

# ПРЕЗЕНТАЦИЯ ПО ГЕОМЕТРИИ

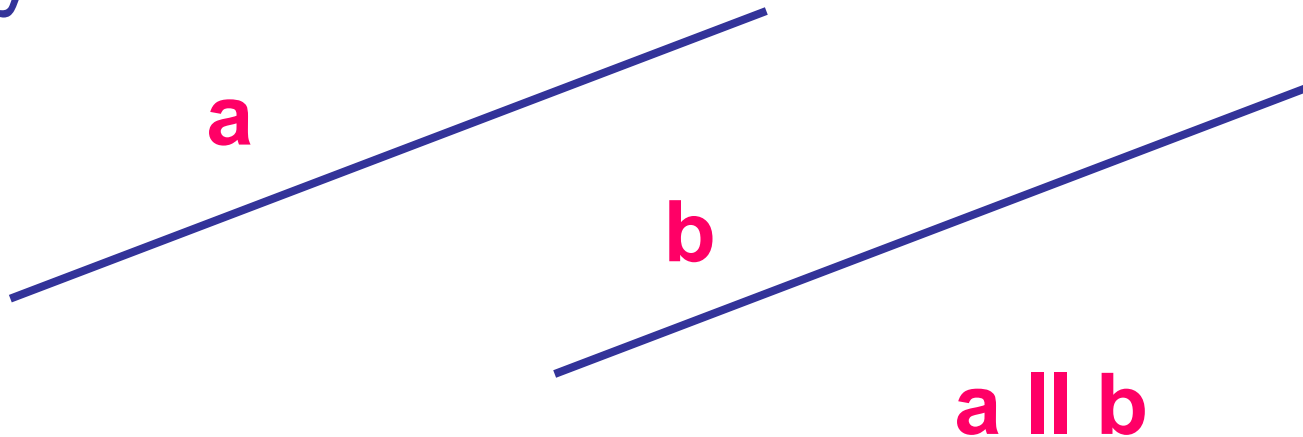
ТЕМА:

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ И  
ПЛОСКОСТЕЙ. (10 класс)

# Определение

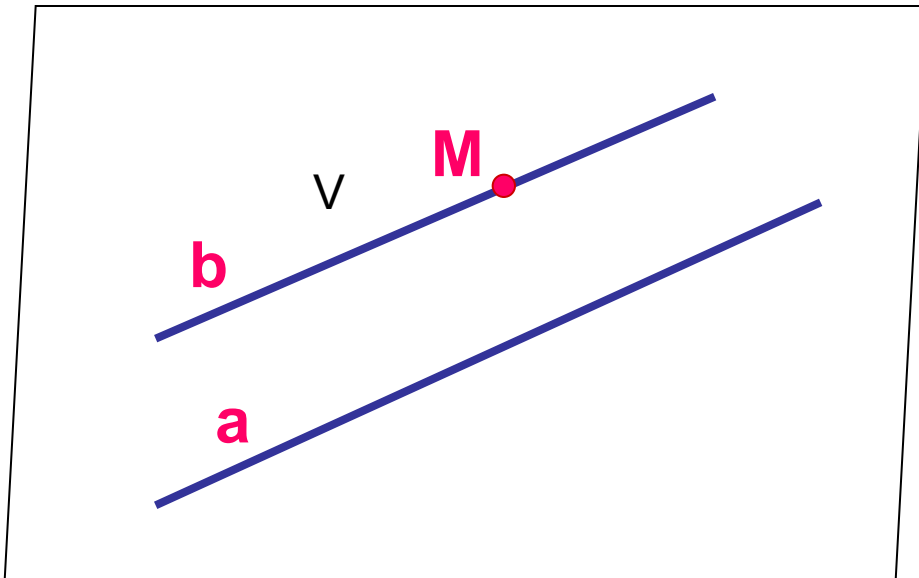
Две прямые в пространстве называются параллельными, если они не пересекаются и лежат в одной плоскости.

Значит, через две параллельные прямые можно провести плоскость и только одну.



# Теорема

Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, можно провести прямую, параллельную данной, и только одну.



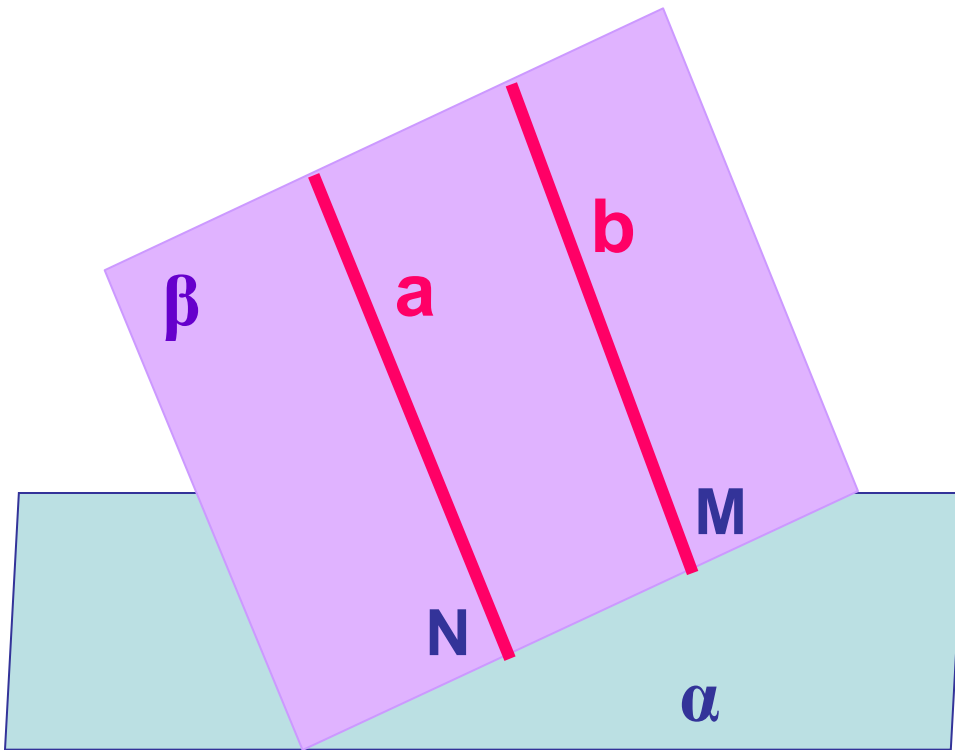
Дано:  $a$ ,  
 $M$  не принадлежит  $a$

Доказать:

1. через прямую  $a$  можно провести прямую  $b \parallel a$ .
2. прямая  $b$  -единственная

