Планиметрия. Повторение.

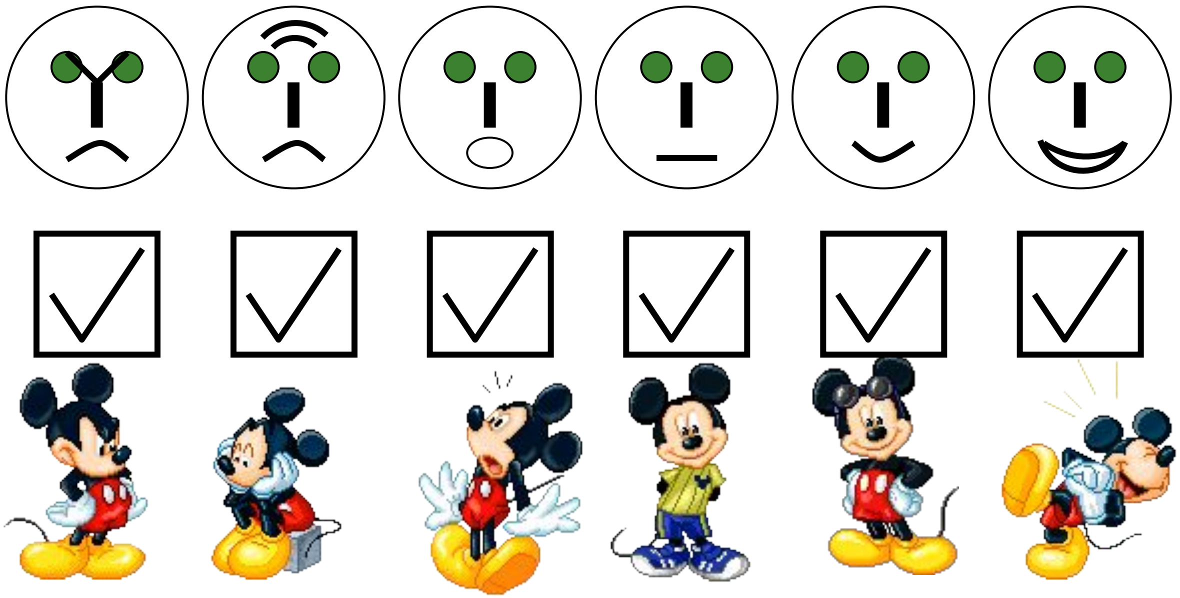
Часть 1

Треугольник

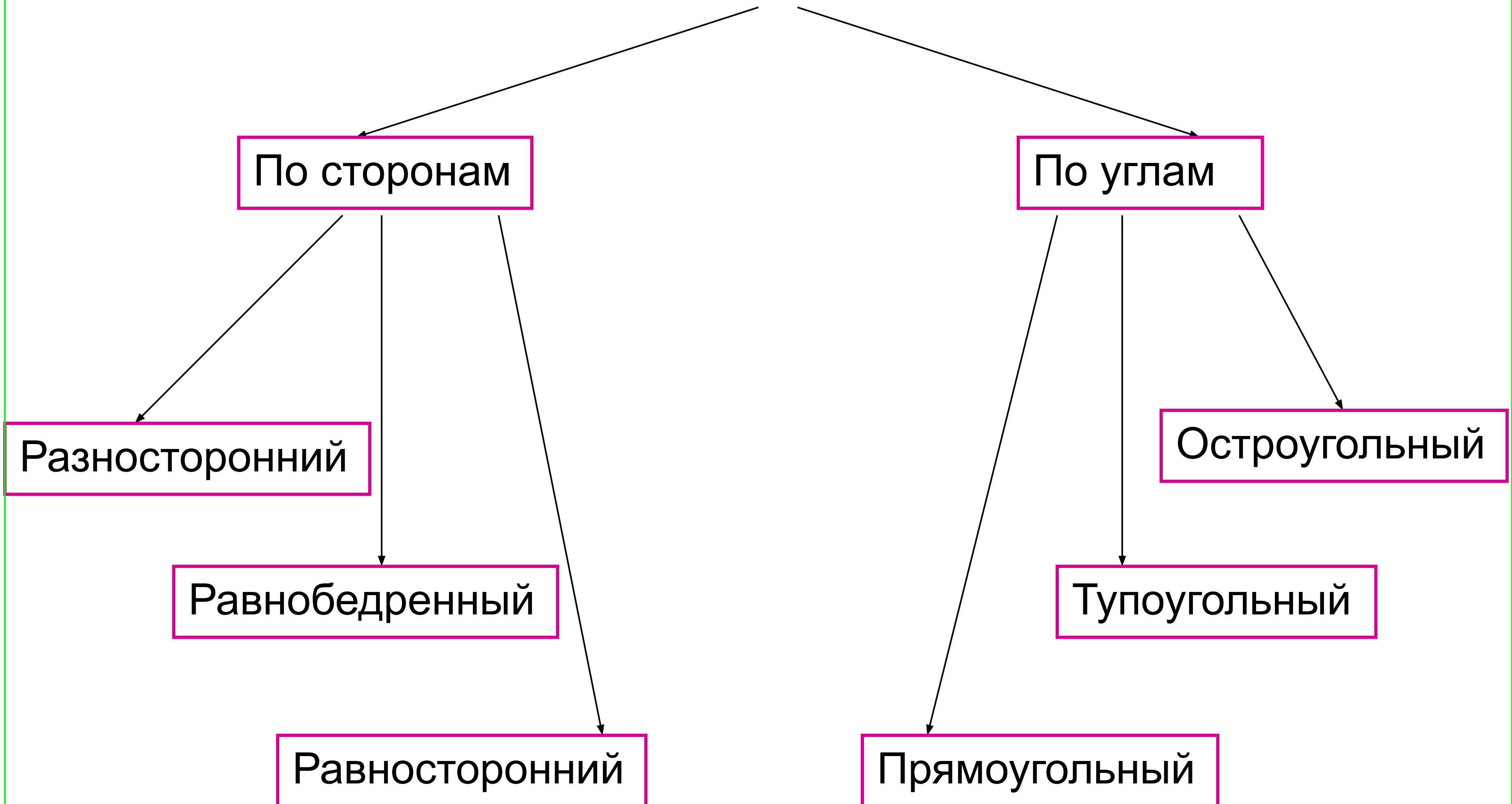
Часто знает и дошкольник,
Что такое треугольник,
А уж вам-то, как не знать…
Но совсем другое дело –
Очень быстро и умело
Треугольники считать!

Психологическая разминка

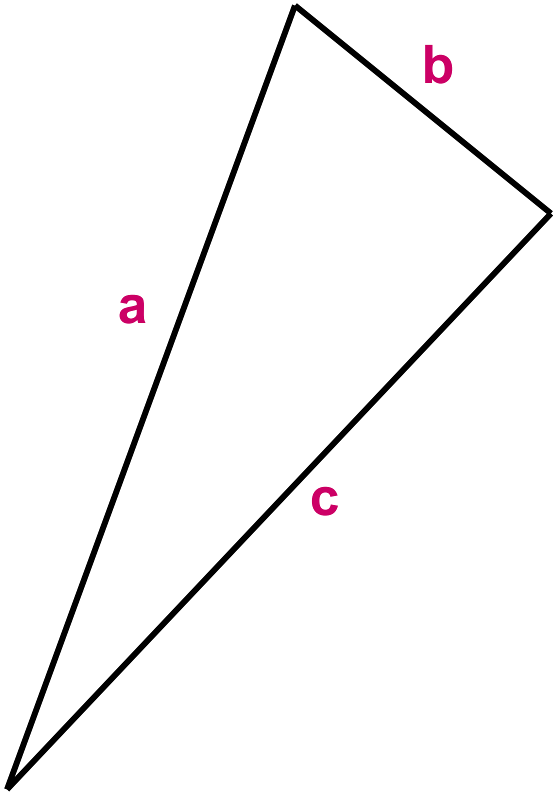
Определите своё эмоциональное состояние в начале урока. Поставьте галочку в клетку, соответствующую настроению



ТРЕУГОЛЬНИК

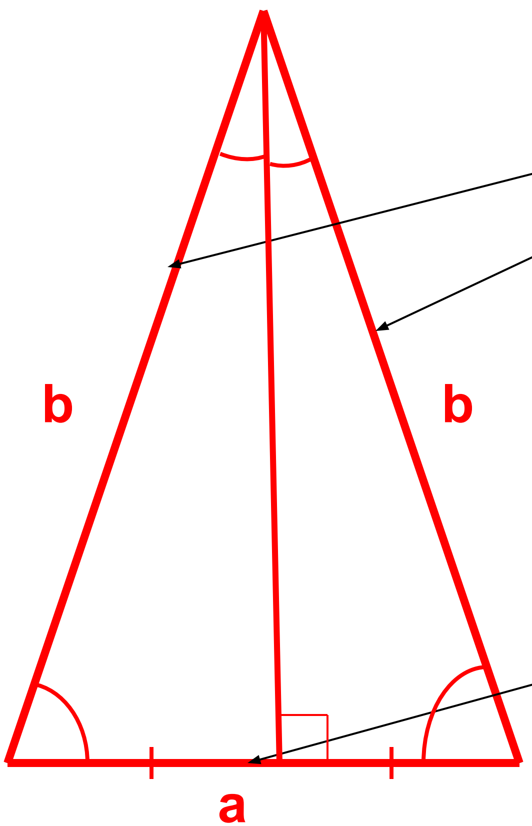


Разносторонний треугольник



Длины всех сторон разные

Равнобедренный треугольник



СВОЙСТВА:

