


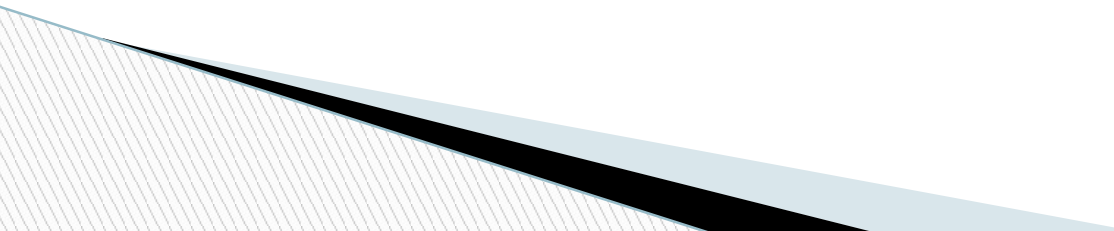
Различные способы решения задач на многогранники в рамках подготовки учащихся к ЕГЭ по математике

Мастер-класс учителя математики высшей категории
МОУ Гимназии № 1 г. Новоалександровска
Новиковой Н.Н.

Основные задачи на многогранники:

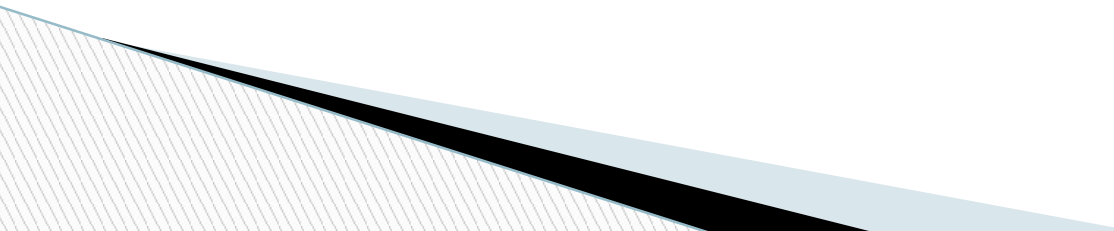
- расстояние между двумя точками;
 - расстояние от точки до прямой;
 - расстояние от точки до плоскости;
 - расстояние от прямой, параллельной данной плоскости, до этой плоскости;
 - расстояние между скрещивающимися прямыми;
 - угол между пересекающимися прямыми;
 - угол между скрещивающимися прямыми;
 - угол между прямой и плоскостью;
 - угол между двумя плоскостями.
- 

Основные методы решения:

- поэтапно-вычислительный метод;
 - координатный метод;
 - координатно – векторный метод;
 - метод объемов;
 - метод ключевых задач;
 - векторный метод.
- 

Вычисление расстояния от точки до плоскости

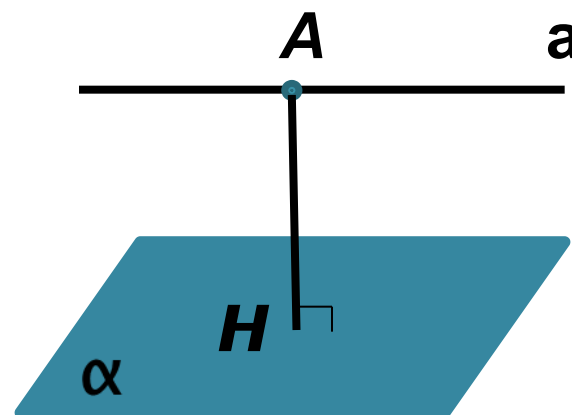
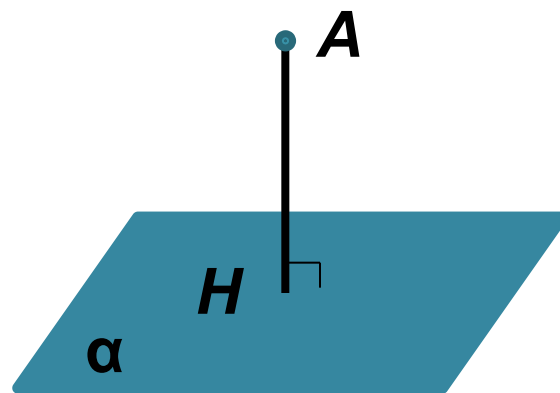
Способы решения задачи:

- поэтапно-вычислительный способ;
 - метод объемов;
 - координатный метод.
- 

Основные понятия и определения

Расстояние от точки до плоскости, не содержащей эту точку, есть длина отрезка перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.

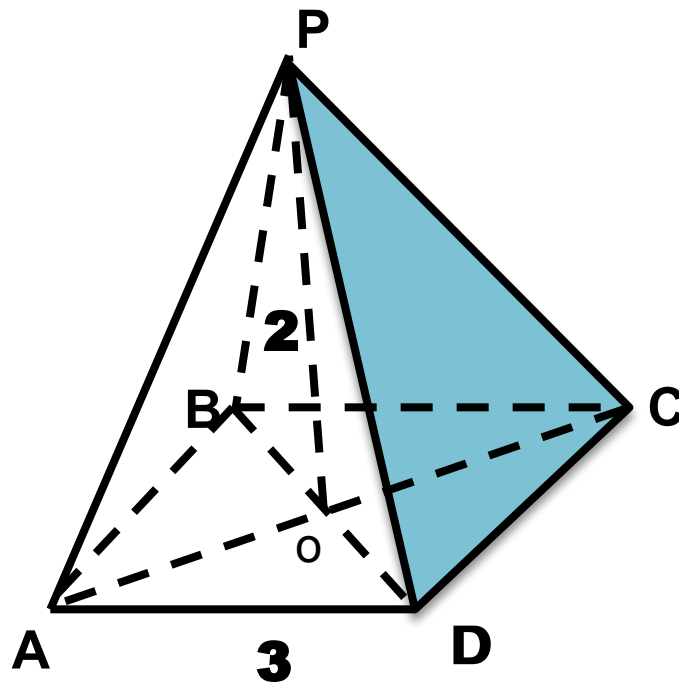
Расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью равно расстоянию от любой точки этой прямой до плоскости.



Задача № 1.

Вычисление расстояния от точки до плоскости

№ 1. В правильной четырехугольной пирамиде $ABCDP$ с вершиной P сторона основания равна 3 , а высота 2 . Найдите расстояние от вершины A до плоскости PCD .