# Лемма

Дано:  $a \parallel b$ ,  $a \cap \alpha$   
Доказать:  $b \cap \alpha$



**Если одна из параллельных прямых пересекает плоскость, то и вторая прямая пересекает эту плоскость.**

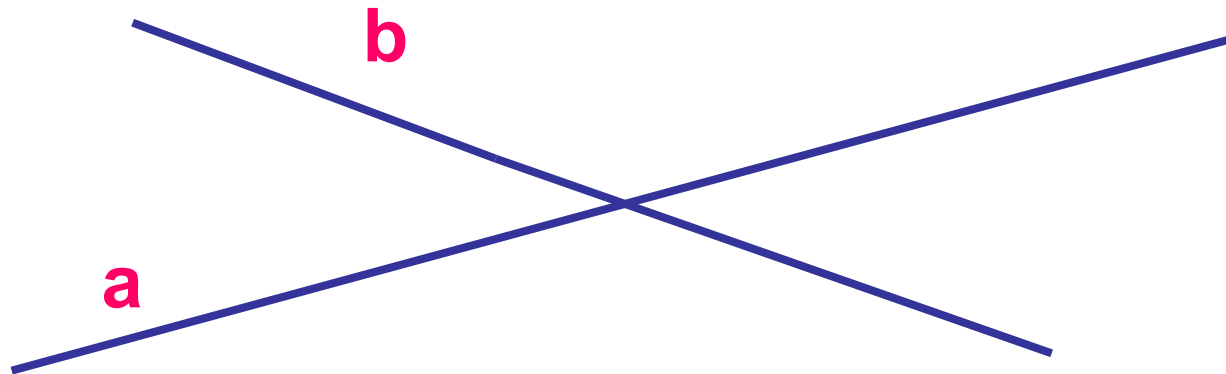
## **ПРИЗНАК ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПРЯМЫХ**

**Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны между собой.**

# СКРЕЩИВАЮЩИЕСЯ ПРЯМЫЕ

1. Определение
2. Признак
3. Свойство

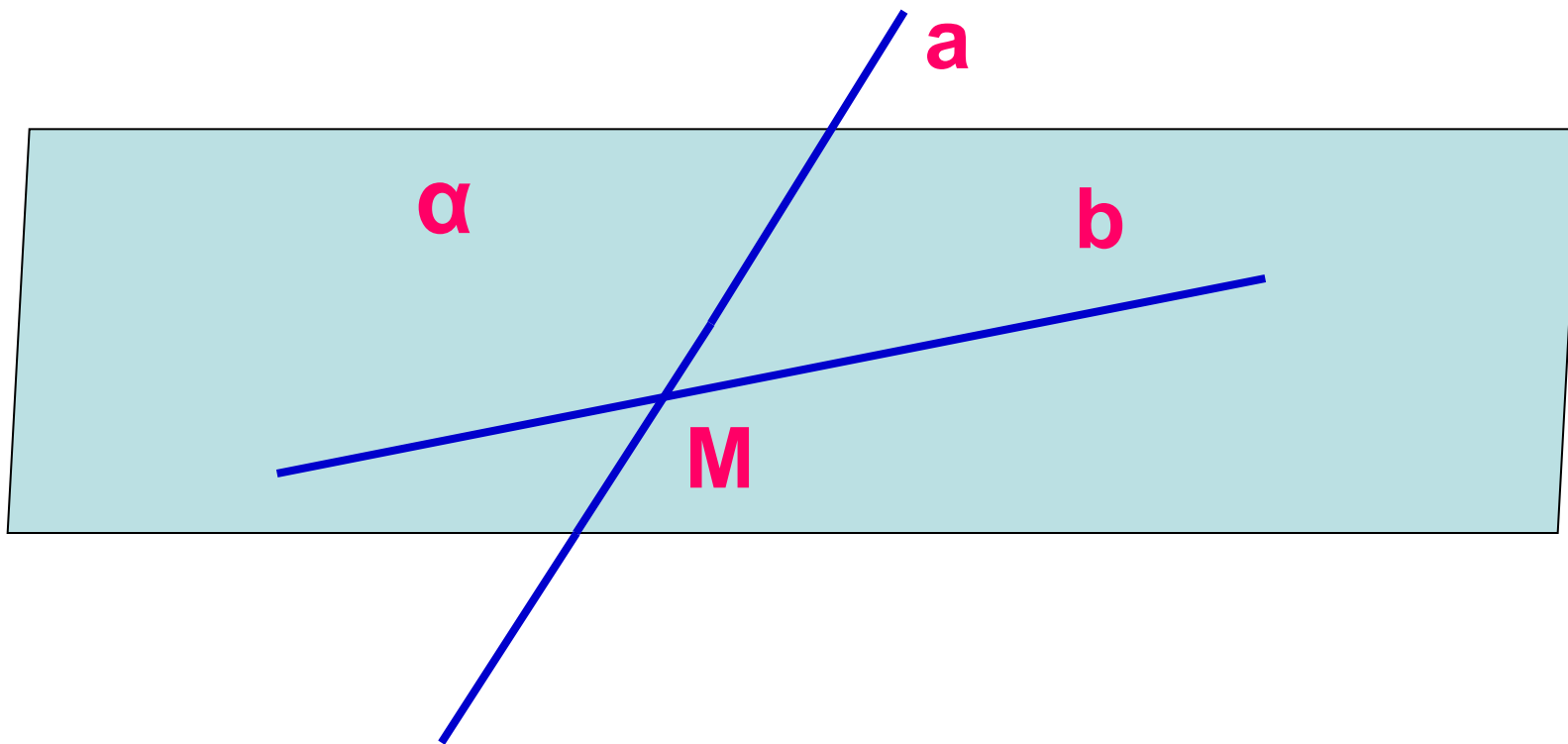
1.