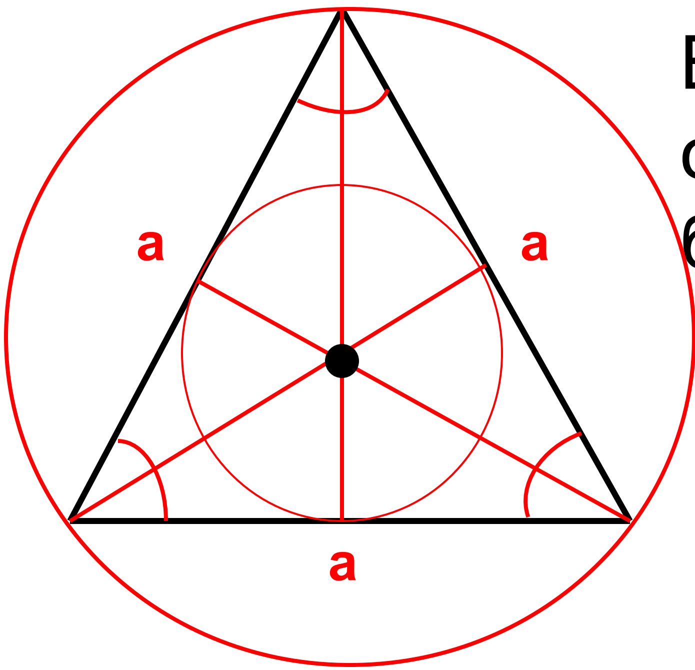
Боковые стороны

1. Углы при основании равны

2. Высота, проведенная к основанию, является и медианой и биссектрисой.

Основание

Равносторонний треугольник



СВОЙСТВА:

Все высоты являются одновременно медианами и биссектрисами

Все углы равны по 60°

Точка их пересечения является центром вписанной и описанной окружностей

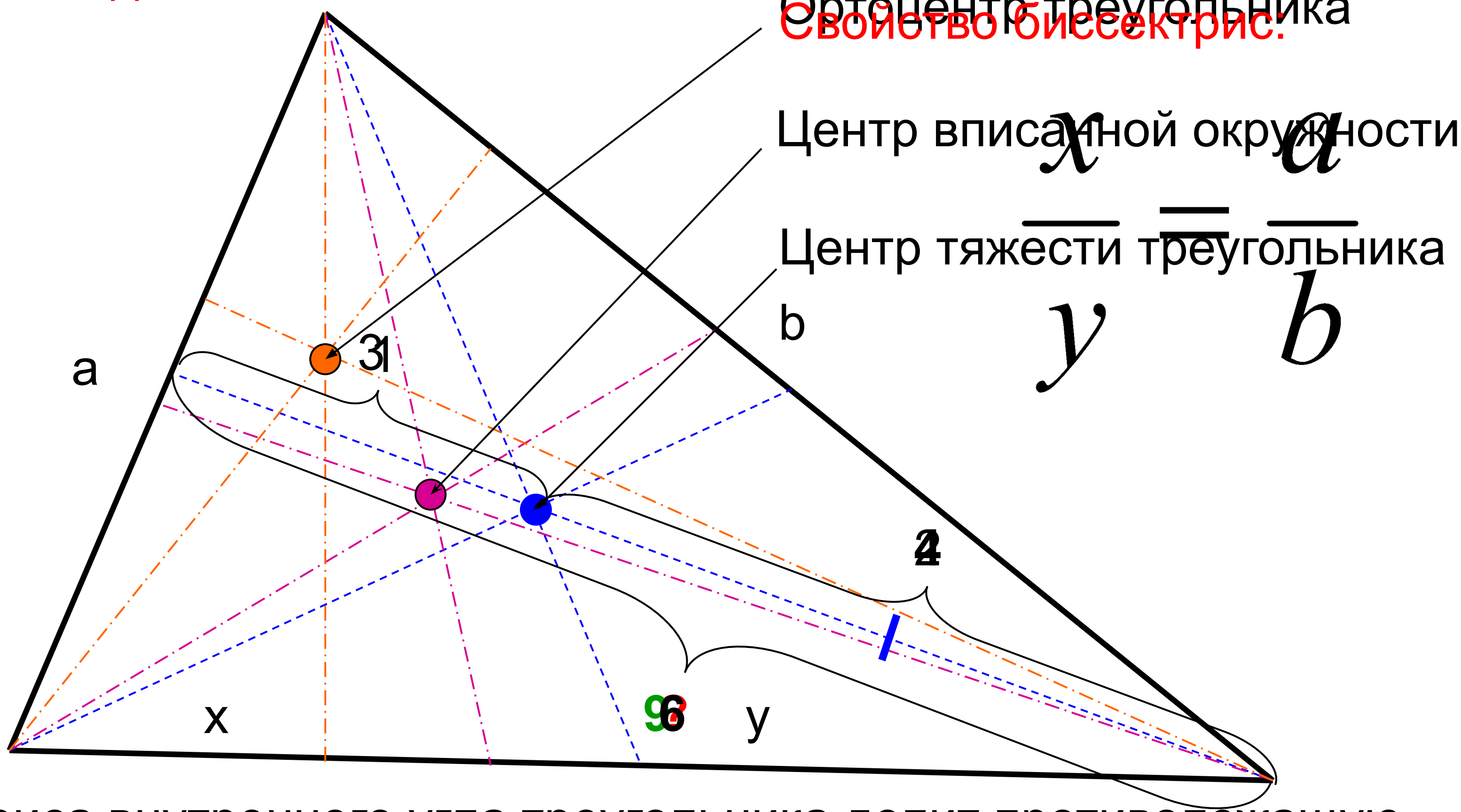
Классификация по углам:

- остроугольный треугольник, в котором все углы острые;
- тупоугольный треугольник, в котором один из углов тупой;
- прямоугольный треугольник, в котором один из углов прямой;
- косоугольный треугольник, который не содержит ни одного прямого угла.

Свойства медиан, биссектрис, высот

Свойства медиан:

Свойство биссектрис:

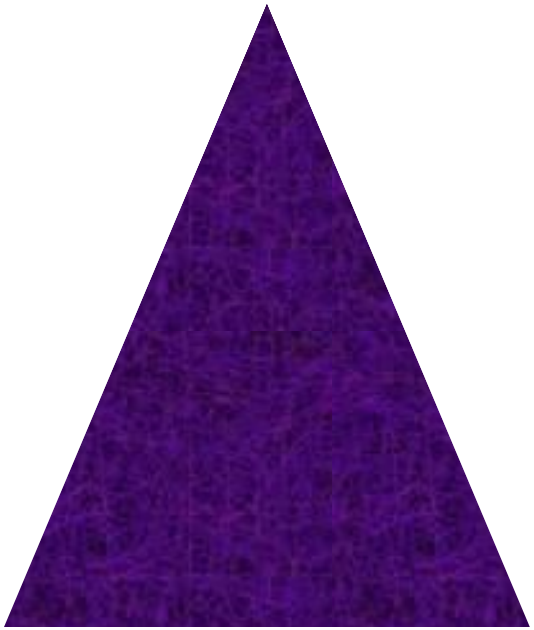


$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$

Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилегающим сторонам:

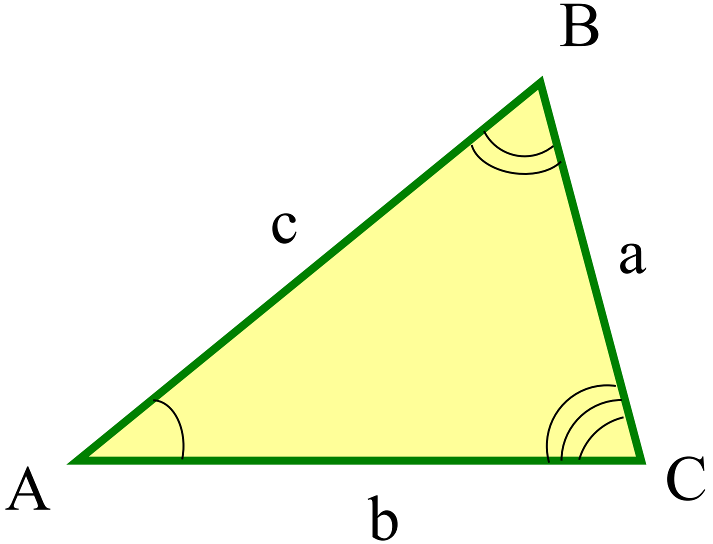
«Решение треугольников»

- Что это значит?



Определение

Решением треугольника называется нахождение всех его шести элементов (то есть трёх сторон и трёх углов) по каким-нибудь трём данным элементам.



Три типа задач на решение треугольника

- Решение треугольника по двум сторонам и углу между ними;
- Решение треугольника по стороне и прилежащим к ней углам;
- Решение треугольника по трем сторонам.