Поэтапно - вычислительный метод:

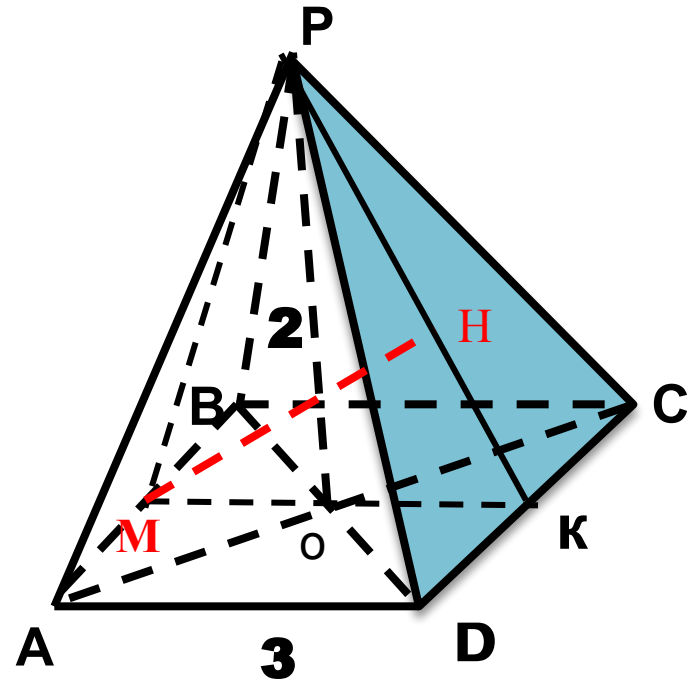
$AB \parallel DC, AB \parallel (PCD),$

$p(A, (PCD)) =$

$p(AB, (PCD)) =$

$p(M, (PCD)) = MH$

(MH - высота $\triangle MKP$)



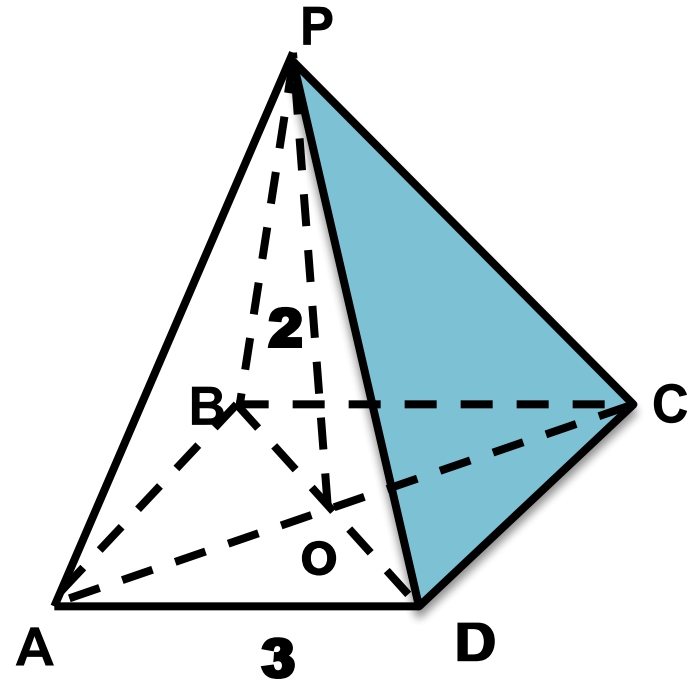
Преимущества метода

- наглядность и очевидность
- простота вычислений

Недостатки метода

- требует развитого пространственного мышления и уверенного владения теоретическим материалом

Метод объемов:



Метод объемов:

Пусть AH – искомое расстояние от A до (PCD) .

Рассмотрим пирамиду $ADCP$,

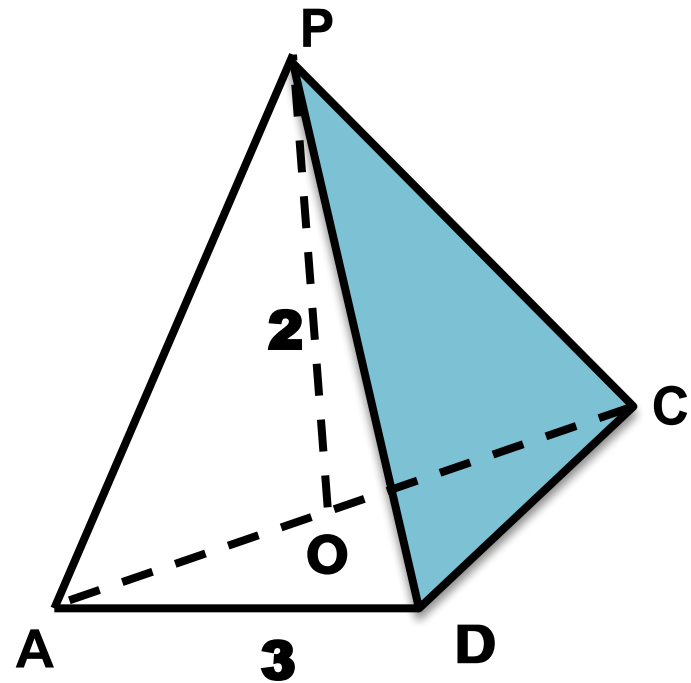
AH – ее высота.

$$V = \frac{1}{3} S_{ADC} * PO,$$

$$V = \frac{1}{3} S_{PDC} * AH,$$

$$S_{ADC} * PO = S_{PDC} * AH,$$

$$AH = \frac{S_{ADC} * PO}{S_{PDC}}.$$



Преимущества метода

- наглядность и очевидность
- простота вычислений

Недостатки метода

- требует развитого пространственного мышления (умение мысленно вычленять нужный объект)
- ограниченность применения

Координатный метод:

1. Найти координаты точек A, P, C, D .