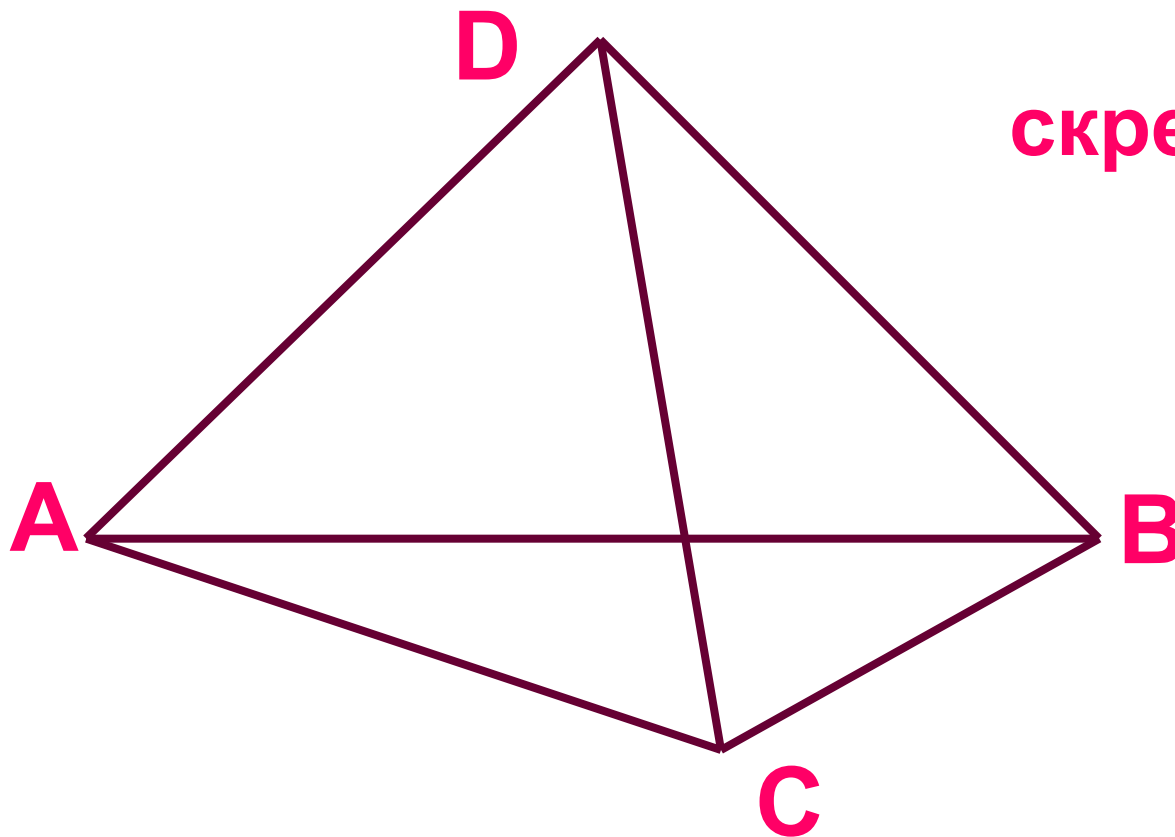
Две прямые называются скрещивающимися, если они не пересекаются и лежат в разных плоскостях.

# Признак скрещивающихся прямых

Если  $b \in \alpha$ ,  $a \cap \alpha = M$ ,  $M \notin b$ ,  
то прямые  $a$  и  $b$  скрещиваются.



Если одна прямая лежит в плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то прямые скрещиваются.