Для этого вспомним

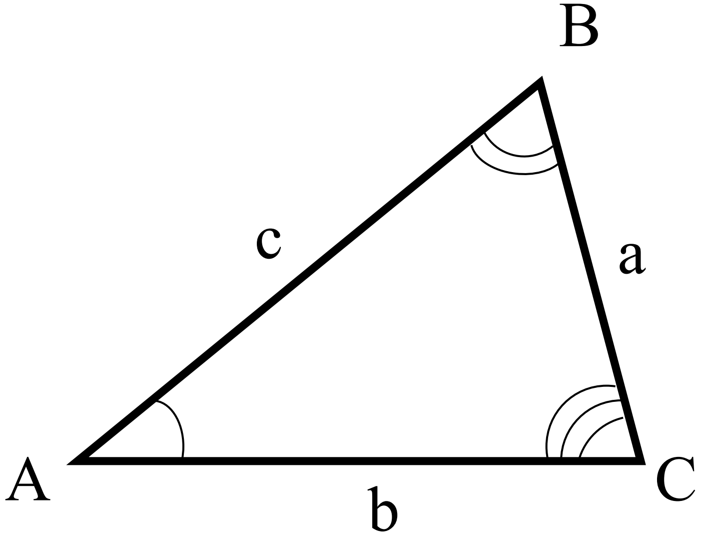
Решение данных задач основано на использовании теорем синуса и косинуса, теоремы о сумме углов треугольника и следствии из теоремы синусов.

Причем, при вычислении углов треугольника предпочтительнее использовать теорему косинусов, а не теорему синусов.

1. Сумма углов треугольника.
2. Соотношения между сторонами и углами в треугольнике.
3. Теорема косинусов.
4. Теорема синусов.

Договоримся

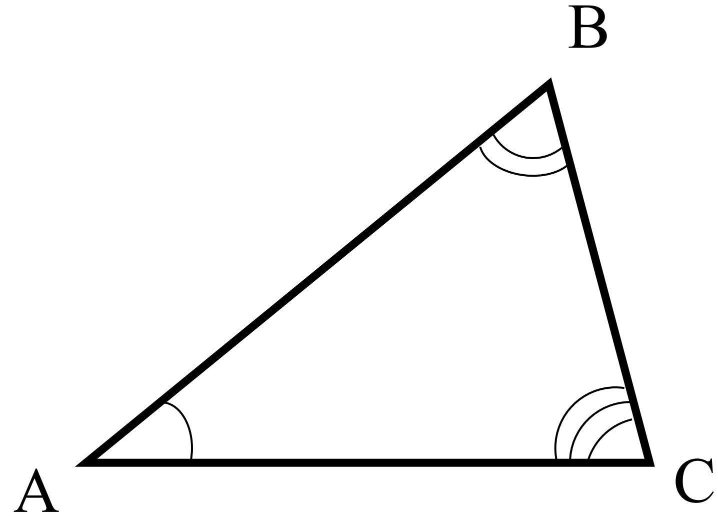
При решении треугольников будем пользоваться следующими обозначениями для сторон треугольника *ABC*:
AB = c, BC = a, CA = b.



Сумма углов треугольника

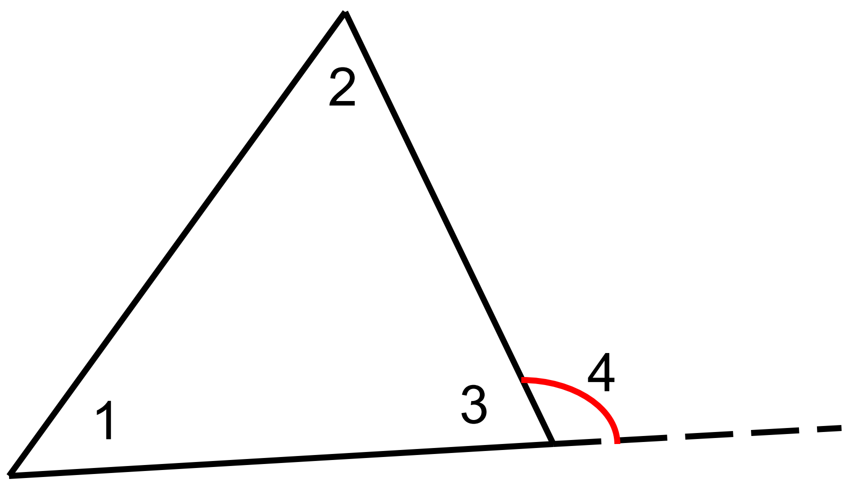
Сумма углов треугольника равна 180º

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$



Внешний угол треугольника

Внешним углом треугольника называется угол, смежный с каким-нибудь углом этого треугольника.



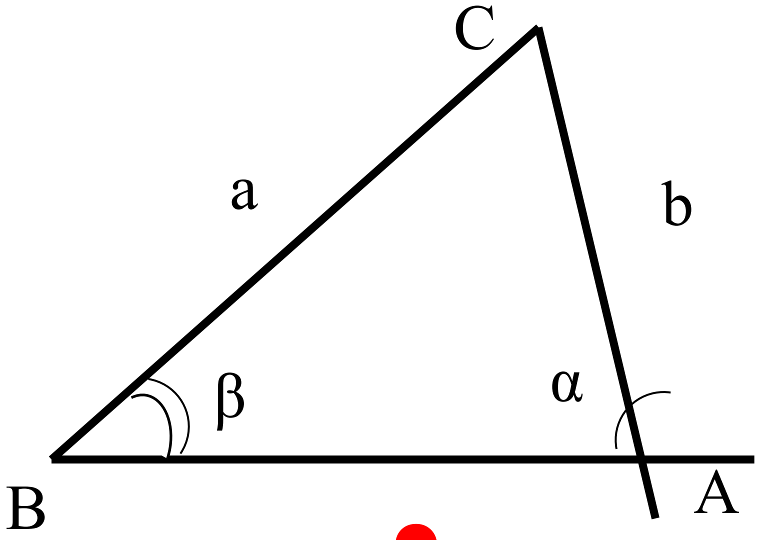
Свойство:

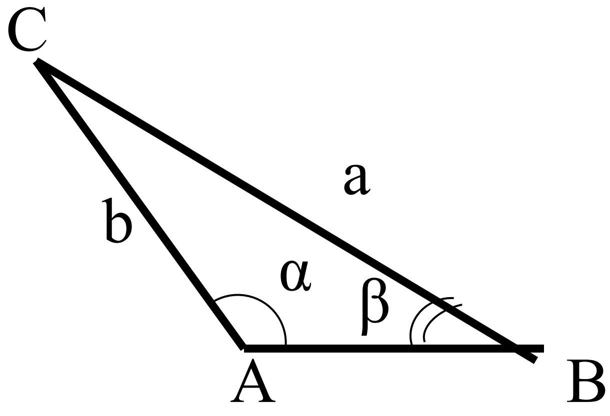
Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним

$$\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$$

Соотношение между углами треугольника и противолежащими сторонами

В треугольнике против большего угла лежит большая сторона, а против большей стороны лежит больший угол.





! ***Если $\alpha > \beta$, то $a > b$*** **!**

Неравенство треугольника

Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.

Пусть a, b, c – длины сторон треугольника.

Тогда **a+b>c, a+c>b, c+b>a**.

Тест на определение истинности (ложности) утверждения

И 1. В треугольнике против угла в 150º лежит большая сторона.

И 2. В равностороннем треугольнике внутренние углы равны между собой и каждый равен 60º.

Л 3. Существует треугольник со сторонами 2 см, 7 см, 3 см.

И 4. Прямоугольный равнобедренный треугольник имеет равные катеты.

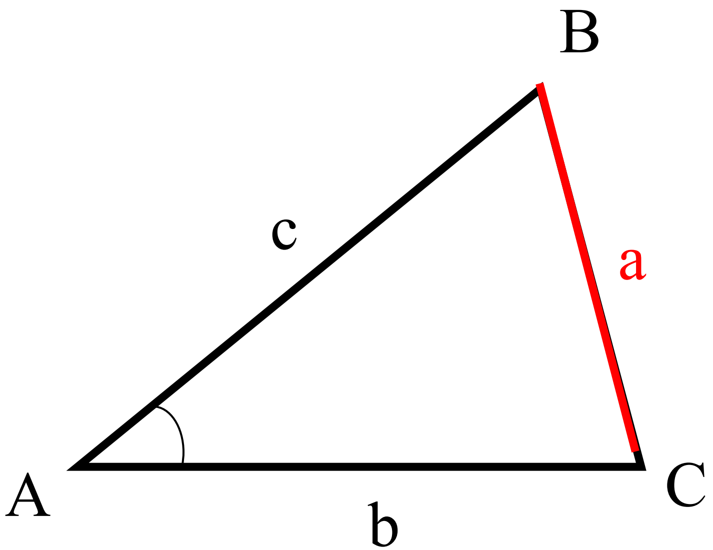
Л 5. Сумма длин двух сторон любого треугольника меньше третьей стороны.

Л 6. Существует треугольник с двумя тупыми углами.

И 7. В прямоугольном треугольнике сумма острых углов равна 90º.

Теорема косинусов

Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

Определение вида треугольника

Из формулы, следующей из теоремы косинусов, примененной к наибольшему углу, учитывая знак косинуса, можно получить соотношения между квадратами сторон, позволяющие определить вид треугольника.

