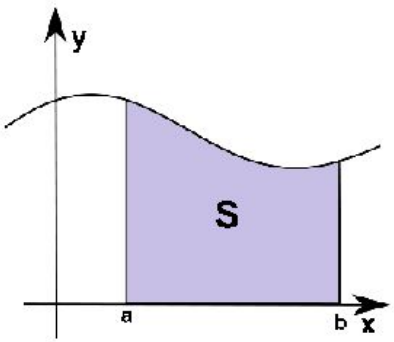
Определенный интеграл
и
его свойства

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Если F(x) + C -первообразная функция для f(x), то приращение F(b) -F(a) первообразных функций при изменении аргумента x от x = a до x=b *называется определенным интегралом*



$$\int_a^b f(x)dx$$

, где a и b *<u>пределы интегрирования</u>*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ:

Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная графиком непрерывной и неотрицательной функции f(x), $x \in [a; b]$, прямыми x= a, x=b и отрезком оси Ox.

СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. *При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак:*

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

2. *Для любого значения* a *справедливо равенство:*

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

3. Для любых значений a,b и c верно равенство:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

4. Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов слагаемых

$$\int_a^b \big(\varphi(x) + \psi(x)\big)\,dx = \int_a^b \varphi(x)dx + \int_a^b \psi(x)$$

5. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int_a^b k\varphi(x)\,dx = k\int_a^b \varphi(x)dx$$

ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_b^a = F(b) - F(a)$$

где F - одна из первообразных функции f.

ПРИМЕРЫ:

1. $\int_3^5 \mathrm{dz} =$

2. $\int_0^2 3x^2 dx =$

3. $\int_{-1}^4 (2x+1)\, dx =$

4. $\int_0^{\pi/4} cosx\, dx =$

ОТВЕТЫ:

1. $z\Big|_{3}^{5} 5 - 3 = 2$

2. $3\frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{2} = 2^3 - 0^3 = 8$

3. $\int_{-1}^{4} 2x dx + \int_{-1}^{4} dx = (x^2 + x)\Big|_{-1}^{4} =$

$(4^2 + 4\quad) - ((-1)^2 - 1) = 20 - 0 = 20$

4. $\sin x\Big|_{0}^{\pi/4} = \sin\frac{\pi}{4} - \sin 0 = \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ПРИМЕРЫ:

5. $\int_1^2 (5x^4 + 2x - 8)dx =$

6. $\int_0^1 \sqrt[3]{x}dx =$

7. $\int_0^1 e^{2x}dx =$

8. $\int_0^1 \frac{du}{u+1} =$

ОТВЕТЫ:

5. $5\int_1^2 x^4 dx + 2\int_1^2 x dx - 8\int_1^2 dx = \left(\frac{5x^5}{5} + \frac{2x^2}{2} - 8x\right)\Big|_1^2 = 26$

6. $\int_0^1 x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4}\Big|_0^1 = \frac{3}{4}\left(1^{\frac{4}{3}} - 0\right) = \frac{3}{4}$

7. $\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$

8. $\int_0^1 \frac{d(u+1)}{u+1} = \ln(u+1)\Big|_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$

ПРИМЕРЫ:

9. $\int_0^{\pi/2} cosx\, dx =$

10. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{sin^2 x} =$

11. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$

12. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} =$

ПРОВЕРЬ ОТВЕТЫ:

9. 1

10. $-\frac{3-\sqrt{3}}{3}$

11. $\frac{\pi}{6}$

12. $\frac{\pi}{3}$