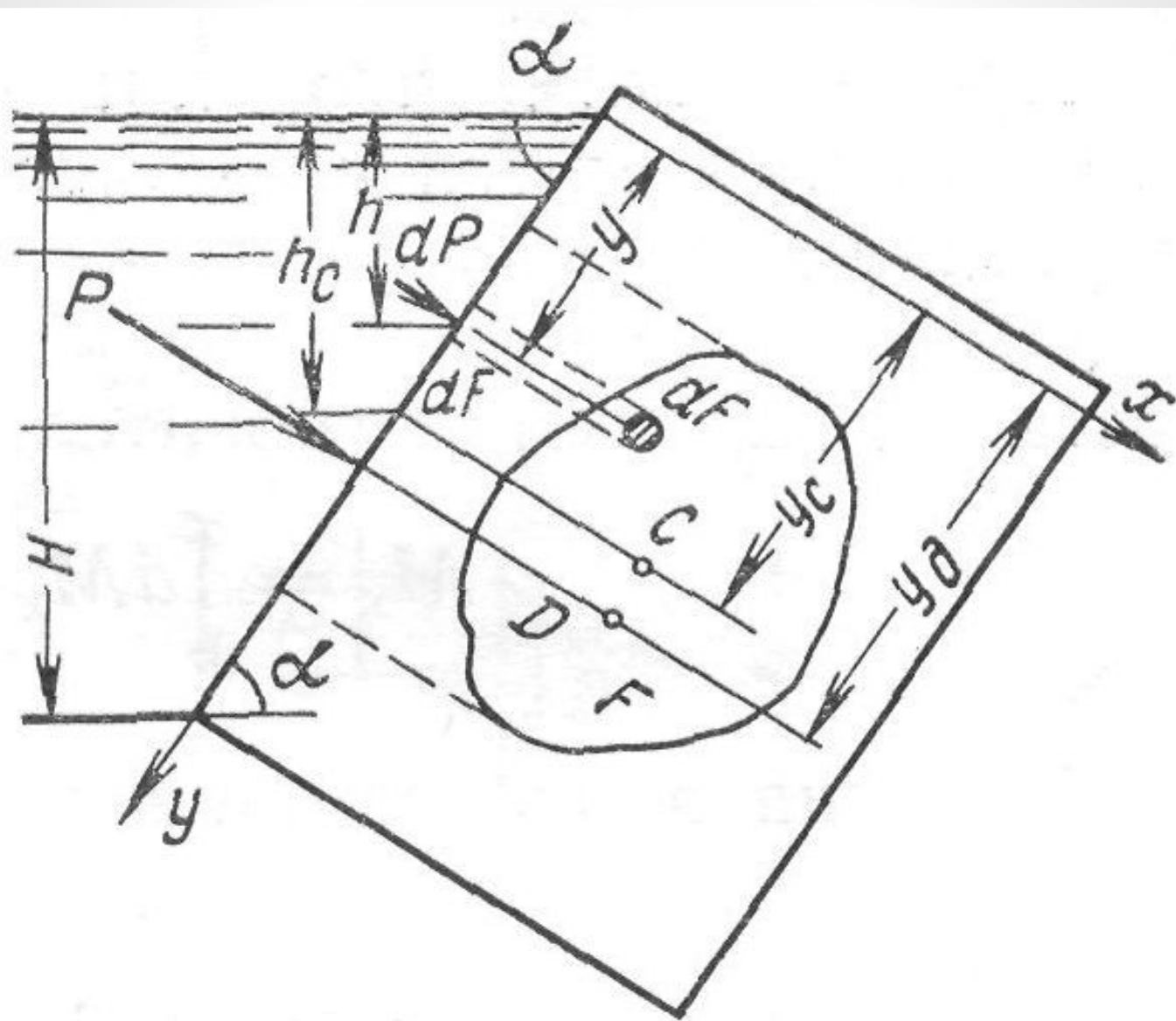


# **Сила давления жидкости на плоские и криволинейные стенки**

**Сила давления жидкости на плоскую  
стенку. Центр давления.**



Выделим на плоской боковой стенке сосуда, наклоненной в общем случае к горизонту под углом  $\alpha$ , произвольную фигуру площадью  $F$  и определим действующую на нее со стороны жидкости силу давления  $P$ .

$$y = \frac{h}{\sin \alpha}$$

Для наглядности совместим рассматриваемую стенку с плоскостью чертежа (т.е. повернем ее на  $90^\circ$  вокруг оси  $y$ ).