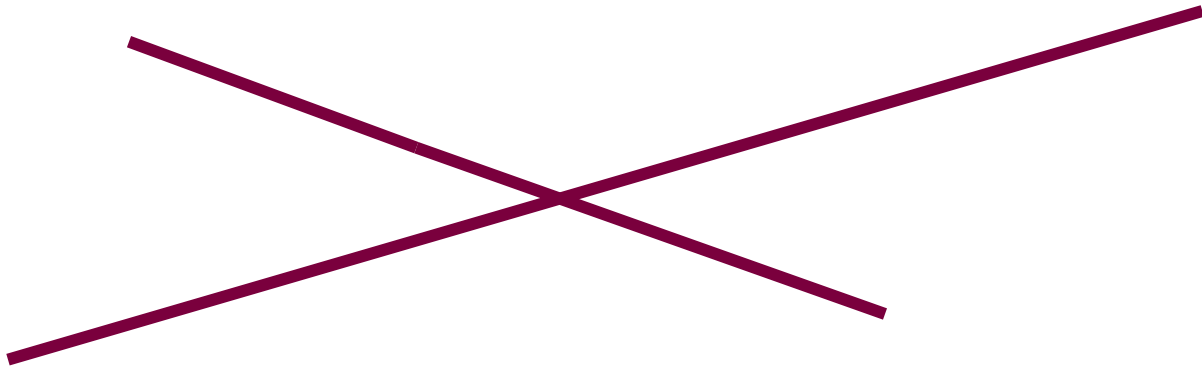


**Найти  
скрещивающиеся  
прямые**

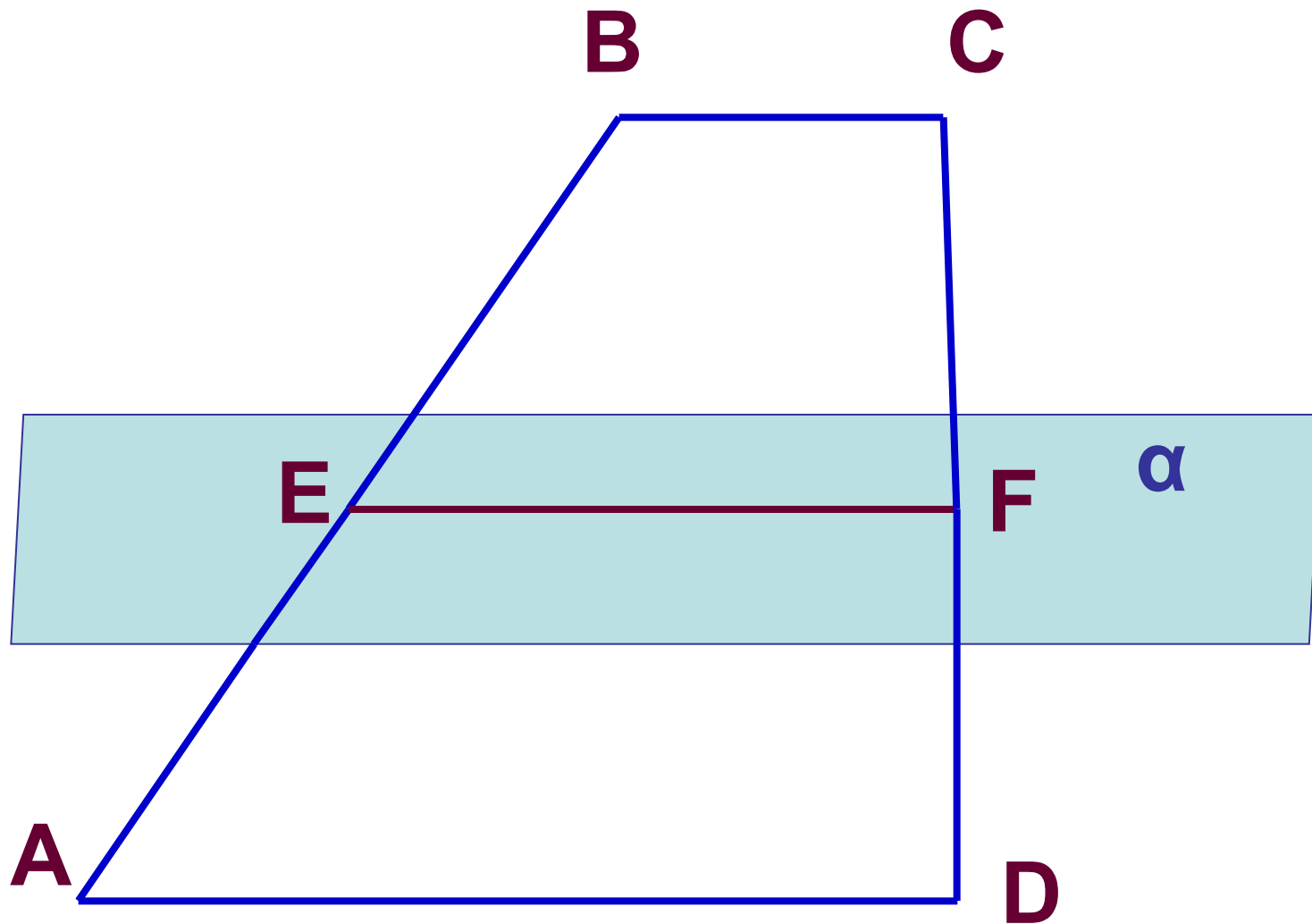


# Свойство скрещивающихся прямых

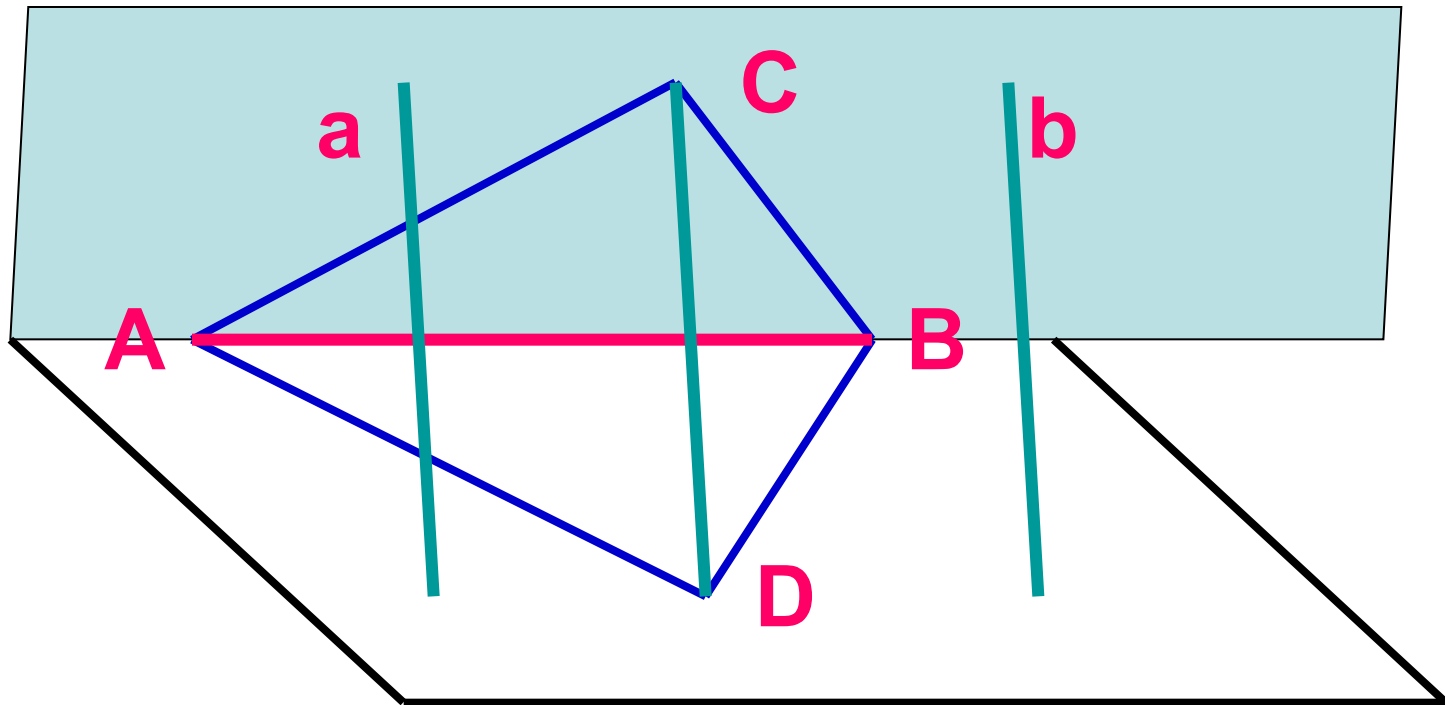
Через каждую из скрещивающихся  
прямых можно провести плоскость,  
параллельную другой прямой.