Выразим cos A из формулы: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

получим $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. Так как b, c >0, то:

- если cos A < 0, то $b^2 + c^2 - a^2 < 0$, т.е $a^2 > b^2 + c^2$
- если cos A > 0, то $b^2 + c^2 - a^2 > 0$, т.е $a^2 < b^2 + c^2$
- если cos A = 0, то $b^2 + c^2 - a^2 = 0$, т.е $a^2 = b^2 + c^2$

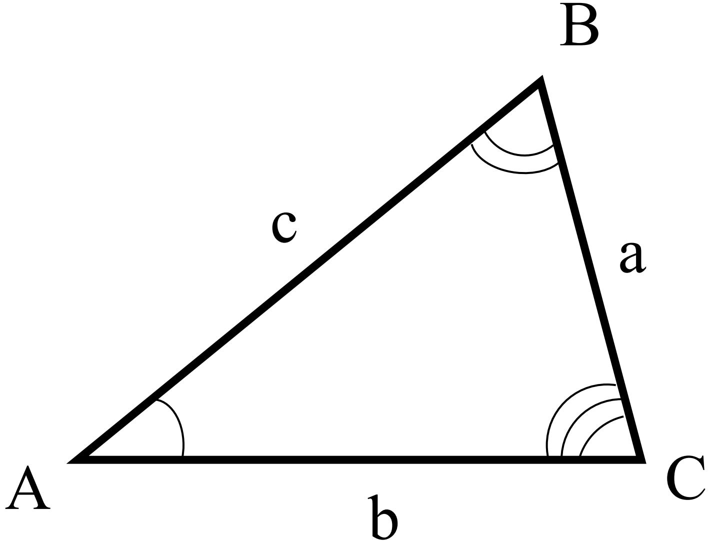
Следовательно, треугольник, у которого **a** – наибольшая сторона, будет:

- тупоугольный, если $a^2 > b^2 + c^2$
- остроугольный, если $a^2 < b^2 + c^2$
- прямоугольный, если $a^2 = b^2 + c^2$

Теорема синусов

Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$



Задача 1. *Решение треугольника по двум сторонам и углу между ними*

Дано: ΔABC, a, b, $\angle C$

Найти: c, $\angle A$, $\angle B$.

План решения:

1. Применим теорему косинусов

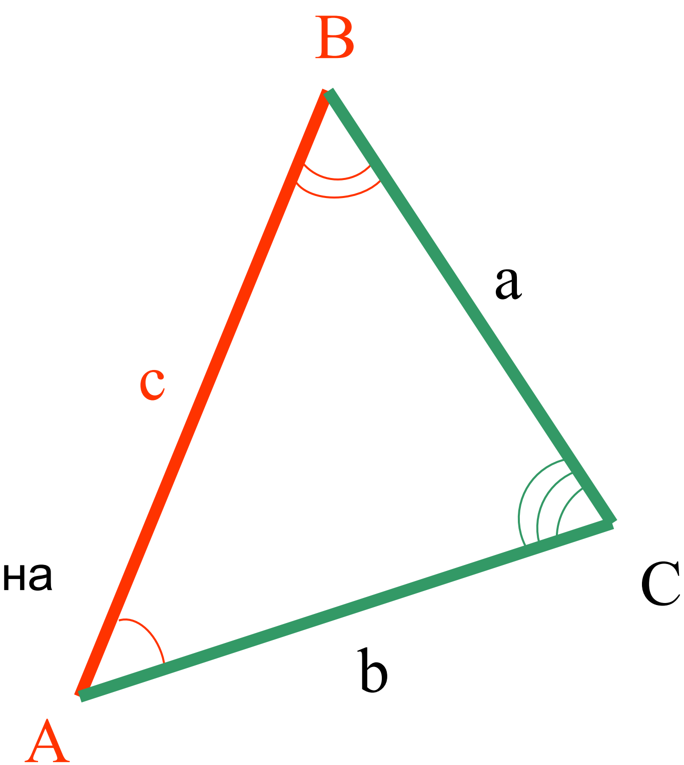
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

2. По теореме косинусов находим

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \angle A = \arccos(\cos A)$$

3. Так как сумма всех углов в треугольнике равна 180°, то $\angle B = 180^\circ - (\angle A + \angle C)$

4. Запишем ответ



Задача 2. *Решение треугольника по стороне и прилежащим к ней углам*

Дано: ΔABC, a, $\angle B$, $\angle C$

Найти: b, c, $\angle A$

План решения:

1. Найдём неизвестный угол

$$\angle A = 180° - (\angle B + \angle C)$$

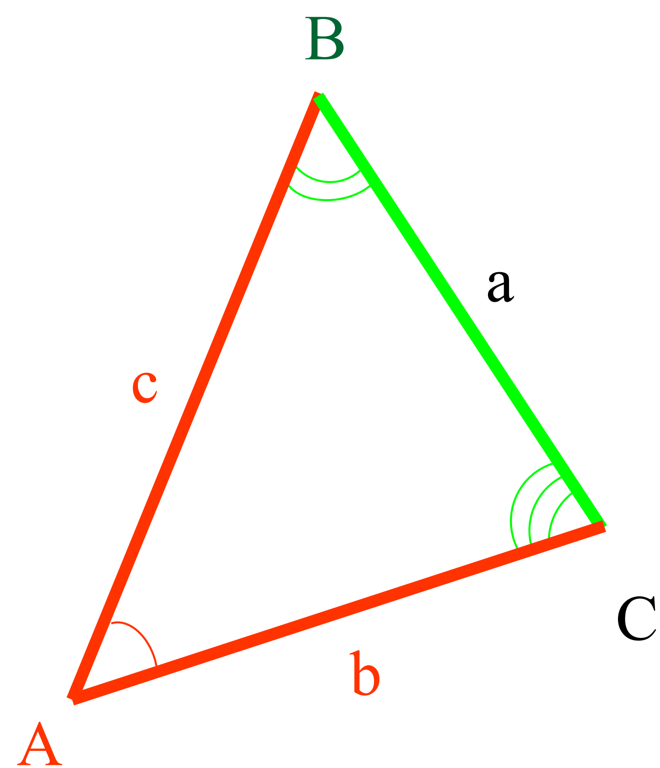
2. С помощью теоремы синусов:

$$\frac{.\ a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

Аналогично:

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

3. Запишем ответ



Задача 3. *Решение треугольника по трём сторонам*

Дано: Δ*ABC*, a, b, c

Найти: ∠*A*, ∠*B*, ∠C.

План решения:

1. По теореме косинусов найдём

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos C = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab}$$

2. Находим значения углов A и B.

3. Находим оставшийся угол

$$\angle B = 180° - \left(\angle A + \angle C\right)$$

4. Запишем ответ

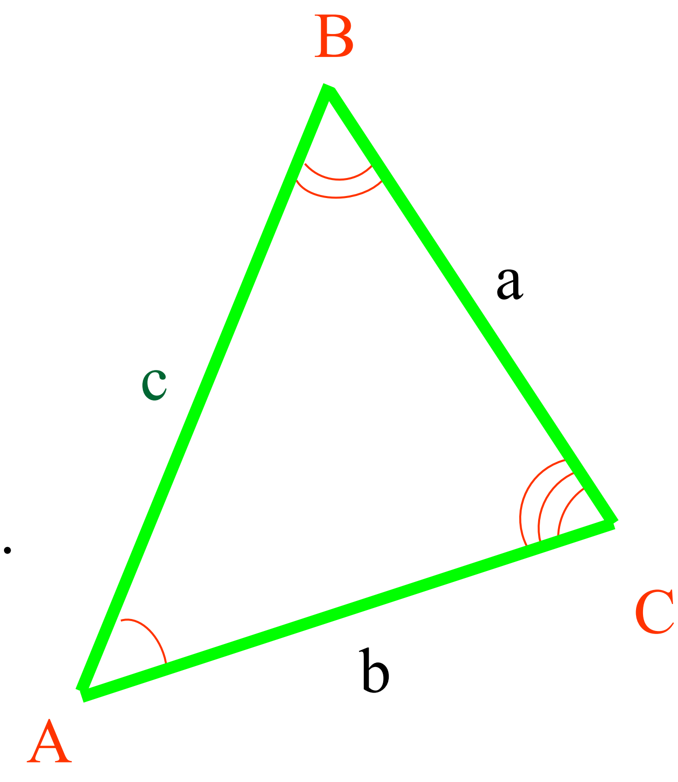
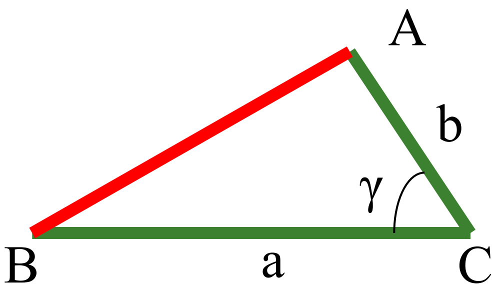
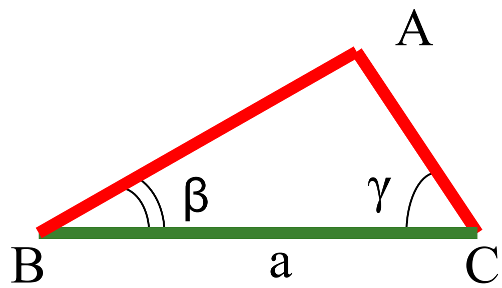
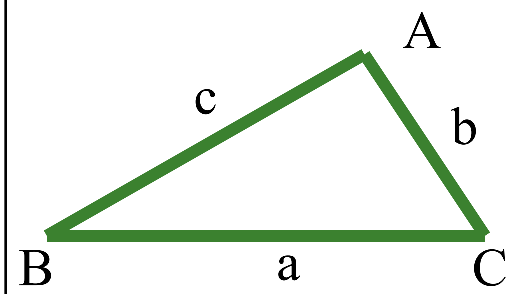


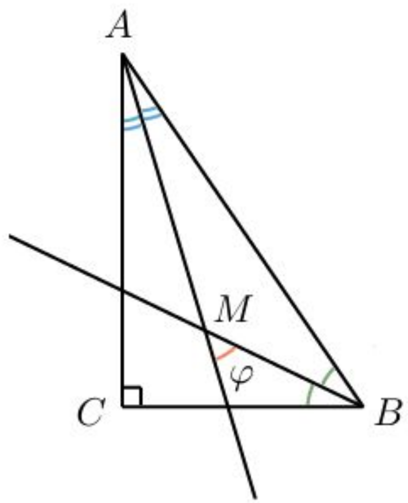
Таблица – памятка

Решение треугольника по двум сторонам и углу между ними	Решение треугольника по стороне и прилежащим к ней углам	Решение треугольника по трем сторонам
		
$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}$ $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ $\angle B=180^\circ-(\angle A+\angle C)$	$\angle A=180^\circ-(\angle B+\angle C)$ $b=\dfrac{a\sin B}{\sin A}$ $c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}$	$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ $\cos C=\dfrac{b^2+a^2-c^2}{2ab}$ $\angle B=180^\circ-(\angle A+\angle C)$

Задачи для самостоятельного решения

1. AC=5м, AB=6 м, cos A=0,6. Найти BC.
2. AC= 5 м, AB= 6 м, BC= 7 м. Найти cos A.
3. Угол A равен 45 градусов, угол B равен 60 градусов, BC=3 м. Найти AC.