Так как давление жидкости в различных по высоте точках площади  $F$  разное, то выделим на этой площади элементарную площадку  $dF$ , находящуюся на расстоянии  $h$  от свободной поверхности жидкости или

от оси  $x$ .

$$p = \rho gh = \rho gy \sin \alpha$$

Для такой бесконечно малой площади давление во всех ее точках одинаково и равно

- \* Следовательно, сила давления жидкости на элементарную площадку будет

$$dP = p dF = \rho g y \sin \alpha dF$$

- \* Сила давления на всю рассматриваемую площадь  $F$

$$P = \int_F dP = \int_F \rho g y \sin \alpha dF = \rho g \sin \alpha \int_F y dF$$

- \* Выражение  $\int_F y dF$

- \* представляет собой статический момент рассматриваемой площади относительно оси  $x$ , который равен произведению площади  $F$  этой фигуры  $F$  на расстояние от ее центра тяжести до оси  $x$ , т.е.

$$P = \rho g \sin \alpha y_c F$$

- \* Таким образом,

$$y_c \sin \alpha = h_c$$

- \* или, заменяя

получим

$$P = \rho g h_c F = p_c F$$

- В ряде случаев, кроме значения силы давления жидкости на стенку, необходимо знать координаты точки ее приложения – центра давления.
- Предположим, что сила давления  $P$  приложена в точке  $D$ , находящейся от оси  $x$  на расстоянии  $y_d$ . В соответствии с теоремой Вариньона о моменте равнодействующей (момент равнодействующей силы относительно какой-либо оси равен сумме моментов составляющих сил относительно той же оси)

$$M_x = \int_F dM_x$$

$$Py_d = \int_F y dP$$

- Заменяя в последнем выражении  $P$  и  $dP$  их значениями, получим

$$\rho g \sin \alpha y_c F y_d = \int_F \rho g y \sin \alpha \cdot dF \cdot y$$

**Вынесем постоянные за знак интеграла и сократим их с аналогичными величинами в левой части уравнения**

$$y_c F y_d = \int_F y^2 dF$$

**Выражение**

$$J_x = \int_F y^2 dF$$

**представляет собой момент инерции площади фигуры относительно оси x, который может быть выражен через момент инерции относительно центральной оси, параллельной оси x, следующим образом**

$$J_x = J_0 + y_c^2 F$$

**Тогда**

$$y_c F y_d = y_c^2 F + J_0$$

**Откуда**

$$y_d = y_c + \frac{J_0}{y_c F}$$

Из последнего уравнения видно, что центр давления для плоской стенки находится всегда ниже ее центра тяжести.