# Задача № 20



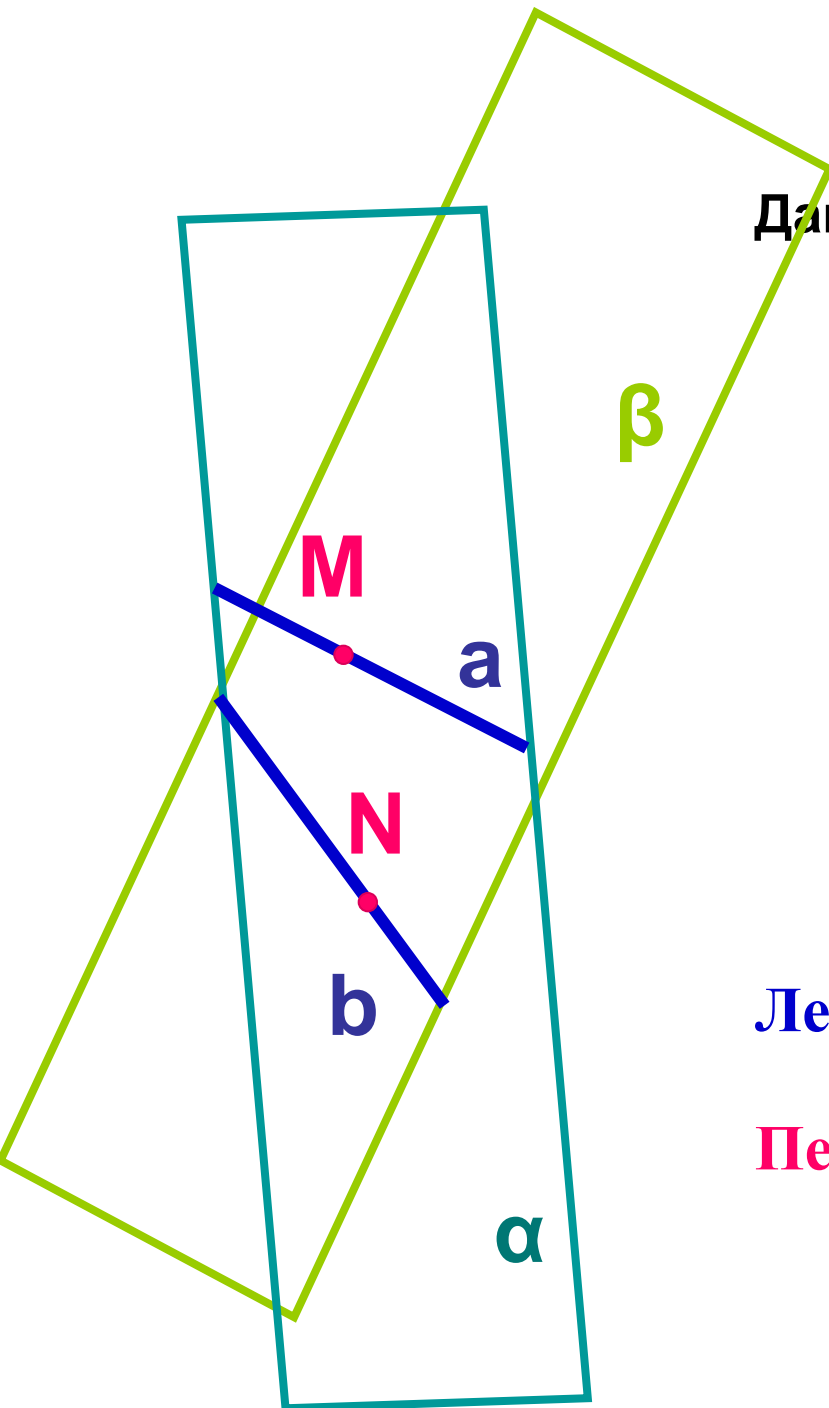
# Задача № 21



**Доказать:**

**прямые  $a$  и  $b$  пересекают плоскости  $(ABC)$  и  $(ABD)$**

# Задача № 40



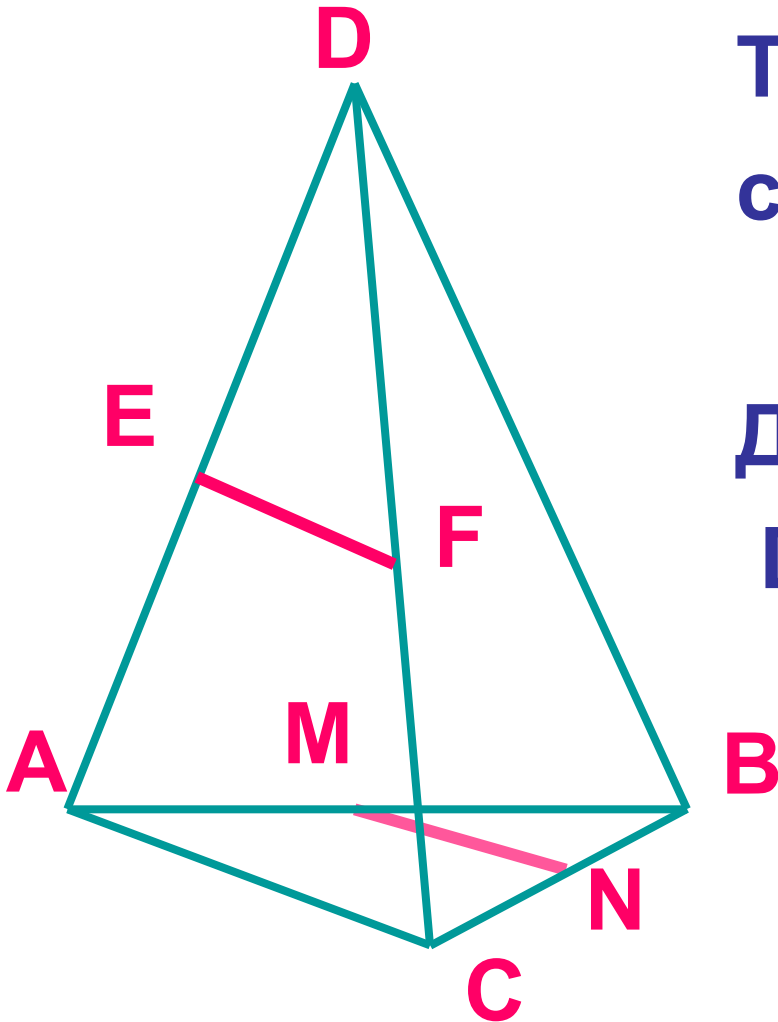
Дано: прямые **a** и **b** скрещиваются,  
**M**  $\in$  **a**, **N**  $\in$  **b**,  
плоскость  **$\alpha$**  проведена через  
**a** и точку **N**,  
плоскость  **$\beta$**  проведена  
через **b** и точку **M**.

Лежит ли прямая **b** в плоскости  **$\alpha$** ?

Пересекаются ли плоскости  **$\alpha$**  и  **$\beta$** ?

# Решение задач

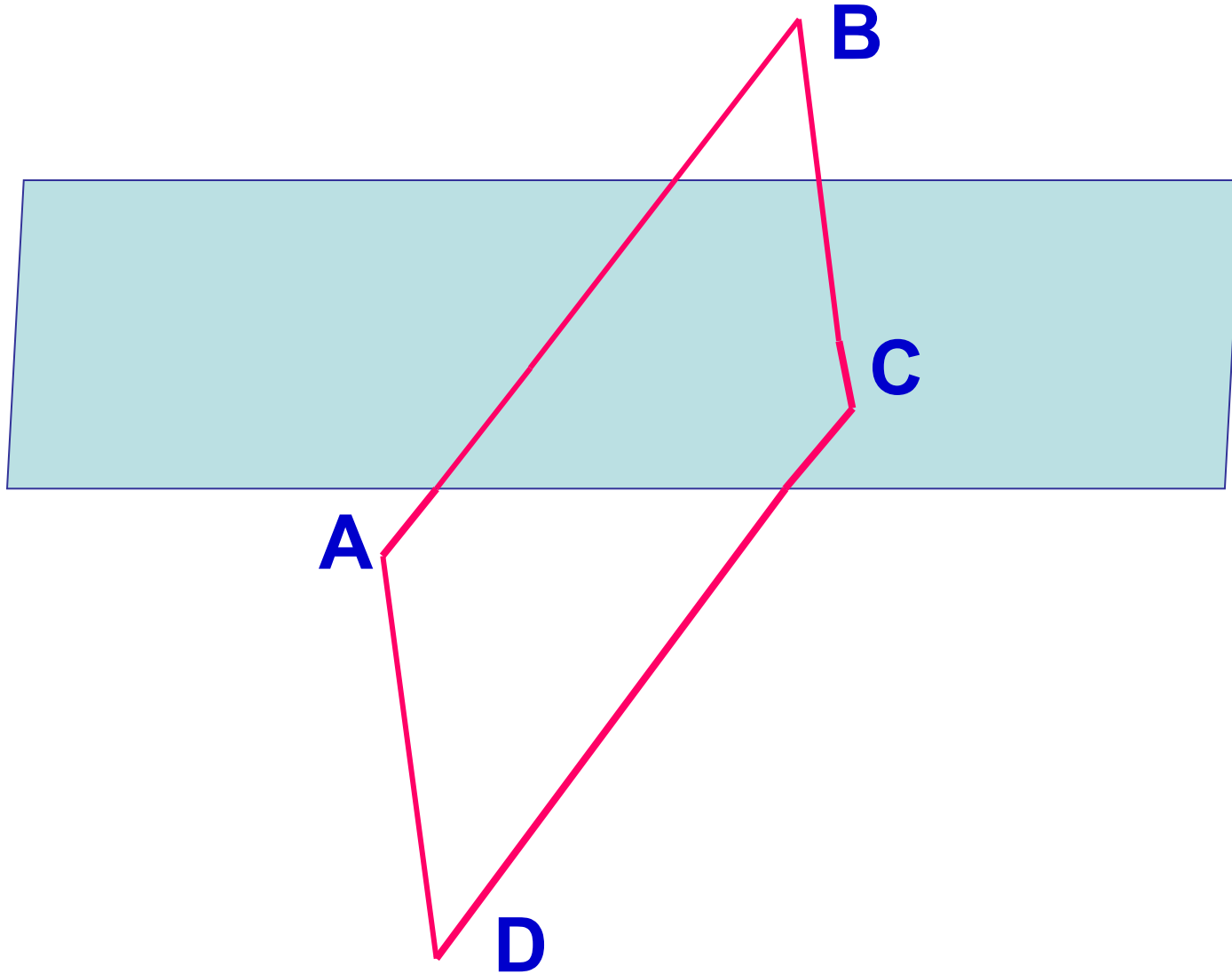
1.