4. Найдите стороны треугольника ABC, если $\angle A = 45^{\circ}, \angle C = 30^{\circ}$, а высота AD равна 3 м.



5. Найдите острый угол между биссектрисами острых углов прямоугольного треугольника. Ответ дайте в градусах.

Теорема косинусов

Решение задач - пример № 1.

Дано:

$AC = 5$ м

$AB = 6$ м

$\cos \alpha = 0{,}6$

Найти:

BC - ?

Решение:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \alpha$$

$$BC^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 0{,}6$$

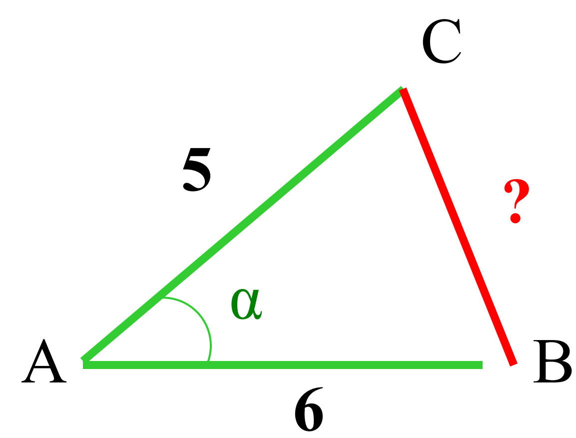
$$BC^2 = 36 + 25 - 36$$

$$BC^2 = 25$$

$$BC = \sqrt{25}$$

$$BC = 5$$

Ответ: 5 м.



Теорема косинусов

Решение задач - пример № 2.

Дано:

AC = 5 м

AB = 6 м

BC = 7 м

Найти:

cos α - ?

Решение:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\alpha$

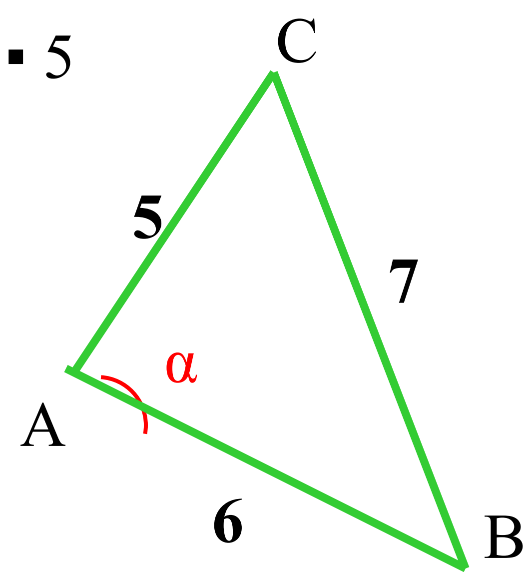
$\cos\alpha = (AB^2 + AC^2 - BC^2) / 2AB \cdot AC$

$\cos\alpha = (6^2 + 5^2 - 7^2) / 2 \cdot 6 \cdot 5$

$\cos\alpha = (36 + 25 - 49) / 60$

$\cos\alpha = 0{,}2$

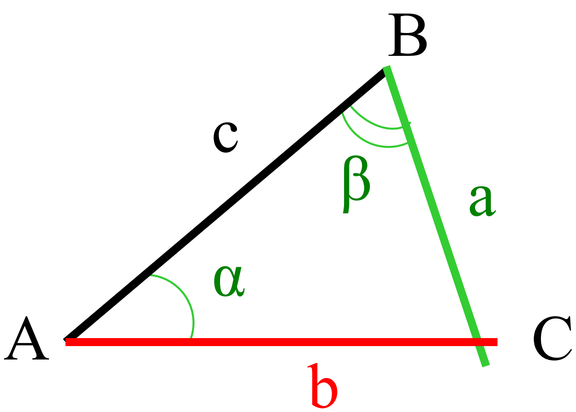
Ответ: 0,2 .



Теорема синусов

Решение задач - пример № 3.

Дано:	Решение:
$\alpha = 45°$	$a/\sin\alpha = b/\sin\beta$
$\beta = 60°$	$b = a \cdot \sin\beta / \sin\alpha$
$a = 3$ м	$b = 3 \cdot \sin 60° / \sin 45°$
Найти:	$b = 3 \cdot (\sqrt{3}/2) / (1/\sqrt{2})$
b - ?	$b = 3 \cdot \sqrt{6}/2$



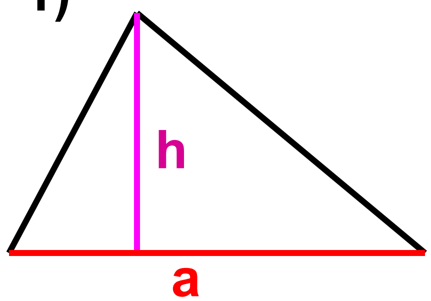
Ответ: $3 \cdot \sqrt{6}/2$

Математическая пауза

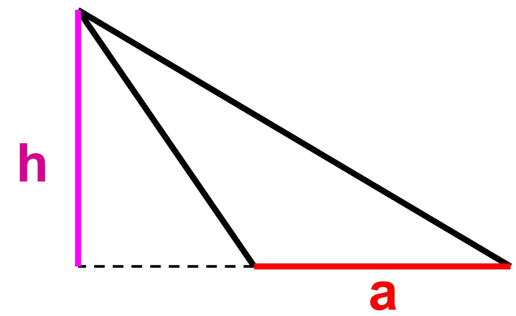
ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА

Формулы, которые надо знать:

1)

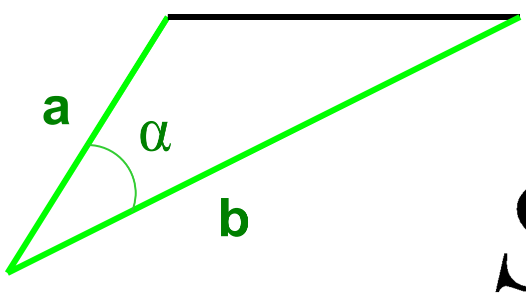


$$S = \frac{1}{2} a h$$



Перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону, называется высотой треугольника.

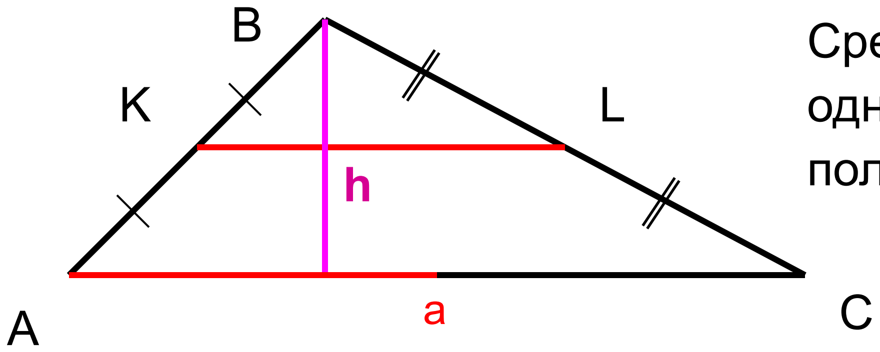
2)



$$S = \frac{1}{2} ab \sin \alpha$$

Средняя линия треугольника

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.



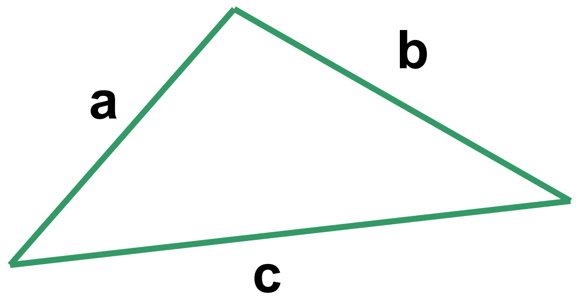
Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.

$$S = \frac{1}{2} a h$$

если *m* — средняя линия и *h* — высота, формула площади:

$$S = mh$$

3) **Формула Герона**



$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

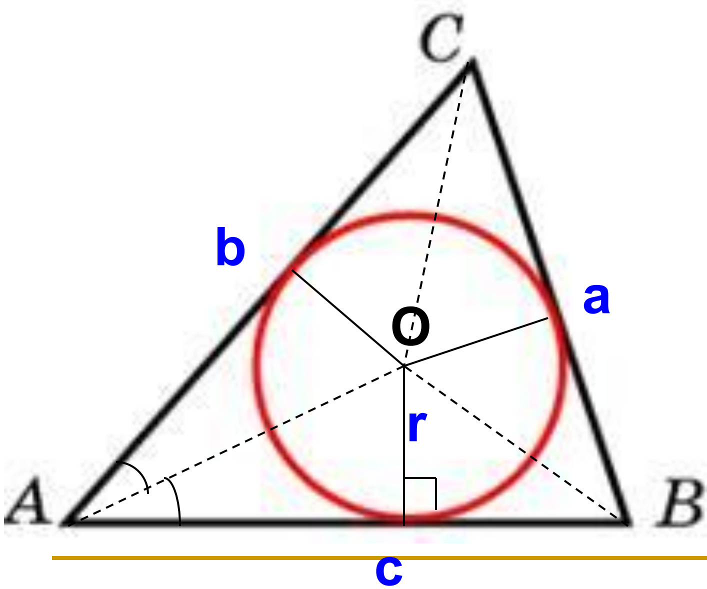
где *p – полупериметр треугольника*

4) Описанный треугольник

Если все стороны треугольника касаются окружности, то окружность называется *вписанной* в треугольник, а треугольник называется *<u>описанным</u>* около окружности.

