

Иоганн Себастьян Бах

Токката и фуга ре минор

Токката (фантазия)

- Хроматическая фантазия написана в размере 4/4, имеет 79 тактов, т. е. $79 \cdot 4 = 316$ четвертных долей.
 - состоит из двух ясно различимых по характеру частей, отделенных друг от друга паузой
-

$$a_1 = a\varphi = 0,316 \cdot 0,618 = 195,3.$$

- первая часть фактически заканчивается на 3-й четверти 49-го такта, т. е. на 195-й $(48 \cdot 4 + 3)$ четверти $a_1 = 195$.

$$\frac{316}{195} = \frac{195}{121}, \quad 195 + 121 = 316.$$

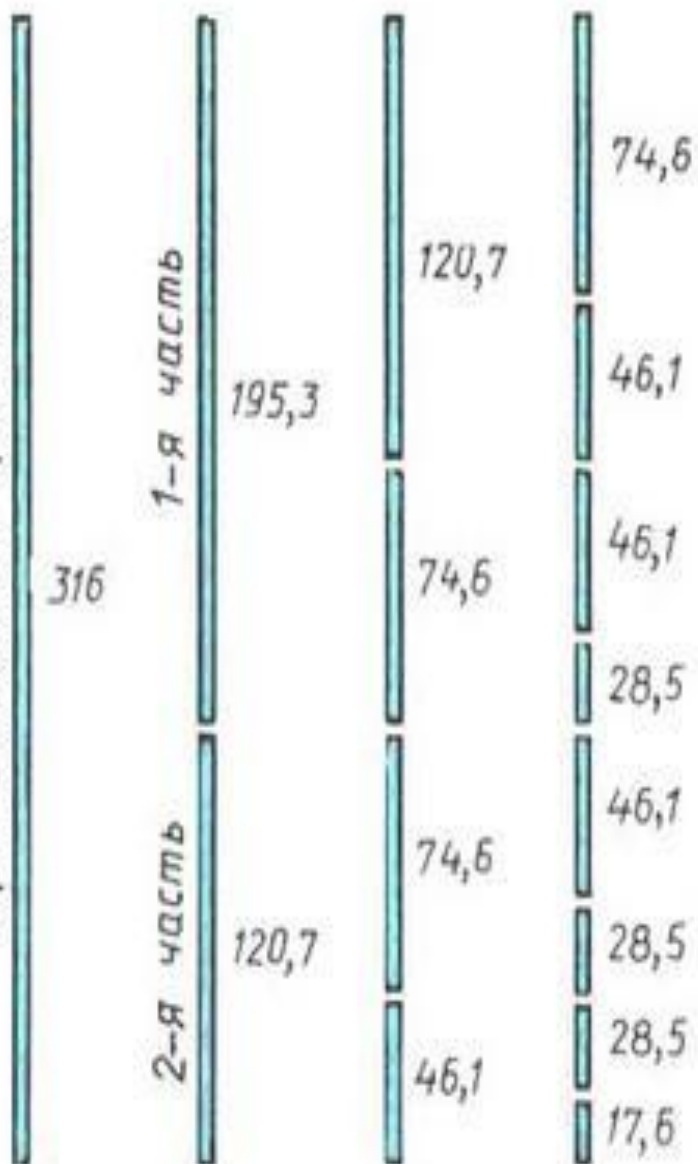
- Хроматическая фантазия разделена на первую и вторую части в золотой пропорции:
-

Число Фибоначчи

- Но на этом чудеса гениального творения Баха только начинаются. Построив ряд золотого сечения при $a=316$, имеем

316 195,3 120,7 74,6 46,1 28,5 17,6.

Хроматическая фантазия



- Остановка, к которой стремились все предыдущие ходы
- Кульминация первой части
- Остановка, прерывающая арпеджированные фигуры
- Конец первой части
- Прерванная каденция
- Кульминация второй части
- Начало романтических речитативов
- Конец второй части

К. Розенов (1861Русский советский музыковед Э. К. Розенов (1861-1935)