Точки E, F, M, N –  
середины ребер.

Докажите:  $EF \parallel MN$ ,  
DC скрещивается с AB

# Задача № 19



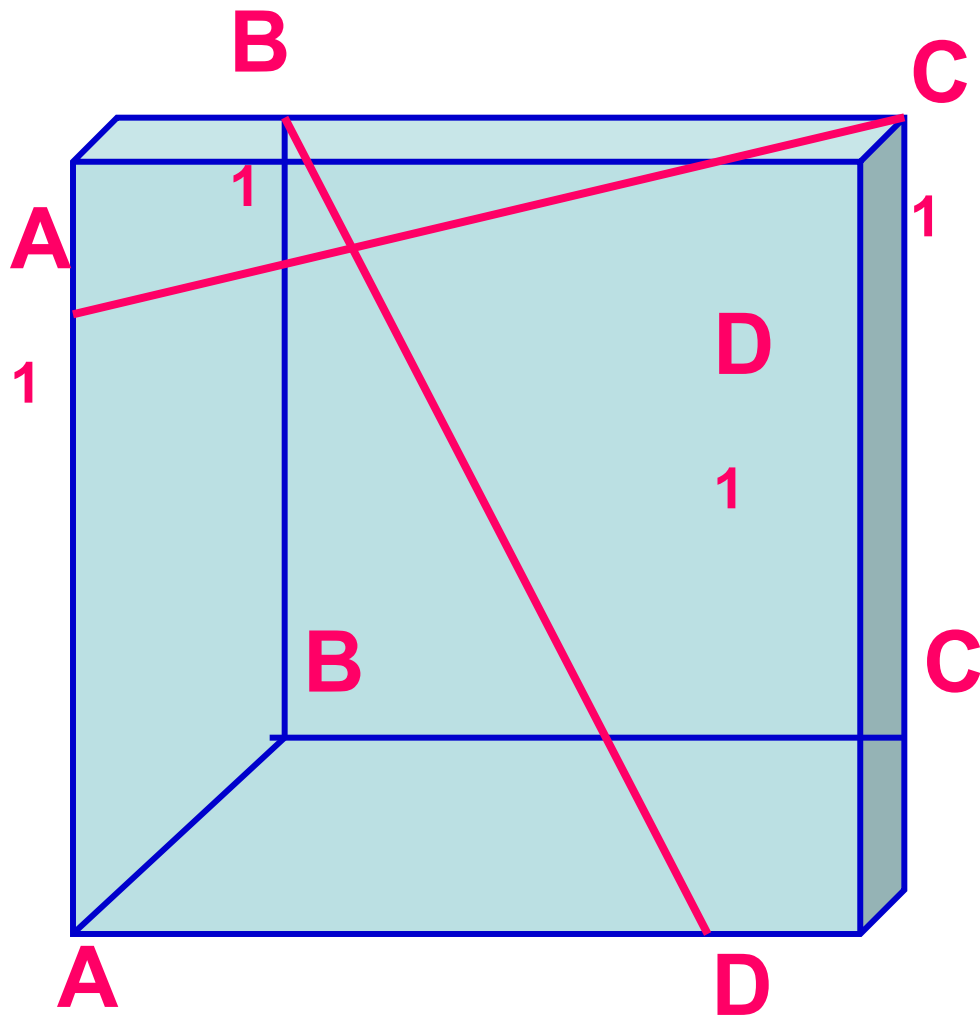
2.

Найти:

3 пары параллельных прямых,

3 пары скрещивающихся прямых,

3 пары пересекающихся прямых.



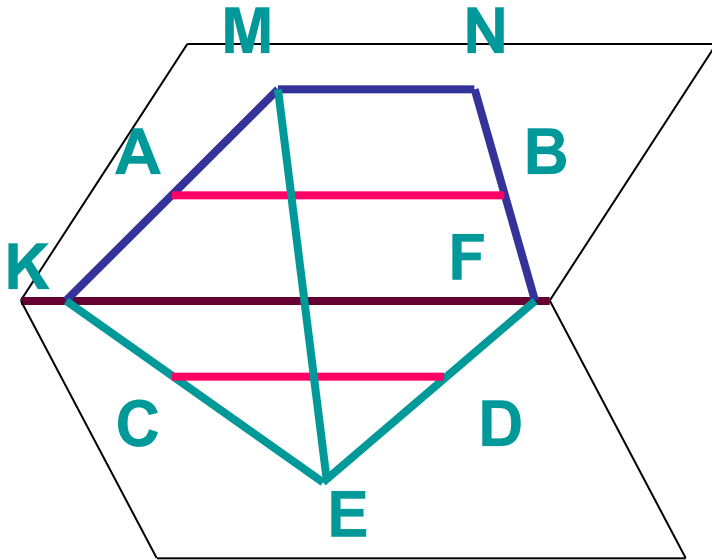
Пересекаются ли прямые

$B_1D$  и  $BC$ ?

$B_1D$   $A_1C_1$ ?