В любой треугольник можно вписать окружность.

***<u>Центр</u>* вписанной в треугольник окружности находится в точке пересечения биссектрис треугольника.**



$$S = p \cdot r$$

p- полупериметр треугольника

r- радиус вписанной окружности

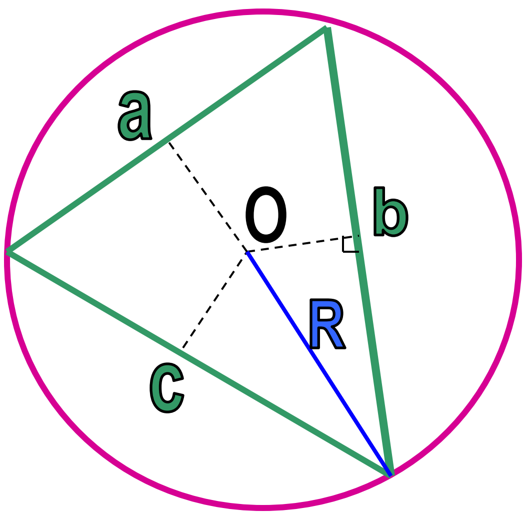
$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

5) Вписанный треугольник

Если все вершины треугольника лежат на окружности, то окружность называется *описанной* около треугольника, а треугольник называется *вписанным* в окружность.

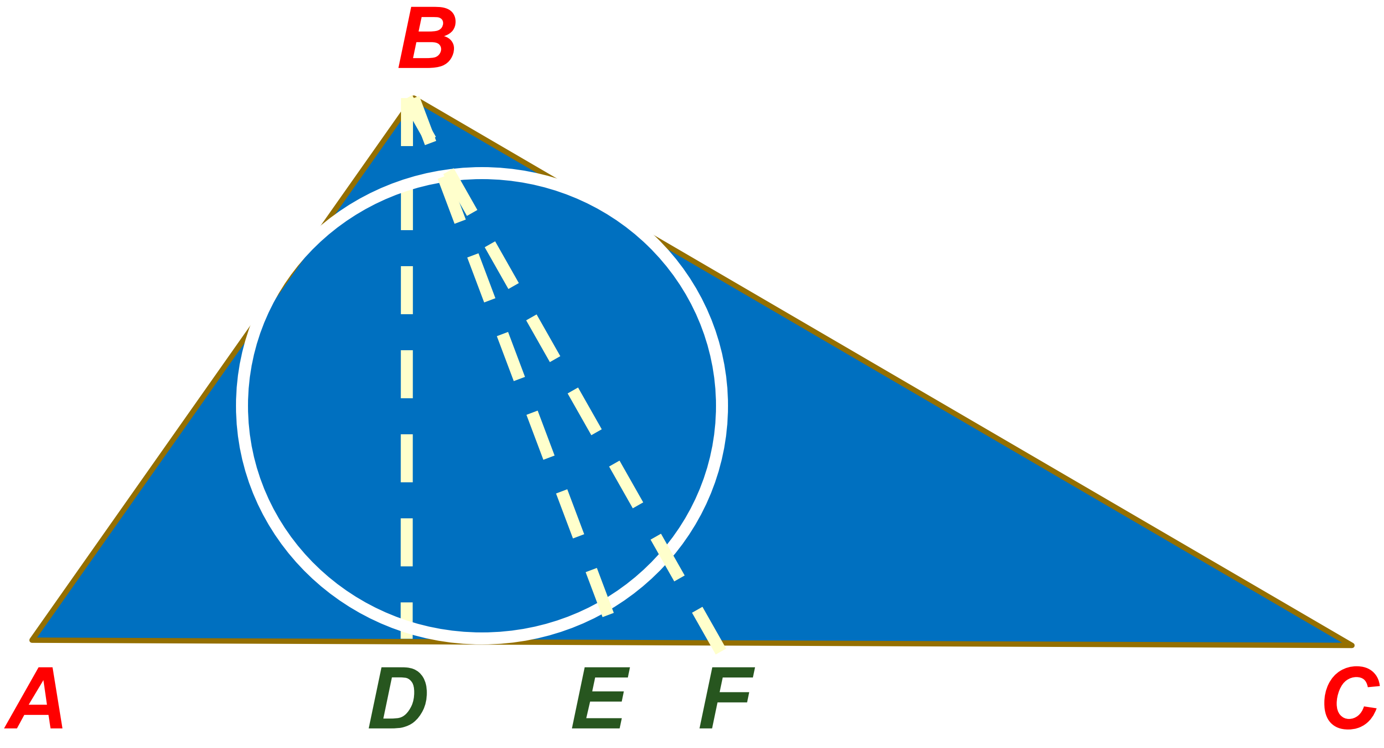
Около любого треугольника можно описать окружность.

Центр **описанной около треугольника окружности находится в точке пересечения перпендикуляров, проведенных через середины сторон треугольника.**



$$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

Задача о расчете косоугольного треугольника



ЭТАПЫ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ:

1. ЧТЕНИЕ УСЛОВИЯ ЗАДАЧИ.

2. ВЫПОЛНЕНИЕ ЧЕРТЕЖА С БУКВЕННЫМИ ОБОЗНАЧЕНИЯМИ.

3. КРАТКАЯ ЗАПИСЬ УСЛОВИЯ ЗАДАЧИ (ФОРМИРОВАНИЕ БАЗЫ ДАННЫХ).

4. ПЕРЕНОС ДАННЫХ УСЛОВИЯ НА ЧЕРТЕЖ; ВЫДЕЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ЧЕРТЕЖА РАЗЛИЧНЫМИ ЦВЕТАМИ.

5. ЗАПИСЬ ТРЕБУЕМЫХ ФОРМУЛ И ТЕОРЕМ НА ЧЕРНОВИКЕ (ФОРМИРОВАНИЕ БАЗЫ ЗНАНИЙ).

ЭТАПЫ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ:

6. «ДЕТАЛИРОВКА» — ВЫЧЕРЧИВАНИЕ ОТДЕЛЬНЫХ ДЕТАЛЕЙ НА ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ЧЕРТЕЖАХ.

7. АНАЛИЗ ДАННЫХ ЗАДАЧИ, ПРИВЯЗКА ИСКОМЫХ ВЕЛИЧИН К ЭЛЕМЕНТАМ ЧЕРТЕЖА.

8. «СИНТЕЗ» — СОСТАВЛЕНИЕ «ЦЕПОЧКИ» ДЕЙСТВИЙ (АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ).

9. РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ.

10. ПРОВЕРКА ПРАВИЛЬНОСТИ РЕШЕНИЯ.

11. ЗАПИСЬ ОТВЕТА.

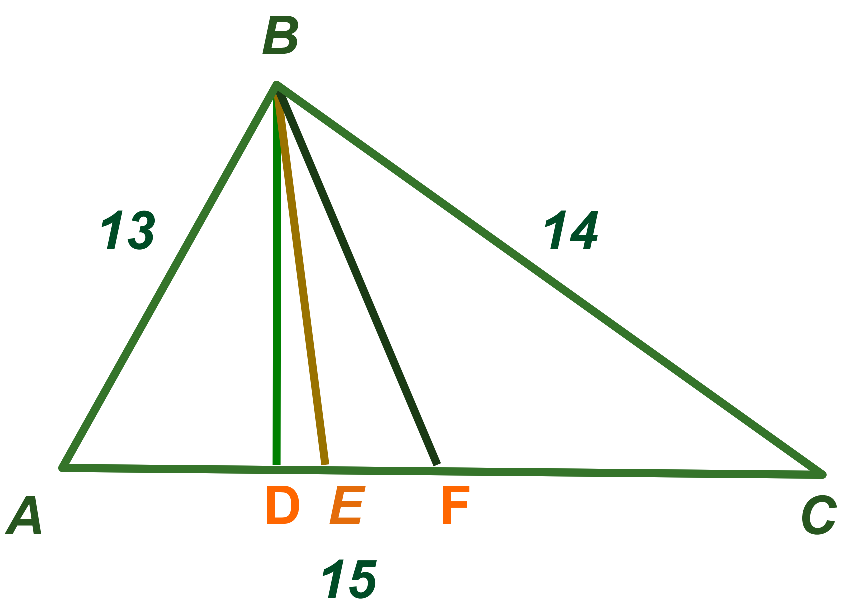
Дано:

В треугольнике *ABC*

AB=c=13 см;

BC=a=14 см;

AC=b=15 см.



