



Арифметическая и геометрическая прогрессии.

*Выполнила
учитель математики МОУ
«СОШ №17 г.Вольска Саратовской
области»
Сметанина Татьяна Евгеньевна*

г.Вольск

Арифметическая прогрессия

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

Геометрическая прогрессия

$$b_1, b_2, b_3, \dots$$

Определения

Арифметической прогрессией называется числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом.

$$a_{n+1} = a_n + d, n = 1, 2, \dots,$$

d – разность прогрессии

Геометрической прогрессией называется числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля и каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же не равное нулю число.

$$b_{n+1} = qb_n, n = 1, 2, \dots,$$

q ≠ 0, b₁ ≠ 0;

q – знаменатель прогрессии

Формулы общего члена

$$a_n = a_1 + d \cdot (n - 1),$$

n = 1, 2, ...

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1},$$

n = 1, 2, ...

Характеристическое свойство

a_{n-1}, a_n, a_{n+1} – последовательные члены арифметической прогрессии тогда и только тогда, когда

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

(среднее арифметическое)

b_{n-1}, b_n, b_{n+1} (b_n > 0) – последовательные члены геометрической прогрессии тогда и только тогда, когда

$$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$$

(среднее геометрическое)

Формулы суммы n первых членов

Арифметической
прогрессии

Геометрической
прогрессии

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, q \neq 1$$

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n - 1)}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}, q \neq 1$$



Задача №1

Четвёртый член арифметической прогрессии равен 4,5, а её двенадцатый член равен -12. Найдите двадцатый член этой прогрессии.

Решение

I способ

Воспользуемся формулой n -го члена арифметической прогрессии

$a_n = a_1 + d(n - 1)$ и выразим данные члены прогрессии $a_4 = a_1 + 3d$, $a_{12} = a_1 + 11d$.

Составим и решим систему уравнений:

$$a_1 + 11d = 4,5,$$

$$a_1 + 3d = -12;$$

$$-8d = 16,5, \quad 8d = -16,5$$

Заметим, что $a_{20} = a_{12} + 8d$,

$$a_{20} = -12 - 16,5,$$

$$a_{20} = -28,5$$

II способ

Заметим, что $a_{12} = a_4 + 8d$, $a_{20} = a_{12} + 8d$. Найдём $8d$.

$$8d = a_{12} - a_4 = -12 - 4,5 = -16,5$$

$$a_{20} = a_{12} + 8d = -12 - 16,5 = -28,5$$

Ответ. $-28,5$



ЗАДАЧА №2

В геометрической
прогрессии

$$b_{12} = 3^{15} \text{ и } b_{14} = 3^{17}.$$

Найдите b_1 .

Решение

По определению геометрической прогрессии

$$b_{14} = b_{12} \cdot q^2 \Rightarrow q^2 = \frac{b_{14}}{b_{12}} = \frac{3^{17}}{3^{15}} = 3^2 = 9, \quad q = \pm\sqrt{9}, \quad q = \pm 3$$

По формуле n-го члена геометрической прогрессии $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

$$b_{12} = b_1 \cdot q^{11} \Rightarrow b_1 = \frac{b_{12}}{q^{11}}$$

Если $q = -3$, то

$$b_1 = \frac{3^{15}}{-3^{11}} = -3^4 = -81$$

Если $q = 3$, то

$$b_1 = \frac{3^{15}}{3^{11}} = 3^4 = 81$$

Ответ. – 81 или 81



Задача № 3

В арифметической прогрессии $a_5 = -150$, $a_6 = -147$. Найдите номер первого положительного члена этой прогрессии

Решение

По определению арифметической прогрессии

$$a_6 = a_5 + d, \quad d = a_6 - a_5, \quad d = -147 - (-150), \quad d = 3$$

По формуле n -го члена арифметической прогрессии

$$a_n = a_1 + d(n - 1), \quad a_5 = a_1 + 4d, \quad a_1 = a_5 - 4d,$$

$$a_1 = -150 - 12, \quad a_1 = -162.$$

Так как $a_n > 0$, то $a_1 + d(n - 1) > 0$, значит,

$$-162 + 3(n - 1) > 0,$$

$$-162 + 3n - 3 > 0,$$

$$3n > 165,$$

$$n > 55,$$

$$n = 56.$$

Ответ. *Первый положительный член этой прогрессии стоит на 56 месте.*



Задача №4

Существует ли
геометрическая
прогрессия, в
которой

$$b_2 = -6, \quad b_5 = 48 \text{ и} \\ b_7 = 192$$

Решение

По определению геометрической прогрессии

$$b_5 = b_2 \cdot q^3 \Rightarrow q^3 = \frac{b_5}{b_2} = \frac{48}{-6} = -8, q = -2$$

$$b_7 = b_5 \cdot q^2, \quad b_7 = 48 \cdot 4 = 192.$$

Ответ. Существует.