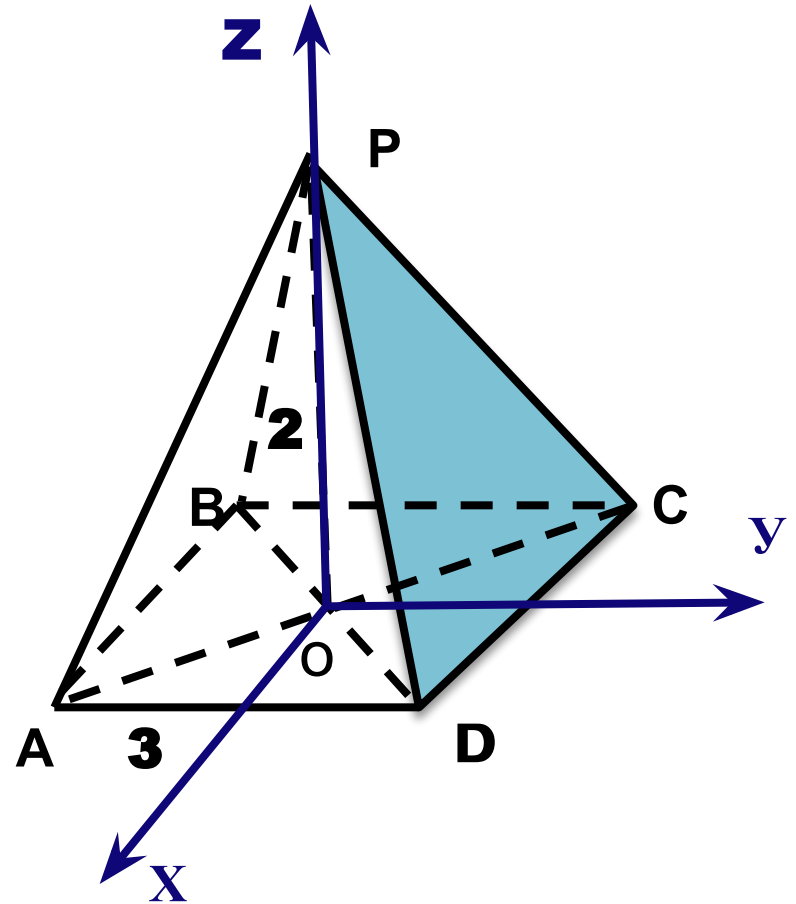
2. Составить уравнение плоскости
(PCD): $ax+by+cz+d=0$.

3. Найти расстояние от точки

$A(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости (PCD)

по формуле:

$$\rho = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$



Преимущества метода

- работа по алгоритму
- удобно ввести прямоугольную систему координат

Недостатки метода

- решение системы из трех уравнений с четырьмя переменными
- трудно запоминающаяся формула

Вычисление угла между плоскостями

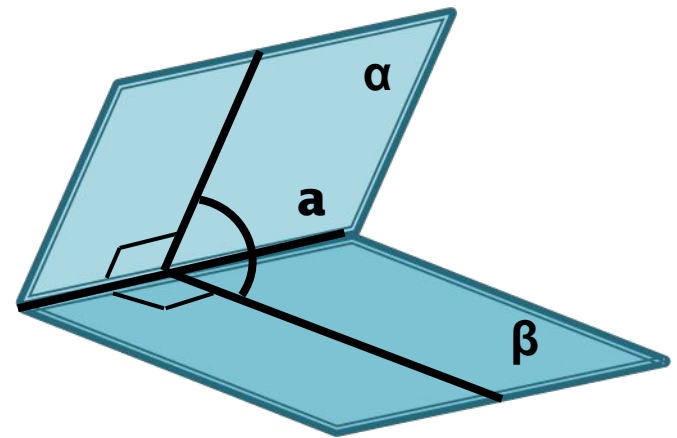
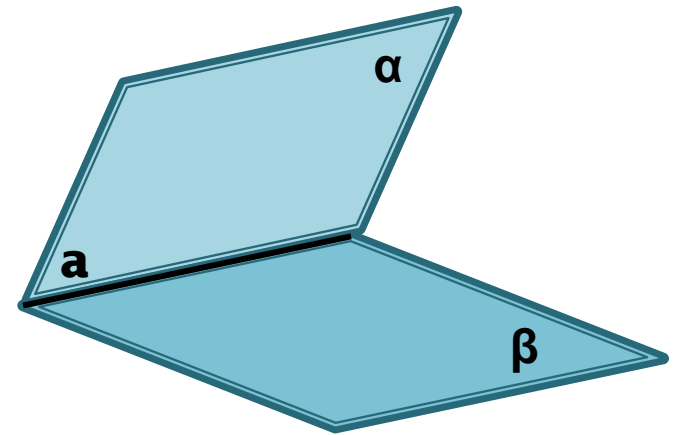
Способы решения задачи:

- поэтапно-вычислительный способ;
- координатный метод.

Основные понятия и определения

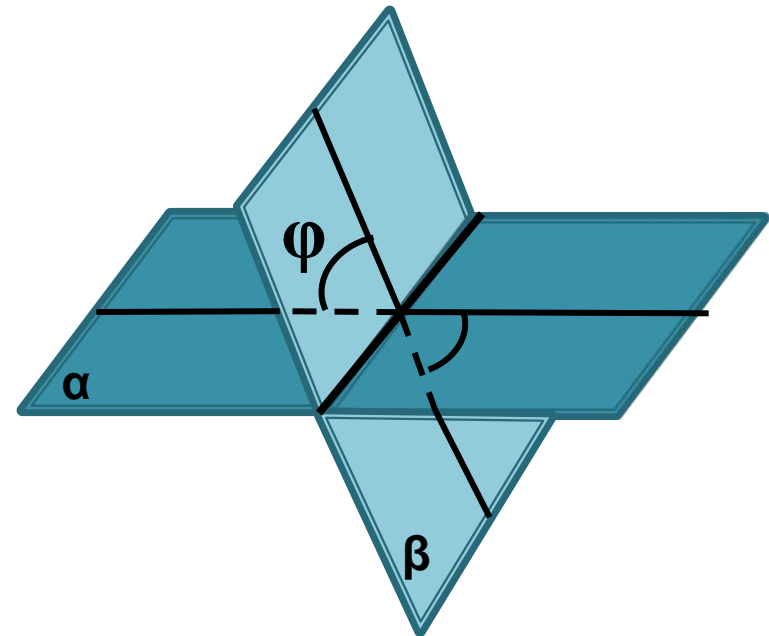
Двугранным углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей границей, не принадлежащими одной плоскости.

Градусной мерой двугранного является градусная мера его линейного угла.



