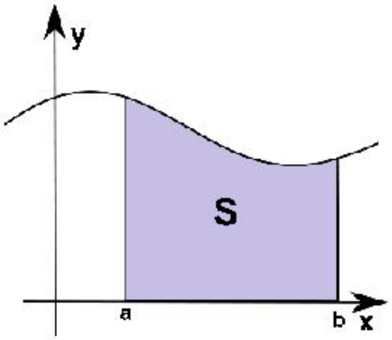
Определенный интеграл
и
его свойства

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Если $F(x) + C$ -первообразная функция для $f(x)$, то приращение $F(b) - F(a)$ первообразных функций при изменении аргумента x от $x = a$ до $x=b$ *называется определенным интегралом*



$$\int_a^b f(x)dx$$

, где a и b *<u>пределы интегрирования</u>*

ОПРЕДЕЛЕН ИЕ:

Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная

графиком непрерывной и неотрицательной функции f(x),

x ϵ [a; b] , прямыми x= a, x=b и отрезком оси Ox.

СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. *При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак:*

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

2. *Для любого значения a справедливо равенство:*

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

3. Для любых значений a, b и c верно равенство:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

4. Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов слагаемых

$$\int_a^b \big(\varphi(x) + \psi(x)\big)\,dx = \int_a^b \varphi(x)dx + \int_a^b \psi(x)$$

5. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int_a^b k\varphi(x)\,dx = k\int_a^b \varphi(x)dx$$

ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_{b}^{a} = F(b) - F(a)$$

где F - одна из первообразных функции f.

ПРИМЕР
Ы:

1. $\int_3^5 \mathrm{dz} =$

2. $\int_0^2 3x^2 dx =$

3. $\int_{-1}^4 (2x+1)\,dx =$

4. $\int_0^{\pi/4} cosx\,dx =$

ОТВЕТЫ:

1. $z\Big|_3^5\ 5-3=2$

2. $3\dfrac{x^3}{3}\Big|_0^2 = 2^3 - 0^3 = 8$

3. $\int_{-1}^{4} 2x\,dx + \int_{-1}^{4} dx = (x^2+x)\Big|_{-1}^{4} =$
$(4^2+4\quad) - ((-1)^2 - 1) = 20 - 0 = 20$

4. $\sin x\Big|_0^{\pi/4} = \sin\dfrac{\pi}{4} - \sin 0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

ПРИМЕР
Ы:

5. $\int_1^2 (5x^4 + 2x - 8)dx =$

6. $\int_0^1 \sqrt[3]{x}dx =$

7. $\int_0^1 e^{2x}dx =$

8. $\int_0^1 \frac{du}{u+1} =$

ОТВЕТЫ:

5. $5\int_1^2 x^4 dx + 2\int_1^2 x dx - 8\int_1^2 dx = \left(\frac{5x^5}{5} + \frac{2x^2}{2} - 8x\right)\Big|_1^2 = 26$

6. $\int_0^1 x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4}\Big|_0^1 = \frac{3}{4}\left(1^{\frac{4}{3}} - 0\right) = \frac{3}{4}$

7. $\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$

8. $\int_0^1 \frac{d(u+1)}{u+1} = \ln(u+1)\Big|_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$

ПРИМЕРЫ:

$$9.\ \int_0^{\pi/2} \cos x\, dx =$$

$$10.\ \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^2 x} =$$

$$11.\ \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$12.\ \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} =$$

ПРОВЕРЬ ОТВЕТЫ:

9. 1

10. $-\frac{3-\sqrt{3}}{3}$

11. $\frac{\pi}{6}$

12. $\frac{\pi}{3}$