Задача № 5

Найдите сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 160, которые не делятся на 4.

Решение

1. Найдём сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 160.

1, 2, 3, ... - арифметическая прогрессия, в которой $a_1 = 1, d = 1,$

$a_{160} = 160$. Воспользуемся формулой $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

$$S_{160} = \frac{1 + 160}{2} \cdot 160 = 161 \cdot 80 = 12\,880$$

2. Найдём сумму всех натуральных чисел, кратных 4 и не превосходящих 160.

последовательность (c_n) чисел, кратных 4, задаётся формулой $c_n = 4n$.

(c_n) - арифметическая прогрессия, в которой $c_1 = 4, d = 4, c_n = 160, n = 160 : 4,$
 $n = 40$.

$$S_{40} = \frac{4 + 160}{2} \cdot 40 = 164 \cdot 20 = 3280$$

3. Найдём сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 160, которые не делятся на 4. Эта сумма равна сумме всех натуральных чисел, не превосходящих 160, без суммы натуральных чисел, кратных 4, т.е.

$$12\,880 - 3280 = 9600.$$

Ответ. Сумма всех натуральных чисел, не превосходящих 160, которые не делятся на 4, равна 9600.



Задача № 6

В геометрической прогрессии сумма первого и второго членов равна 132, а сумма второго и третьего членов равна 110. Найдите первые три члена этой прогрессии.

Решение

По характеристическому свойству геометрической прогрессии

$$b_2 = \sqrt{b_1 \cdot b_3} \Rightarrow b_2^2 = b_1 \cdot b_3.$$

По условию задачи

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = 132, \\ b_2 + b_3 = 110, \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = 132 - b_2, \\ b_3 = 110 - b_2. \end{cases}$$

Перемножив уравнения, получим $b_1 \cdot b_3 = (132 - b_2)(110 - b_2)$.

Полученное уравнение перепишем в виде:

$$\begin{aligned} b_2^2 &= (132 - b_2)(110 - b_2) \\ b_2^2 &= 14520 - 132b_2 - 110b_2 + b_2^2, \\ 132b_2 + 110b_2 &= 14520, \\ 242b_2 &= 14520, \\ b_2 &= 60. \end{aligned}$$

Тогда $b_1 = 132 - 60 = 72$,

$b_3 = 110 - 60 = 50$.

Ответ. 72, 60, 50



Предостережение.

74% всех участников экзамена не приступали или не смогли решить это задание (наивысший балл получили 23% участников экзамена).

Записав в ответ только два члена прогрессии, можно потерять один балл.

Обратите внимание на критерии проверки: одна арифметическая ошибка – потеря одного балла, а две и более арифметических ошибок – потеря всех баллов за это задание



Задача № 7

Последовательность (a_n) – арифметическая прогрессия.

Известно, что $a_5 + a_9 = 40$.
Найдите $a_3 + a_7 + a_{11}$.



Задача № 8

**Сумма третьего и
тринадцатого
членов
арифметической
прогрессии равна
11. Найдите сумму
первых
пятнадцати её
членов**



Задача № 9

Сумма первых пяти членов арифметической прогрессии на 200 больше суммы следующих её членов. На сколько сумма первых десяти членов этой прогрессии больше суммы следующих десяти её членов?



Задача № 10

Числа $\sqrt{7} + 3$ и $\sqrt{2}$ являются четвёртым и седьмым членами геометрической прогрессии. Найдите сумму четвёртого и десятого членов этой прогрессии.

Совет



Формулы арифметической и геометрической прогрессий, используемые для решения, обязательно записывайте и в бланке, и на черновике.

Закончив решение, запишите ответ, перечитав вопрос задания. Если останется время, проверьте ещё раз, что полученные числа образуют арифметическую или геометрическую прогрессии, удовлетворяющие условию задачи.



Спасибо за внимание!