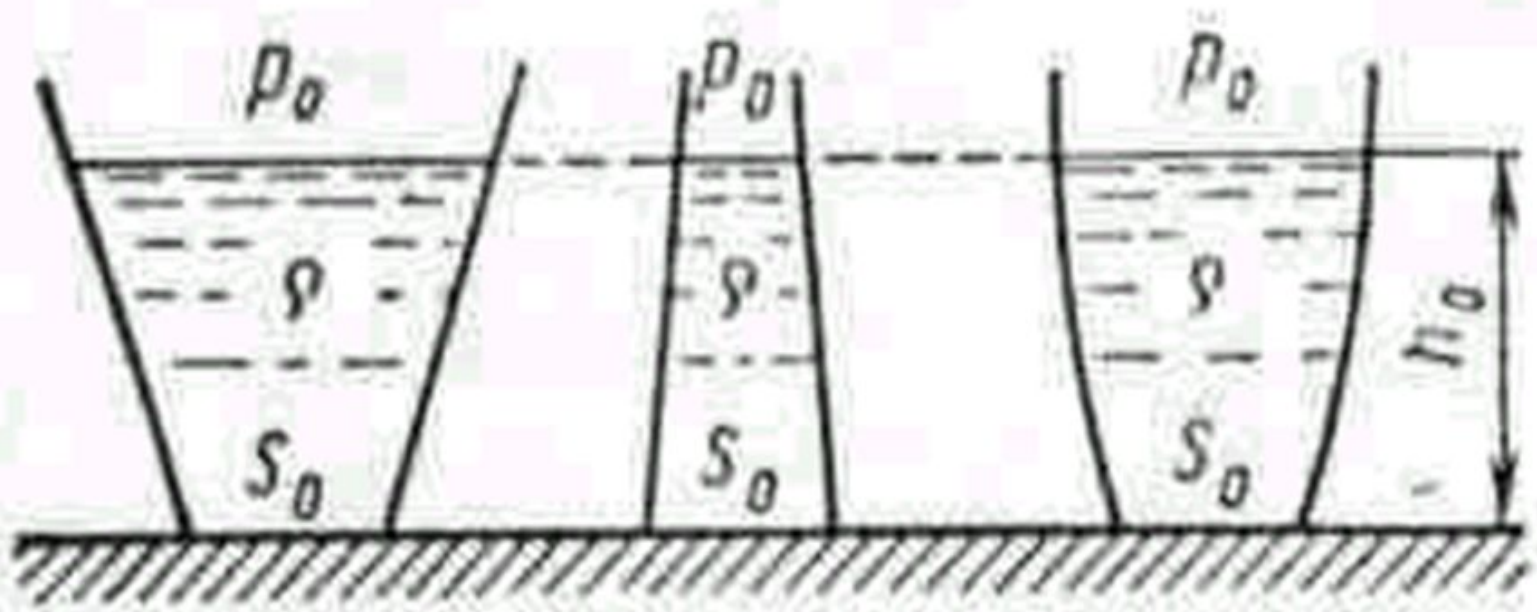
Горизонтальная координата центра давления  $x_d$  находится на оси симметрии площади фигуры. В частном случае, когда  $\alpha = 0$ , т.е. для горизонтального дна сосуда, расстояние от свободной поверхности до центра тяжести площади будет равно высоте жидкости в сосуде  $H$ , поэтому сила давления жидкости на дно сосуда