# Самостоятельная работа

1 вариант



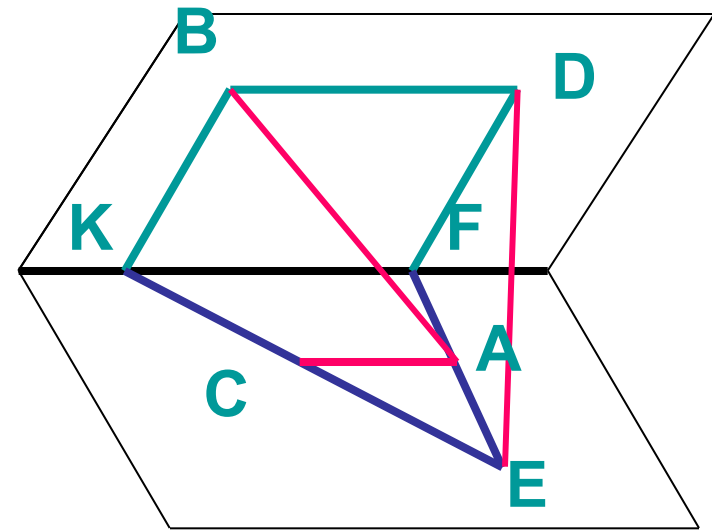
$KMNF$  - трапеция

$AB \parallel CD$

$ME$  скрещивается с  $CD$

$ME$  и  $AB$ ?

2 вариант



$KBDF$  - параллелограмм

$BD \parallel CA$

$DE$  скрещивается с  $CA$

$BA$  и  $CE$ ?

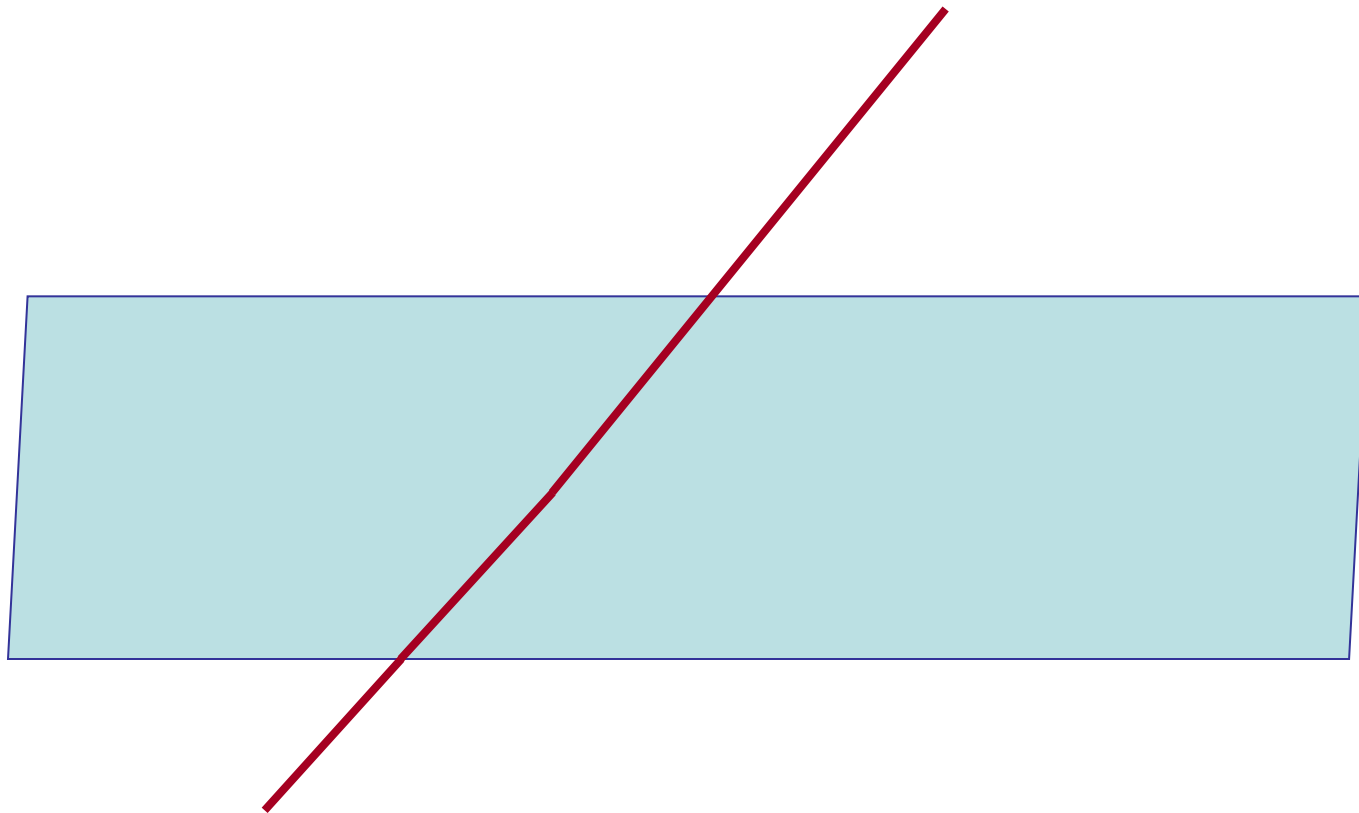
Доказать:

Пересекаются ли прямые



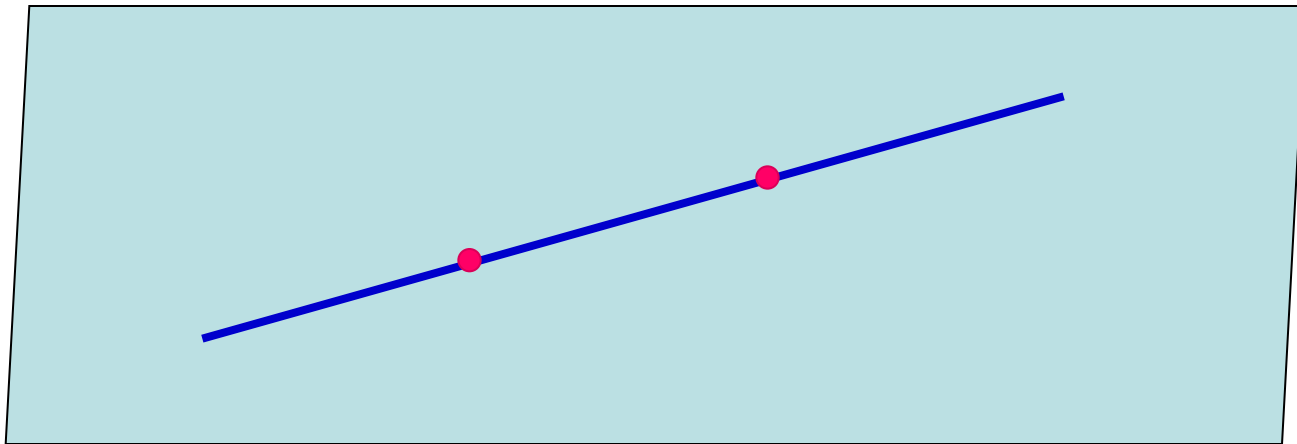
# Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

1. Прямая и плоскость имеют одну общую точку.