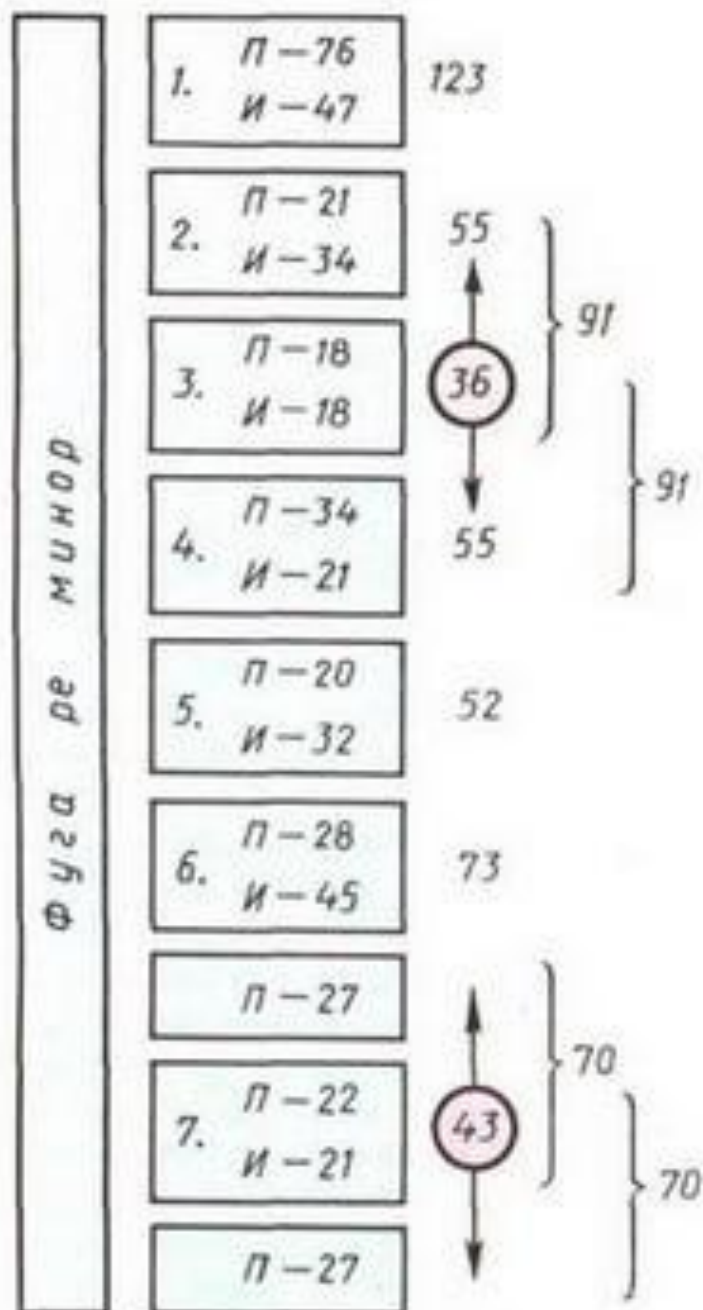
Вывод: Хроматическая фантазия, произведение свободного по форме жанра, буквально соткано из **ЗОЛОТЫХ пропорций**. Пожалуй, эстетическое впечатление от математического анализа Хроматической фантазии имеет не меньшую силу, чем прослушивание бессмертного творения Баха. А взятые вместе - чувственное впечатление и рациональный анализ, безусловно, позволяют еще на один шаг приблизиться к сокровенным тайникам гения.

Фуга

- *Фуга* (от лат. *fuga* - бег) является наиболее совершенной формой многоголосной музыки (полифонии).
 - Фуга строится на многократных проведениях основной музыкальной темы в разных голосах.
 - Проведения основной темы обычно перемежаются в фуге с промежуточными вставками, *интермедиями*
 - Фуга в отличие от фантазии имеет четко определенный закон построения
 - Но тем не менее точность "математического" построения фуги *ре минор* просто поражает!
-

$$\begin{aligned}
 123 \cdot \varphi &= 76,01 & \frac{123}{76} &= \frac{76}{47} & 76 + 47 &= 123 \\
 123 \cdot \varphi^2 &= 46,97 \\
 55 \cdot \varphi &= 33,99 & \frac{55}{34} &= \frac{34}{21} & 34 + 21 &= 55 \\
 55 \cdot \varphi^2 &= 21,00 \\
 91 \cdot \varphi &= 56,23 & \frac{91}{55} &= \frac{55}{36} & 55 + 36 &= 91 \\
 91 \cdot \varphi^2 &= 34,75
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 52 \cdot \varphi &= 32,13 & \frac{52}{32} &= \frac{32}{20} & 32 + 20 &= 52 \\
 52 \cdot \varphi^2 &= 19,85 \\
 73 \cdot \varphi &= 45,11 & \frac{73}{45} &= \frac{45}{28} & 45 + 28 &= 73 \\
 73 \cdot \varphi^2 &= 27,87 \\
 70 \cdot \varphi &= 43,26 & \frac{70}{43} &= \frac{43}{27} & 43 + 27 &= 70 \\
 70 \cdot \varphi^2 &= 26,73
 \end{aligned}$$



7 пар "проведение-интермедия" пять пар строго подчиняются закону золотого сечения.

Строение фуги ре минор И. С. Баха:

Целые числа указывают число четвертей в фуге

Дробные - теоретическое значение золотых сечений

Золотые пропорции в более крупных частях фуги отмечены **фигурными скобками**

Центры симметрии – **кружками**

П – проведение

И - интермедия.

Вывод:

Простой математический анализ, не выходящий за рамки арифметики, позволяет совершенно иными глазами взглянуть на музыкальное произведение, увидеть его скрытую внутреннюю красоту, которую мы только ощущаем, слушая произведение, и которую мы "видим", проводя его математический анализ.