$$P = \rho g H F$$

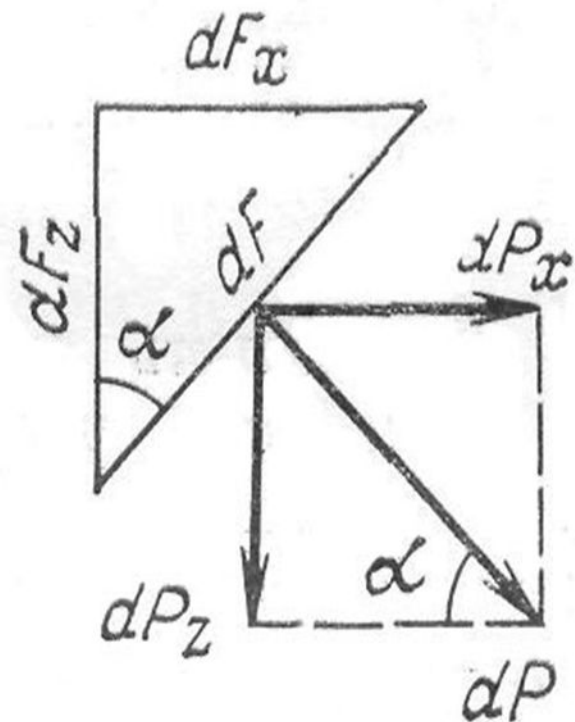
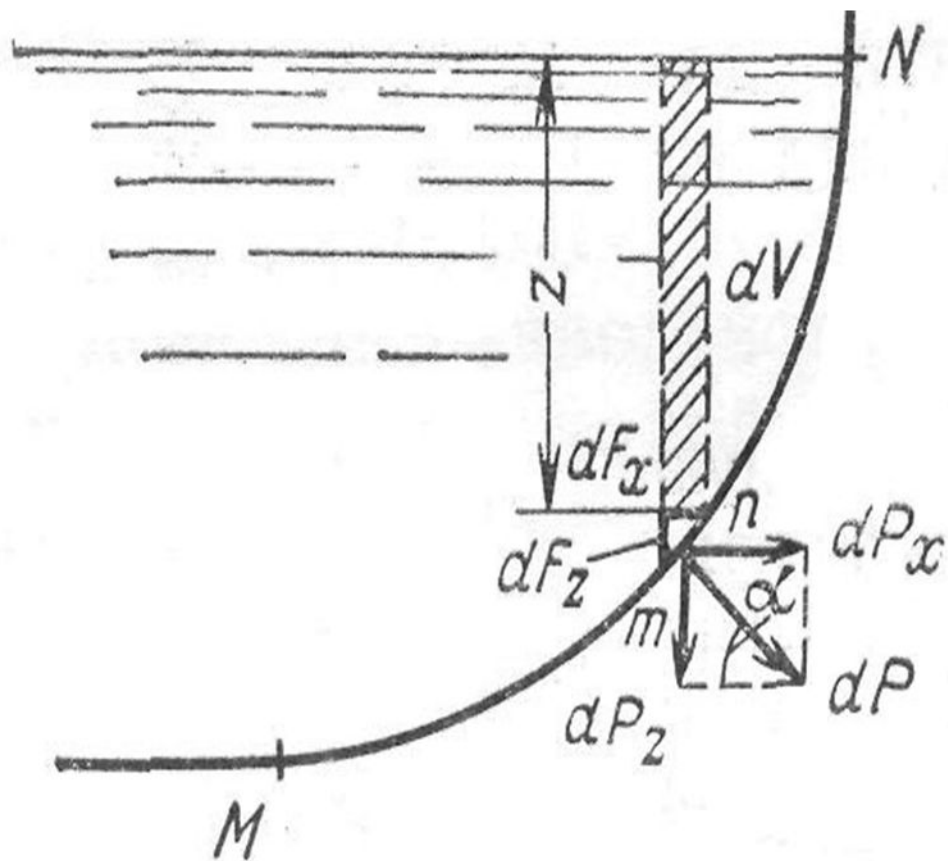
Из этого выражения видно, что различные по форме сосуды, имеющие одинаковые площади доньев и заполненные одинаковой жидкостью на одну и ту же высоту, будут иметь одинаковую силу давления на дно независимо от формы сосуда и количества находящейся в нем жидкости (гидростатический парадокс). Центр давления для дна сосуда совпадает с центром тяжести площади.



# Гидростатический парадокс



# Сила давления жидкости на криволинейную стенку. Тело давления



При криволинейной стенке определить значение, направление и точку приложения силы давления жидкости сложнее, так как элементарные силы давления, действующие нормально на каждую элементарную площадку стенки, имеют разные направления. В этом случае, чтобы избежать интегрирования по криволинейной поверхности, определяют составляющие силы давления по заданным направлениям, по осям координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , а затем находят результирующую силу давления

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}$$

В технике используются в основном сосуды с криволинейными стенками, представляющими собой поверхности вращения (сферу, цилиндр, конус и т.д.) и осями симметрии, лежащими в плоскостях, нормальных к стенкам, что существенно упрощает задачу определения силы давления жидкости.

Определим силу давления жидкости на криволинейную стенку цилиндрической формы, след которой – линия MN.