Основные понятия и определения

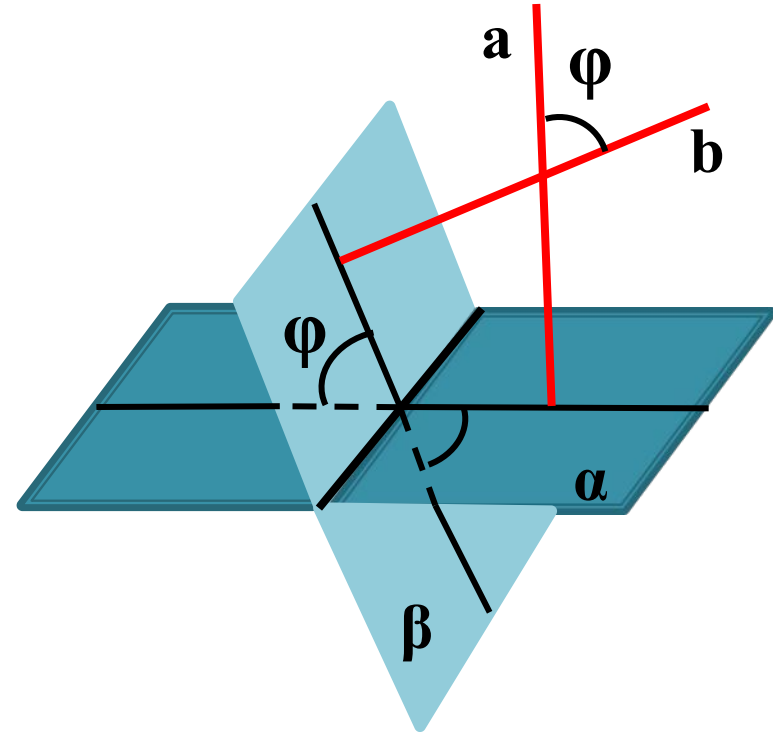
Две пересекающиеся плоскости образуют четыре двугранных угла. Углом между этими плоскостями называется двугранный угол, не превосходящий остальные двугранные углы.



Основные понятия и определения

Угол между двумя плоскостями α и β можно найти, как угол:

- между плоскостями, параллельными данным плоскостям α и β ;
- между перпендикулярами a и b к данным плоскостям.



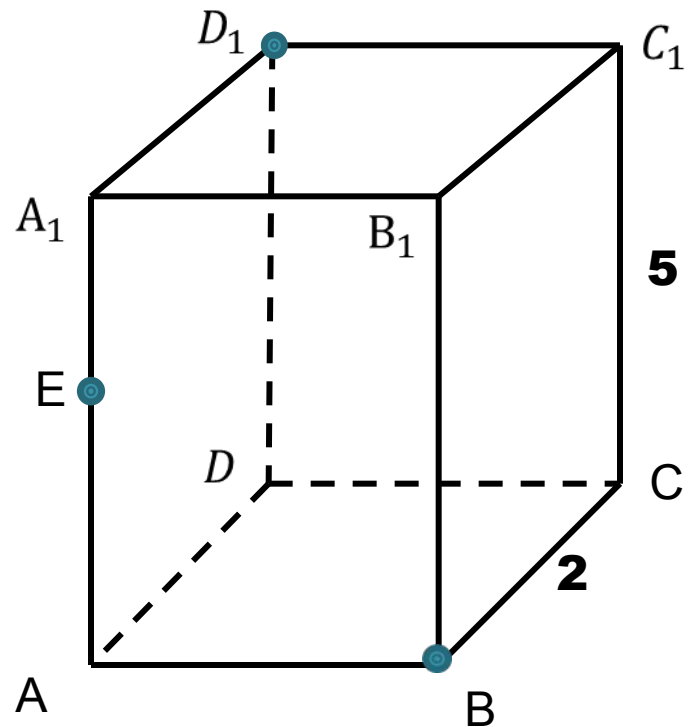
Задача № 2.

Вычисление угла между плоскостями

№2. В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ стороны основания равны 2, а боковые ребра равны 5.

На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE:EA_1=3:2$.

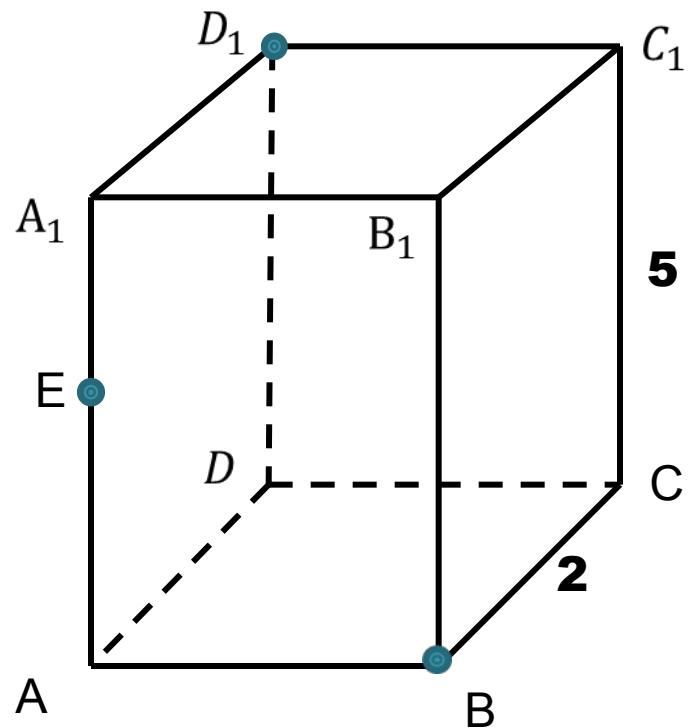
Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1 .



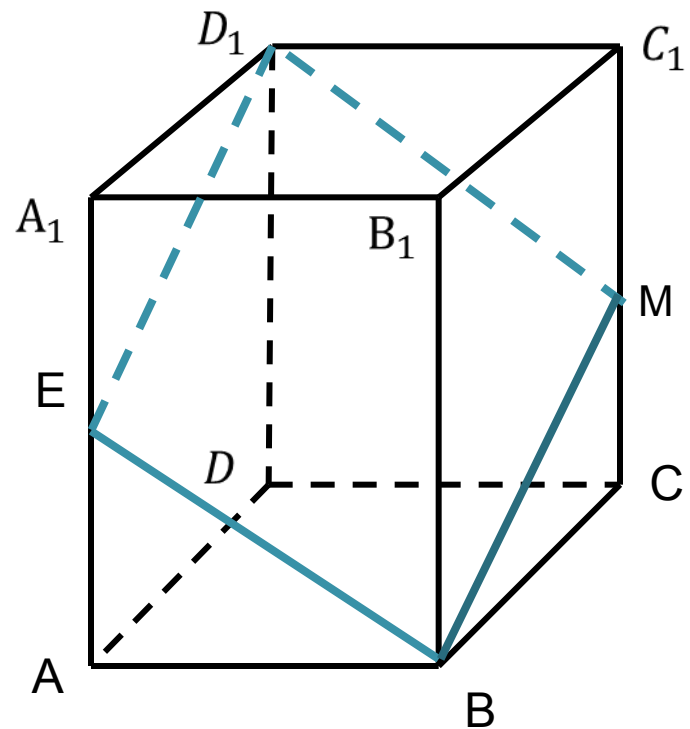
Поэтапно – вычислительный метод:

Двугранный угол?