Найти:

1) площадь *S;*

2) h_b – высоту *BD;*

3) радиус вписанной окружности *r;*

4) величину наибольшего внутреннего угла треугольника *ABC*;

5) радиус описанной окружности *R;*

6) m_b – длину медианы *BF;*

7) L_b – длину биссектрисы *BE* угла *B* (точка *E* лежит на отрезке *AC*).

1. Вычисление площади треугольника ABC.

База знаний.

Выпишем формулы, по которым можно найти площадь треугольника:

$$S = \frac{1}{2} b \cdot h_b; \qquad (1)$$

$$S = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin B; \qquad (2)$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}; \qquad (3)$$

$$S = r \cdot p, \qquad (4)$$

где $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ — полупериметр треугольника ABC.

Поскольку в условии задачи даны только длины сторон треугольника ABC, то для вычисления его площади нам необходимо воспользоваться именно формулой Герона (3).

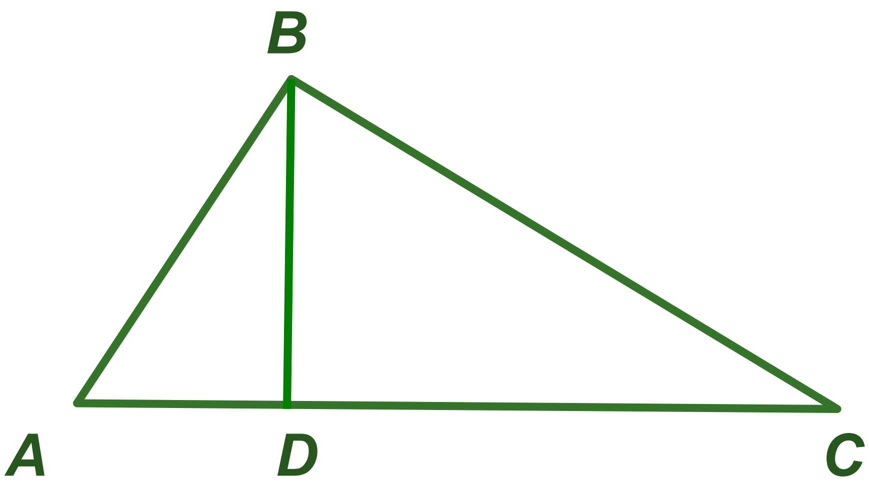
Вычислим сначала полупериметр треугольника:

$$p = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(13+14+15) = 21(см).$$

Тогда, по формуле (3), $S = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84(см^2).$

$$\boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};} \qquad (3)$$

2. Вычисление высоты треугольника.



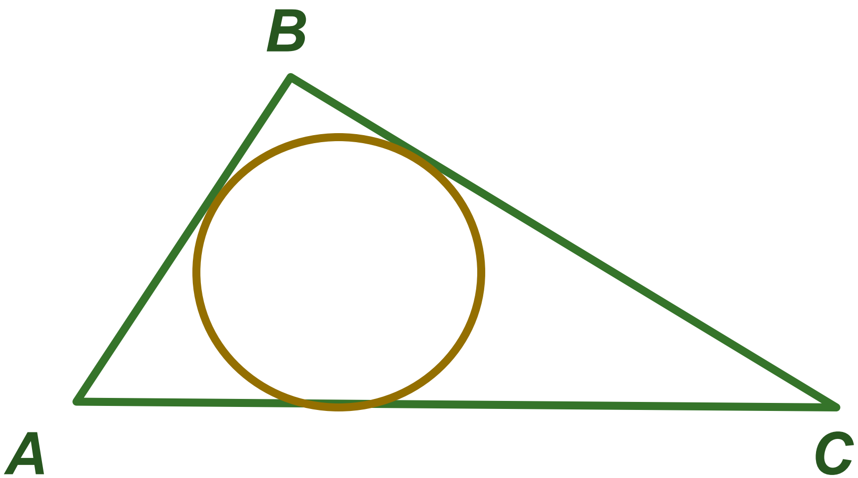
Используем формулу *(1)*:

$$S = \frac{1}{2} b \cdot h_b .$$

Так как площадь треугольника S и длина стороны AC нам уже известны, можем вычислить h_b — длину высоты BD:

$$h_b = 2S / b = 2 \cdot 84 / 15 = 11{,}2 (см)$$

3. Вычисление радиуса вписанной окружности.



Для вычисления длины r радиуса вписанной окружности нам необходимо воспользоваться формулой площади треугольника (4):

$$S = p \cdot r.$$

Отсюда находим

$$r = S : p = 84 : 21 = 4(см).$$

4. Вычисление наибольшего угла треугольника.

Включаем в **базу знаний** теорему о том, что против большей стороны в треугольнике лежит больший угол.

Из этой теоремы следует, что большим углом в треугольнике *ABC* является угол *B*. По формуле (2) можем записать:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin B.$$

$$\sin B = \frac{2S}{a \cdot c} = \frac{2 \cdot 84}{13 \cdot 14} = \frac{12}{13}$$

5. Вычисление радиуса описанной окружности.

Ответ на вопрос задачи о вычислении длины R радиуса описанной окружности требует включения в **базу знаний** теоремы синусов:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a \cdot b \cdot c}{2S} = 2R. \qquad (6)$$

Из соотношения (6) следует, что

$$R = \frac{b}{2\sin B} = \frac{15 \cdot 13}{2 \cdot 12} = \frac{65}{8}(см).$$

Этот же результат можно получить, подставляя длины сторон и площадь треугольника в другую формулу, также следующую из (6):

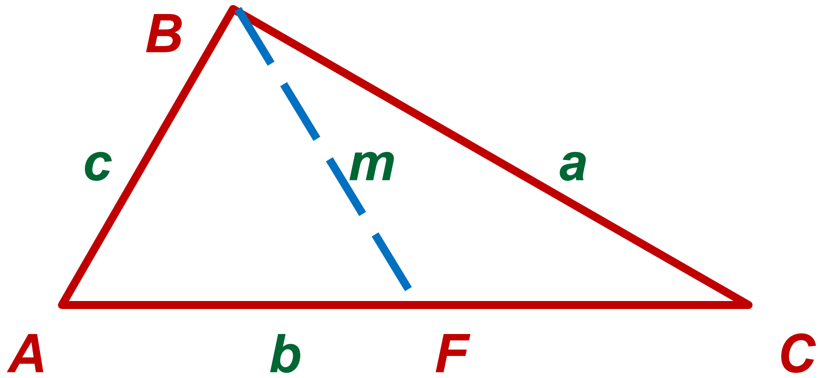
$$(5) \qquad R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4 \cdot 84} = \frac{65}{8}(см).$$

6. Вычисление длины медианы треугольника.

Построим медиану *BF* и вычислим ее длину *mb*.

Для этого добавим в **базу знаний** теорему косинусов, согласно которой в треугольнике *ABC*:

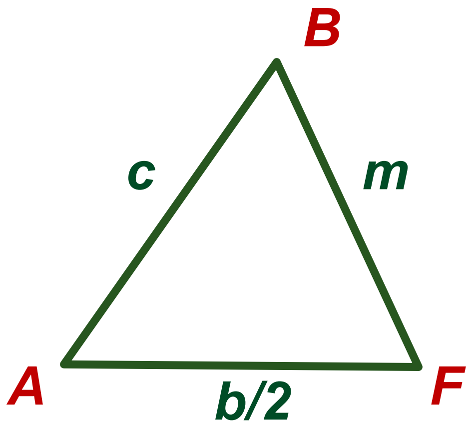
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A. \qquad (7)$$



Дважды применим теорему косинусов, применив ее сначала к треугольнику *ABC*, а затем к треугольнику *ABF*.

Значение *cosA* находим из формулы (7): $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

Выполним деталировку и рассмотрим треугольник ABF.



В этом треугольнике $AB = c$, $AF = b/2$, BF — искомая медиана m.

Тогда, по теореме косинусов,

$$m_b^2 = c^2 + \frac{b^2}{4} - bc \cdot \cos A.$$

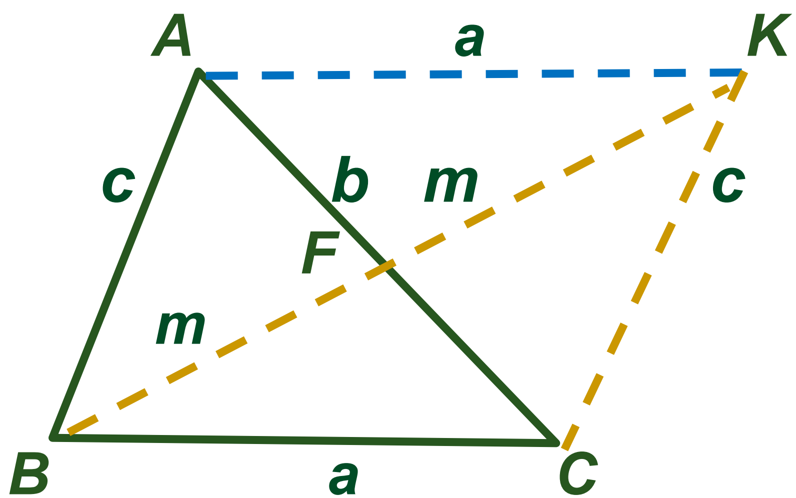
Значение $cosA$ нашли из треугольника ABC. После преобразований получаем:

$$m_b = \frac{\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}}{2} = \frac{\sqrt{2(13^2 + 14^2) - 15^2}}{2} = \frac{\sqrt{505}}{2} (см).$$

Длину медианы можно также получить, достроив треугольник ABC до параллелограмма $ABCK$, в котором AC является диагональю, а BF — половиной другой диагонали.