**Выделим на криволинейной стенке элементарную площадку  $dF$  (след которой -  $mn$ ), находящуюся на расстоянии  $z$  от свободной поверхности.**

**Сила давления жидкости на эту элементарную площадку**

$$dP = p dF = \rho g z dF$$

**Разложим на две составляющие взаимноперпендикулярные:**

**– горизонтальную**

$$dP_x = dP \cos \alpha$$

**- вертикальную**

$$dP_z = dP \sin \alpha$$

**Просуммируем отдельно все горизонтальные и вертикальные составляющие. Так как размеры элементарной площадки несоизмеримо малы, предположим, что она – плоская. Тогда проекции ее на горизонтальную и вертикальную плоскости:**

$$dF_x = dF \sin \alpha$$

$$dF_z = dF \cos \alpha$$

$$dP_x = dP \cos \alpha = \rho g z dF \cos \alpha = \rho g z dF_z$$

$$P_x = \int_{F_z} dP_x = \int_{F_z} \rho g z dF_z = \rho g \int_{F_z} z dF_z$$

$$\int_{F_z} z dF_z = S_z = h_c F_z$$

Тогда 
$$P_x = \rho g h_c F_z$$

Таким образом, горизонтальная составляющая силы давления жидкости на криволинейную стенку равна силе давления жидкости на ее вертикальную проекцию.

Вертикальную составляющую силы давления жидкости на криволинейную  $P_z$ , которая представляет собой сумму всех элементарных вертикальных составляющих  $dP_z$ .

$$dP_z = dP \sin \alpha = \rho g z dF \sin \alpha = \rho g z dF_x = \rho g dV$$

-  $dV = z dF_x$

элементарный объем жидкости, основанием которого является площадка  $dF_x$ , а высотой – расстояние  $z$  от этой площадки до свободной поверхности жидкости. Интегрируя  $dP_z$  по всему объему  $V$ , получим

$$P_z = \int_v dP_z = \int_v \rho g dV = \rho g \int_v dV$$

или

$$P_z = \rho g V$$

Таким образом, вертикальная составляющая силы давления жидкости на криволинейную стенку равна силе тяжести жидкости в объеме  $V$ , называемом телом давления.

Результирующая сила давления жидкости на криволинейную стенку цилиндрической формы равна геометрической сумме составляющих

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2}$$

и направлена под углом  $\alpha$  к горизонту

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{P_z}{P_x} = \operatorname{arcsin} \frac{P_z}{P}$$

Тело давления – это объем жидкости, ограниченный рассматриваемой криволинейной стенкой, смоченной жидкостью, а также вертикальной цилиндрической поверхностью, проведенной через контур этой стенки, и горизонтальной плоскостью, проведенной по свободной поверхности жидкости.

Тело давления условно считается реальным, если его объем, прилегающий к стенке, заполнен жидкостью; составляющая  $P_z$  при этом направлена вниз. Тело давления условно считается фиктивным, если его объем, прилегающий к стенке, не заполнен жидкостью; составляющая  $P_z$  при этом направлена вверх.



# УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

## Основная литература

1. Башта Т.М. и др. Гидравлика, гидравлические машины и гидравлические приводы. - М: Машиностроение, 1991.
2. Б.Т. Емцев «Техническая гидромеханика» - М.: Машиностроение, 1997. - 460с.
3. В.Г. Гейер, В.С. Дулин и др. «Гидравлика и гидропривод» - М.: Недра, 1981. - 301с.
4. Б.Е. Калмухамбетов «Гидромеханика» (электронный учебник) - Алматы.: КазНТУ, 2002. - 116 с.
5. Калмухамбетов Б.Е., Муратова С.К. Общая гидравлика: Конспект лекций. - Алматы: НИЦ КОУ, 2008. - 56.

## Дополнительная литература

6. Б.Б. Некрасов (под редакции) «Задачник по гидравлике, гидромашинам и гидроприводам» - М.: Высш. шк., 1998. - 245с.
7. Калмухамбетов Б.Е. Гидромеханика в бурении: Методические указания к практическим занятиям. - Алматы: НИЦ КОУ, 2008. - 40с.
8. Калмухамбетов Б.Е., Муратова С.К. Общая гидравлика: Методические указания к практическим занятиям. - Алматы: НИЦ КОУ, 2008. - 36.