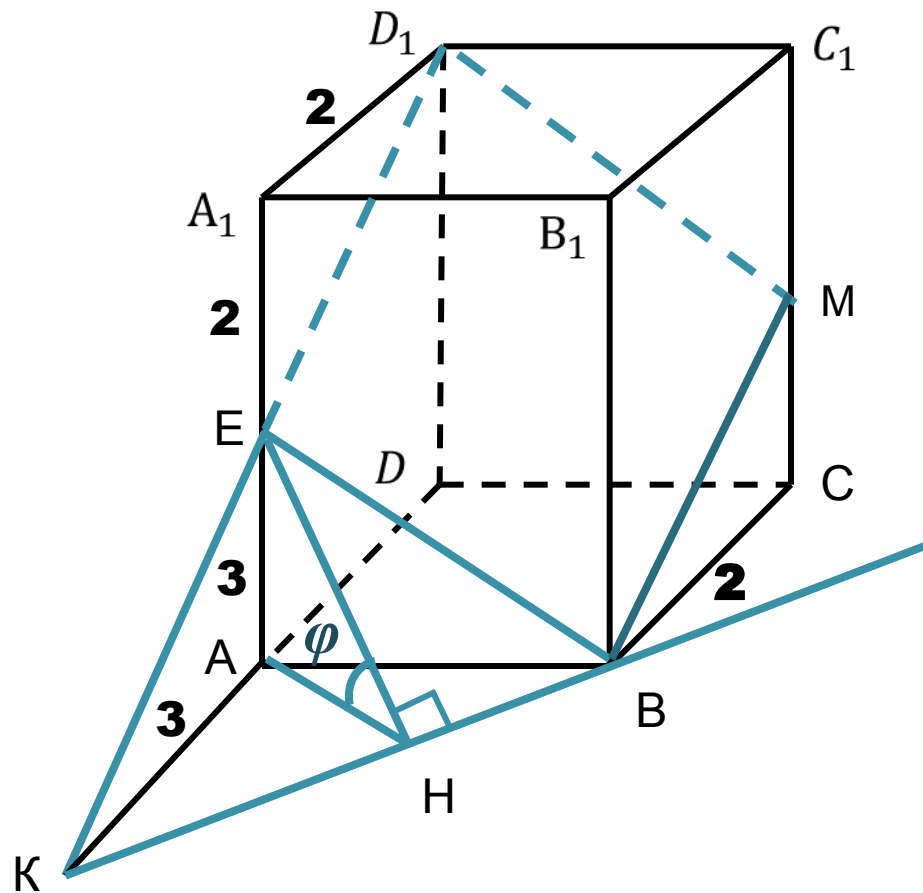
Линейный угол
двугранного угла?



Поэтапно – вычислительный метод:



Поэтапно – вычислительный метод:



Поэтапно – вычислительный метод:

К – точка пересечения прямой ED_1 с плоскостью (ABC) .

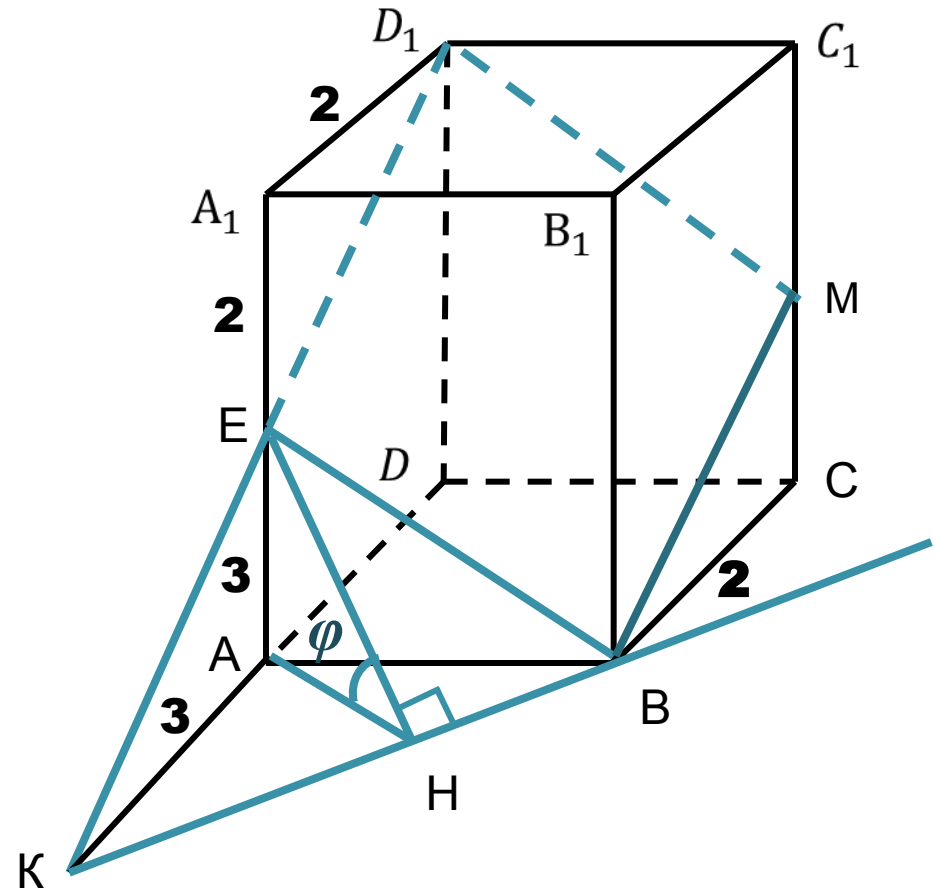
$\angle EHA$ – линейный угол двугранного угла $EKBA$.

$$S_{AKB} = \frac{1}{2} KA * AB = \frac{1}{2} KB * AH,$$

$$KA * AB = KB * AH,$$

$$AH = \frac{KA * AB}{KB}.$$

$$\text{В } \triangle EAH \quad \text{tg } \varphi = \frac{EA}{AH}.$$



Преимущества метода

- несложные математические расчеты
- известные математические формулы

Недостатки метода

- нестандартность ситуации
- требует развитого пространственного мышления и уверенного владения теоретическим материалом

Координатный метод:

1. Найти координаты точек B , E , D_1 .

