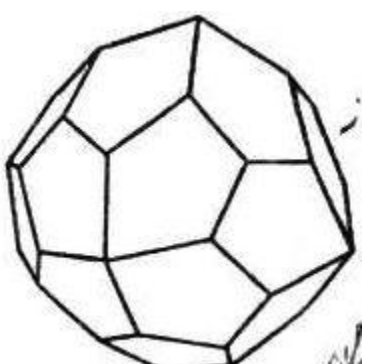
Чтобы получить простейший пример многогранника, сложим основаниями две равные правильные пирамиды. Возможно, очевидно, так подобрать высоты этих пирамид, чтобы четырехгранные углы при вершинах общих оснований были правильными (т. е. чтобы все двугранные углы такого четырехгранного угла были равны между собой).
Здесь изображен равногранно-полуправильный многогранник, который называется ромбическим двенадцатигранником или ромбододекаэдром. Он составлен из 12 равных ромбов, образующих 14 правильных многогранных углов — 6 четырехгранных и 8 трехгранных.

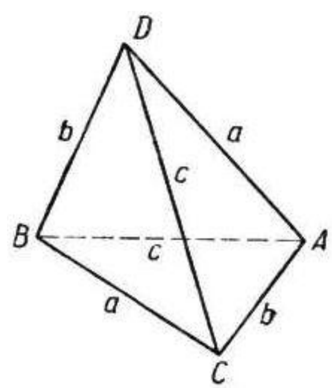


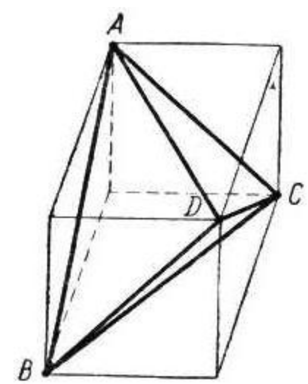
Другие виды многогранников

Изоэдры (равногранные многогранники)

В кристаллографии приходится встречаться с классом многогранников, более широким, чем равногранно- полуправильные, это класс равногранных многогранников, или изоэдров.
Форму изоэдра имеет, например, кристалл куприта (Cu20); это выпуклый многогранник, ограниченный 24 равными неправильными пятиугольниками.
Простейшим примером изоэдра, не являющегося правильным или полуправильным многогранником, может служить неправильный равногранный тетраэдр, т. е. неправильный тетраэдр, у которого равны между собой противоположные ребра: AB = CD=c, BC=AD=a, CA=BD=b, причем отрезки a, b, c не все равны между собой. Для получения такого многогранника достаточно в произвольном прямоугольном параллелепипеде, отличном от куба, выбрать произвольную вершину D и в трех гранях, примыкающих к этой вершине, провести диагонали DA, DB, DC. Четыре точки A, B. C, D и будут вершинами равногранного тетраэдра.







Другие виды многогранников

Изогоны (равноугольные многогранники)

Обобщением понятия архимедова многогранника является понятие равноугольного многогранника, или изогона (у него все многогранные углы равны, а грани могут быть произвольными). Простой пример изогона мы получим, если у всех вершин правильного октаэдра с ребром а отсечь от этого октаэдра правильную четырехугольную пирамиду с ребром, меньшим чем — а. Такую форму имеет, в частности, кристалл флюорита CaF2. Тетраэдр, рассмотренный выше, является изоэдром и одновременно изогоном.