Тогда для вычисления m_b можно воспользоваться тем, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон

(этот факт также добавляем в **базу знаний**):



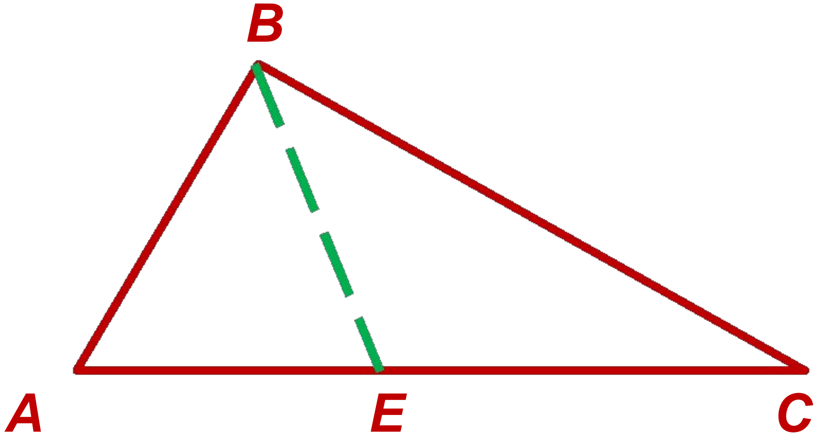
$$(2m_b)^2 + b^2 = 2a^2 + 2c^2,$$

отсюда

$$m_b = \frac{\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}}{2}.$$

7. Вычисление длины биссектрисы треугольника.

Построим биссектрису BE и вычислим ее длину L_b по схеме, описанной в предыдущем пункте.

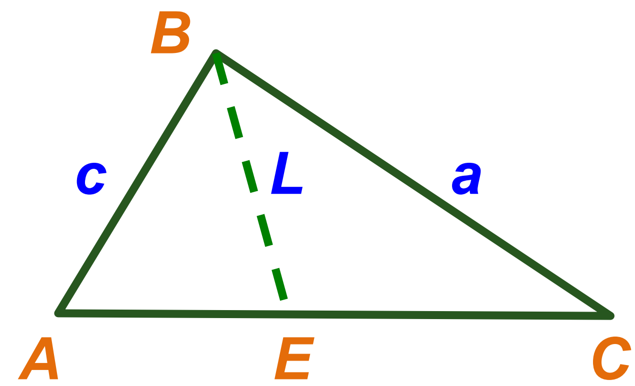


Дополнительное затруднение связано с необходимостью вычисления длины отрезка AE. Найти ее нам помогает следующая теорема, включаемвя в **базу знаний**:

Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противолежащую сторону на части, пропорциональные сторонам, образующим этот угол: $AE / EC = AB / BC$.

Обозначим $AE = x$ **, тогда** $EC = b - x$.

Из упомянутой теоремы следует пропорция: $\dfrac{x}{c} = \dfrac{b-x}{a}$



Отсюда находим: $x = \dfrac{bc}{a+c}$

Используя теорему косинусов, из треугольника *ABE* выражаем L_b^2:

$$L_b^2 = c^2 + x^2 - 2cx \cdot \cos A$$

После преобразований получаем:

$$L_b = \frac{\sqrt{ac((a+c)^2 - b^2)}}{a+c} = \frac{\sqrt{13 \cdot 14((13+14)^2 - 15^2)}}{13+14} = \frac{28\sqrt{13}}{9}(см).$$

Отметим, что при выводе формул для вычисления применяются тождества сокращенного умножения, которые также должны быть включены в **базу знаний**.

ПРОВЕРКА.

1. Размерности всех результатов верны.

2. Все заданные величины использованы при решении задачи.

ОТВЕТ.

Поскольку каждому этапу определения искомых величин при решении присвоен номер, соответствующий номеру в условии задачи, мы не будем выписывать ответы в отдельном пункте.

Итог урока

1.Вычисление площади треугольника.

$$S = \frac{1}{2} b \cdot h_b; \qquad (1)$$

$$S = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin B; \qquad (2)$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}; \qquad (3)$$

$S = r \cdot p,$ где r - радиус вписанной окружности, (4)

$p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ — полупериметр треугольника.

$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$, где R - радиус описанной окружности. (5)

2. Теорема синусов.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a \cdot b \cdot c}{2S} = 2R. \quad \left(R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S} \right) \qquad (6)$$

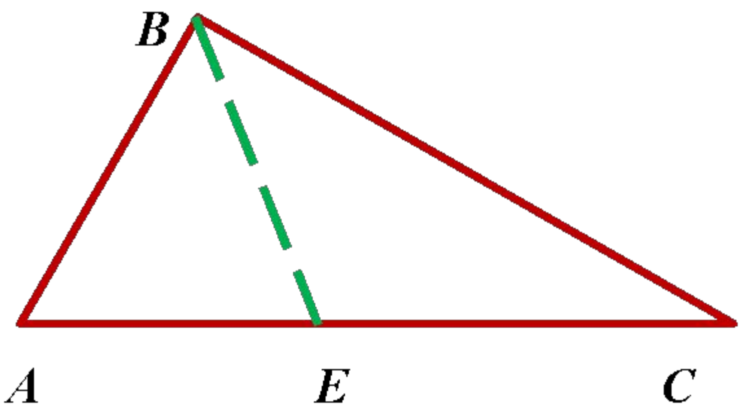
3. Теорема косинусов: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A.$ (7)

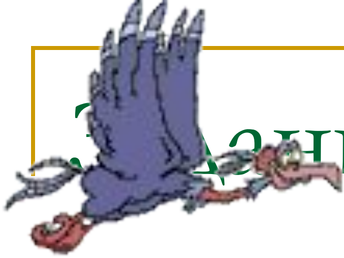
4. Параллелограмм.

Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

5. Биссектриса внутреннего угла треугольника.

Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противолежащую сторону на части, пропорциональные сторонам, образующим этот угол: $AE / EC = AB / BC$.





Задание на дом

1. Найдите медиану и биссектрису большего угла треугольника АВС, если его стороны равны 4 см, 6 см и 8 см.
2. В треугольнике АВС известна сторона *а*, противолежащий ей угол α, угол β. Найдите третий угол γ треугольника, длины сторон *b* и *c*, радиус описанной окружности R, радиус вписанной окружности r.

$a = 6\sqrt{2}$, $\alpha = 45^{\circ}, \beta = 30^{\circ}$

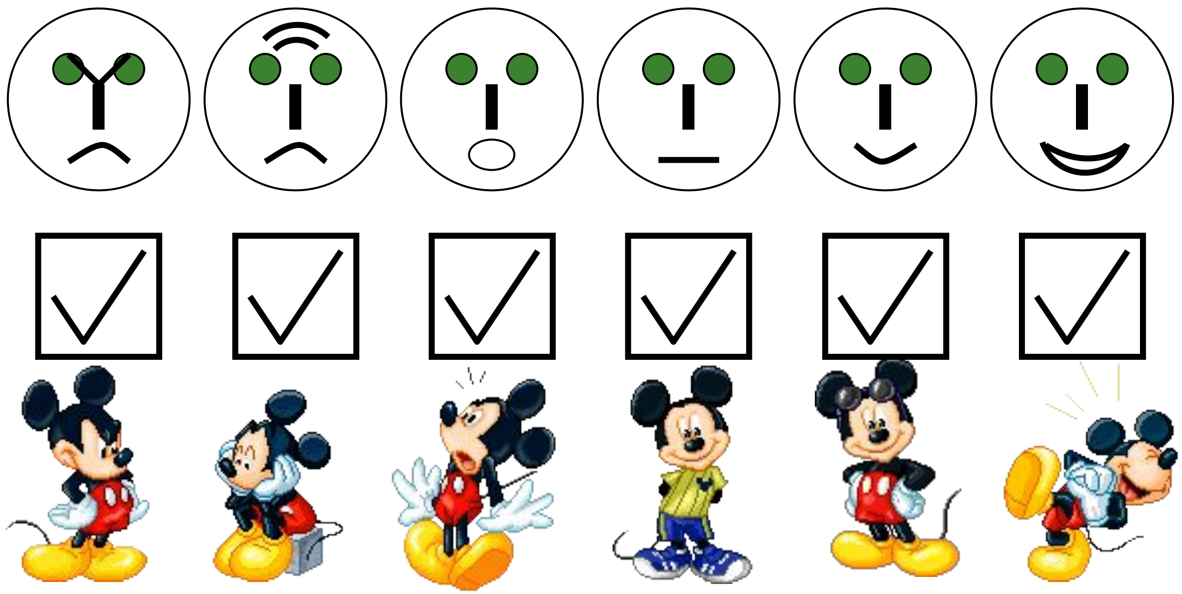
3(*). В равнобедренном треугольнике боковые стороны равны 17, а основание равно 30. Найдите:

а) высоту, проведенную к боковой стороне;
б) синус угла между равными сторонами;
в) отношение радиуса вписанной окружности к радиусу описанной окружности;
г) медиану, проведенную к боковой стороне;
д) биссектрису, проведенную к боковой стороне.

Дополнительное задание.

Психологическая заминка

Урок заканчивается, пожалуйста определите своё эмоциональное состояние в конце урока. Поставьте на этой же карточке галочку в клетку, соответствующую настроению



Спасибо за урок! Успехов!

До новых встреч!