2. Составить уравнение плоскости

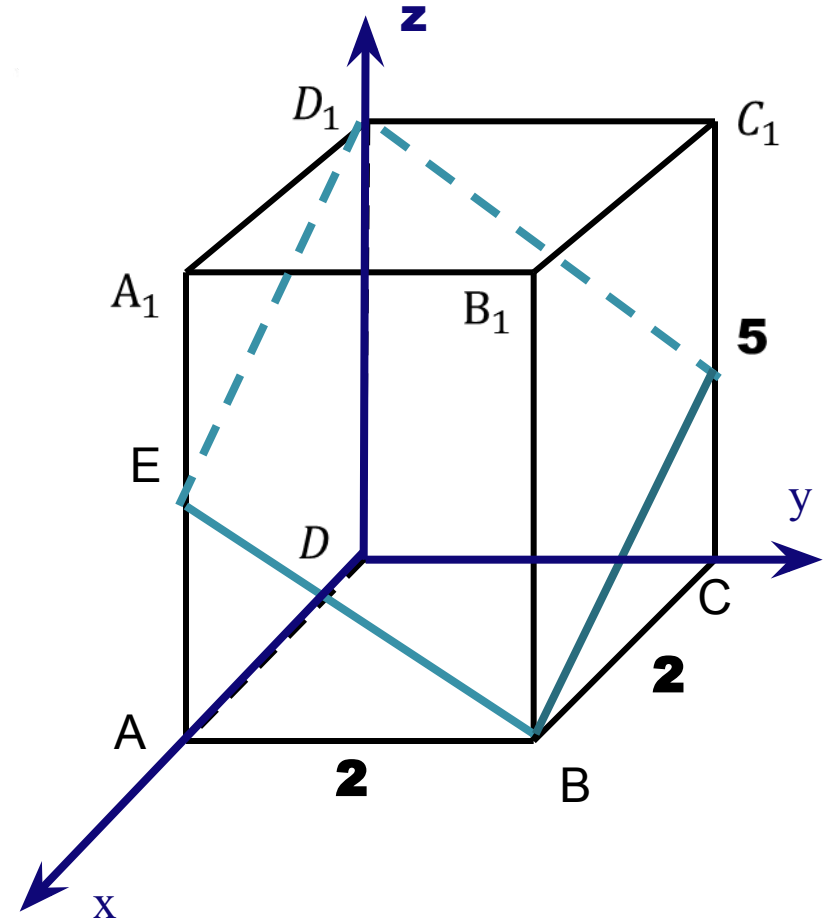
(BED_1) : $ax+by+cz+d=0$.

3. $\angle(ABC), (BED_1) = \angle \vec{AE}, \vec{n}$,

где векторы \vec{AE} и \vec{n} - векторы нормали к данным плоскостям.

$\cos \angle(ABC), (BED_1) = |\cos \angle \vec{AE}, \vec{n}| =$

$$= \frac{|x_1 * x_2 + y_1 * y_2 + z_1 * z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} * \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$



Преимущества метода

- работа по алгоритму
- удобно ввести прямоугольную систему координат
- не требуется проводить дополнительные построения

Недостатки метода

- решение системы уравнений с тремя неизвестными
- в формуле возможна ошибка с выбором тригонометрической функции

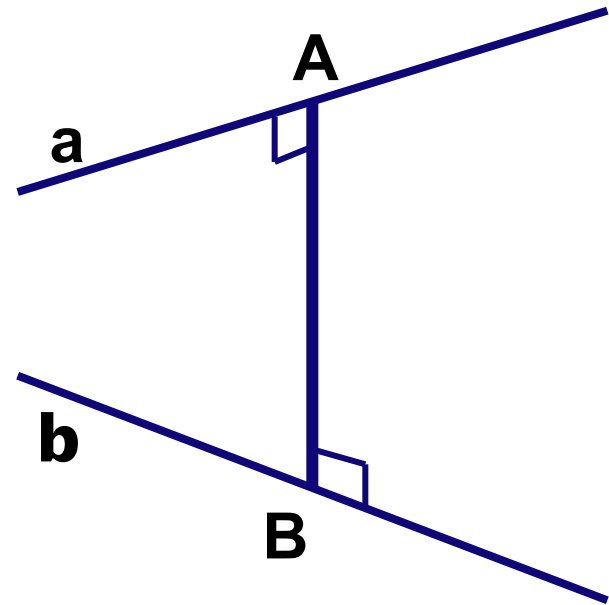
Вычисление расстояния между скрещивающимися прямыми

Способы решения задачи:

- поэтапно-вычислительный метод;
- метод проекций.

Основные понятия и определения

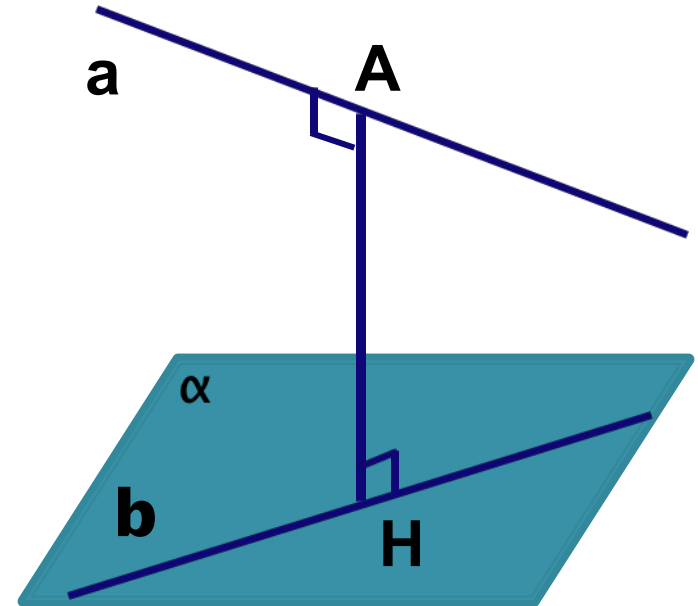
Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно длине их общего перпендикуляра.



Основные понятия и определения

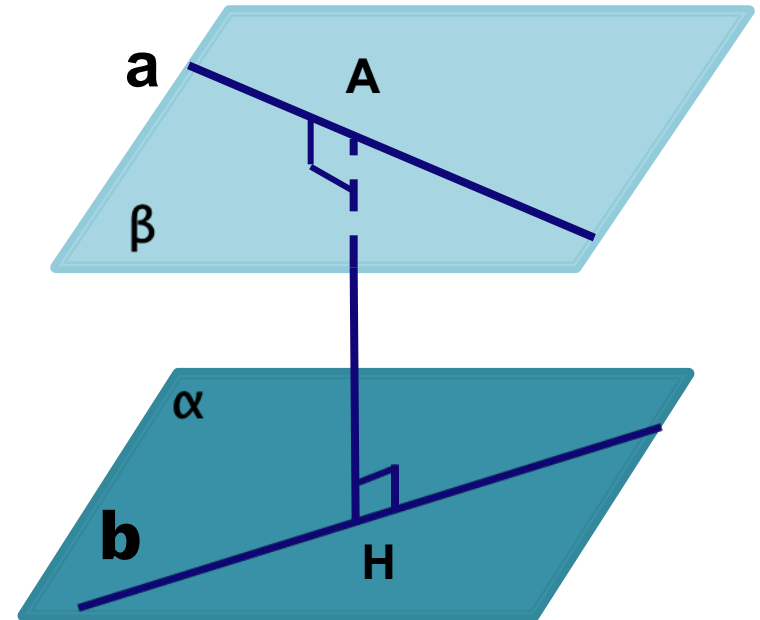
Для вычисления расстояния между двумя скрещивающимися прямыми можно:

- построить плоскость, содержащую одну из прямых и параллельную второй, искомое расстояние равно расстоянию от какой-нибудь точки второй прямой до построенной плоскости;



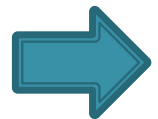
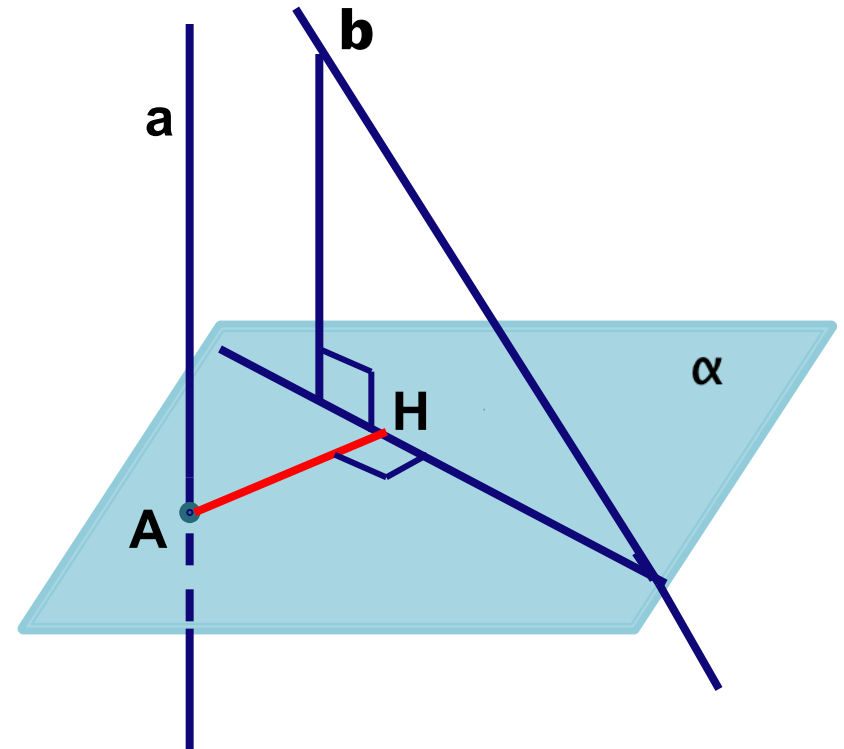
Основные понятия и определения

- заключить данные прямые в параллельные плоскости, проходящие через данные скрещивающиеся прямые, и найти расстояние между этими плоскостями;



Основные понятия и определения

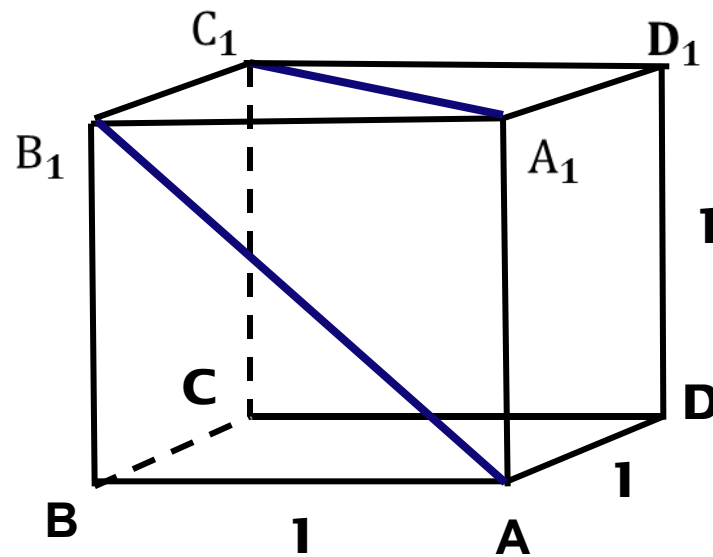
- построить плоскость, перпендикулярную одной из двух прямых, и построить проекцию второй прямой на эту плоскость, искомое расстояние – есть расстояние между проекциями этих прямых на построенную плоскость (метод проекций) .



Задача № 3.

Вычисление расстояния между скрещивающимися прямыми

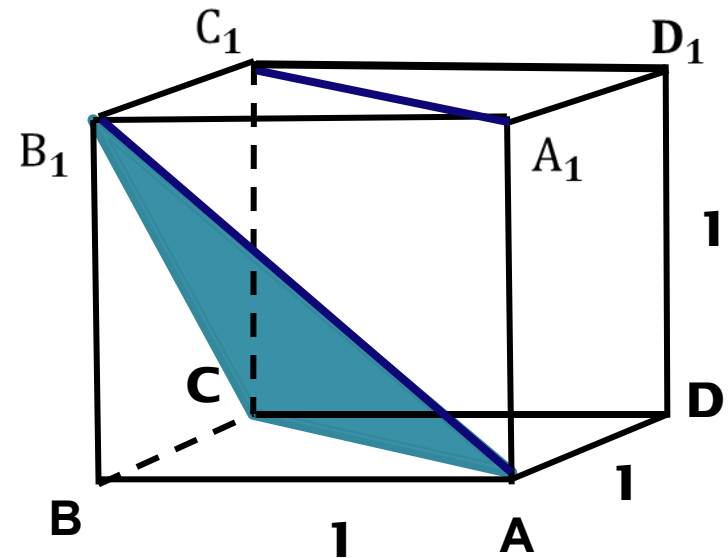
№ 3. В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите расстояние между прямыми AB_1 и $A_1 C_1$.



Поэтапно – вычислительный метод:

$$\begin{aligned} AC &\parallel A_1C_1, \\ A_1C_1 &\parallel (AB_1C), \\ \rho(A_1C_1, AB_1) &= \\ &= \rho(A_1C_1, (AB_1C)) = \\ &= \rho(C_1, (AB_1C)). \end{aligned}$$

Далее координатный
метод или метод
объемов.





Преимущества метода

- наглядность
- простота дополнительных построений



Недостатки метода

- требует определенных навыков и владения теоретическим материалом

Метод проекций:

$(B_1BD) \perp A_1C_1$,

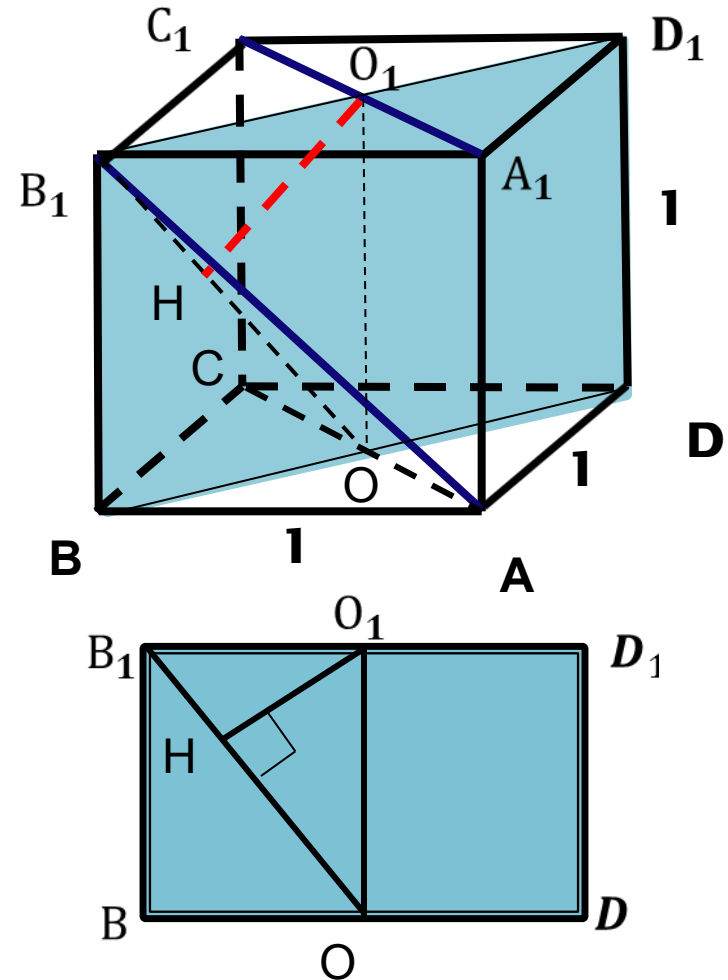
B_1O – проекция прямой B_1A на плоскость (B_1BD) .

$\rho(AB_1; A_1C_1) =$

$\rho(O_1; OB_1) = O_1H$.

O_1H – высота прямоугольного треугольника B_1O_1O ,

$$O_1H = \frac{B_1O_1 \cdot OO_1}{B_1O}$$





Преимущества метода

- простые вычисления
- возможность применить в более сложной ситуации



Недостатки метода

- сложные дополнительные построения
- требует пространственного мышления

Порешаем?

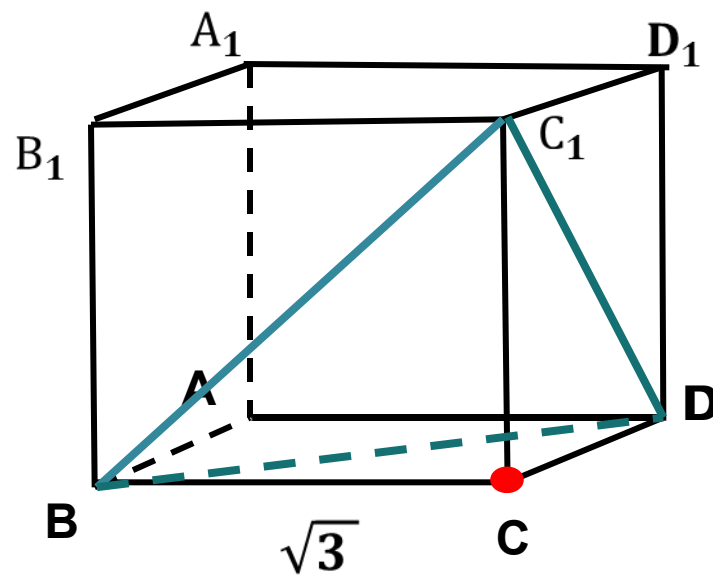


Порешаем?

*№ 4. Ребро куба
 $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$*

равно $\sqrt{3}$.

*Найдите
расстояние от
вершины C до
плоскости (BDC_1) .*



Используемые материалы:

- Учебник Геометрия 10-11 класс, Л.С.Атанасян, Просвещение, М, 2010 г;
- Математика, ЕГЭ 2013 , Многогранники, типы задач и методы их решения, Корянов А.Г., Прокофьев А.А.;
- Математика, ЕГЭ 2013, типовые тестовые задания, Семенов А.Л., Ященко И.В. Экзамен, М, 2013 г;
- Alexlarin.net 2013.

**Спасибо за
сотрудничес
тво!**





**Коллеги, желаю Вам успехов
и достижений !**