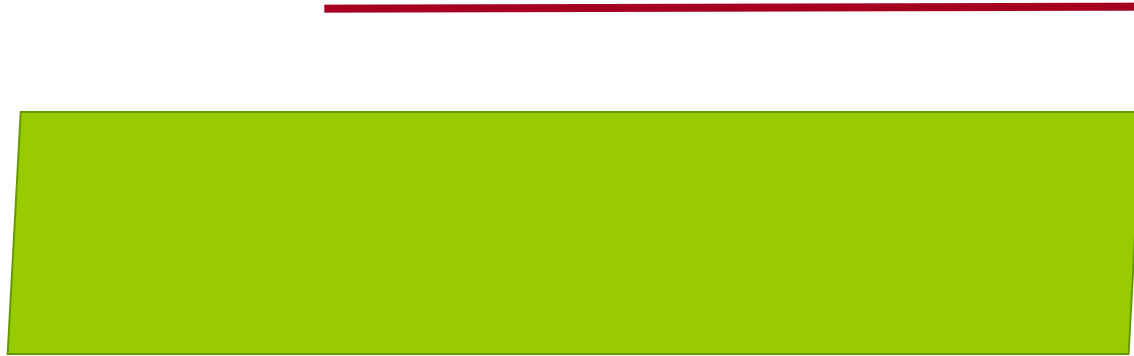
# Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

2. Прямая и плоскость имеют две общие точки.



# Расположение прямой и плоскости

3. Прямая и плоскость не имеют общих точек.



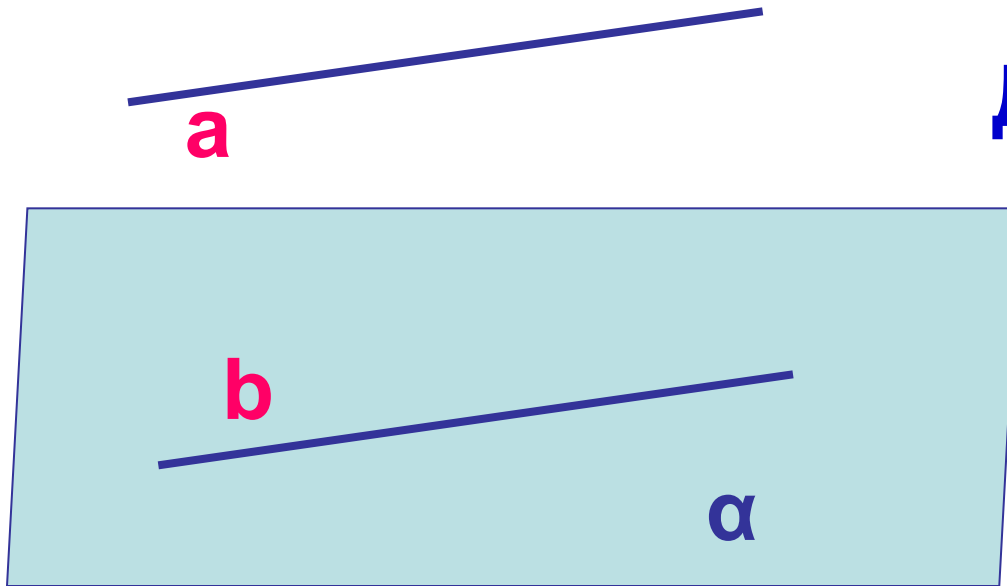
# Расположение прямой и плоскости

1. Если прямая и плоскость имеют одну общую точку, то прямая пересекает эту плоскость.
2. Если прямая и плоскость имеют две общие точки, то все точки этой прямой лежат в плоскости, то есть прямая лежит в плоскости.
3. Если прямая и плоскость не имеют общих точек, то прямая параллельна плоскости.

Какая же прямая называется параллельной плоскости?

# Признак параллельности прямой и плоскости

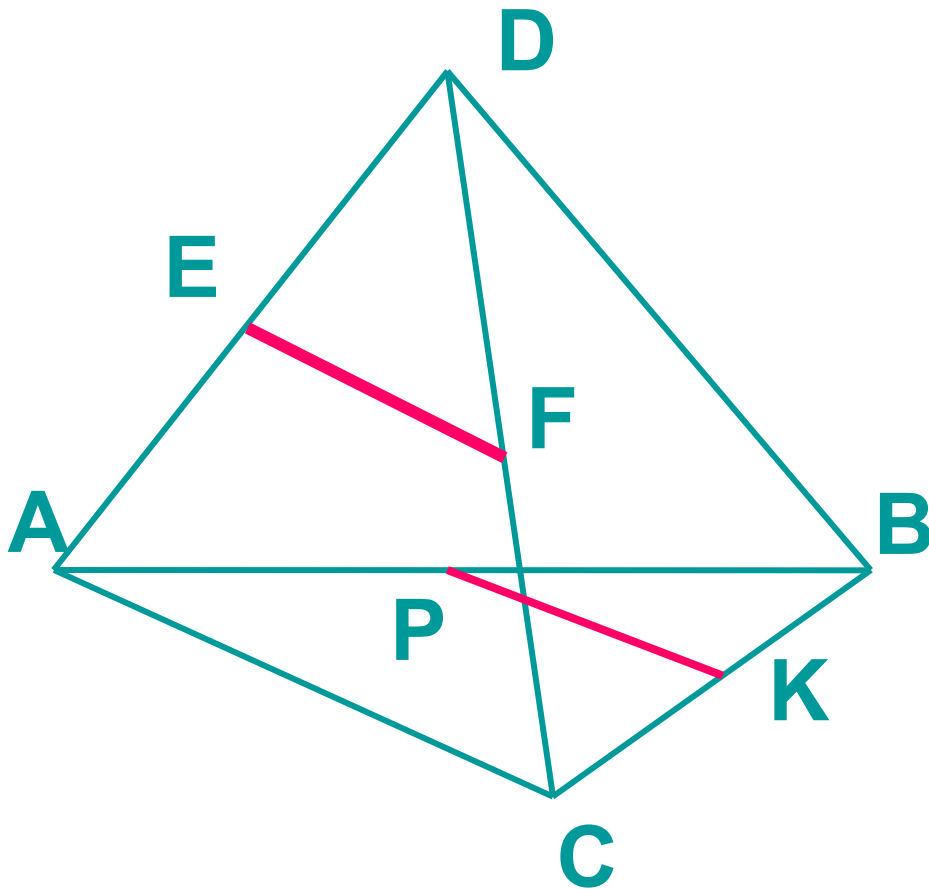
Если прямая, не лежащая в плоскости, параллельна какой-нибудь прямой плоскости, то она параллельна этой плоскости.



Дано: прямая  $a \parallel b$ ,  
 $a \notin \alpha$ ,  $b \in \alpha$ .

Доказать:  $a \parallel \alpha$

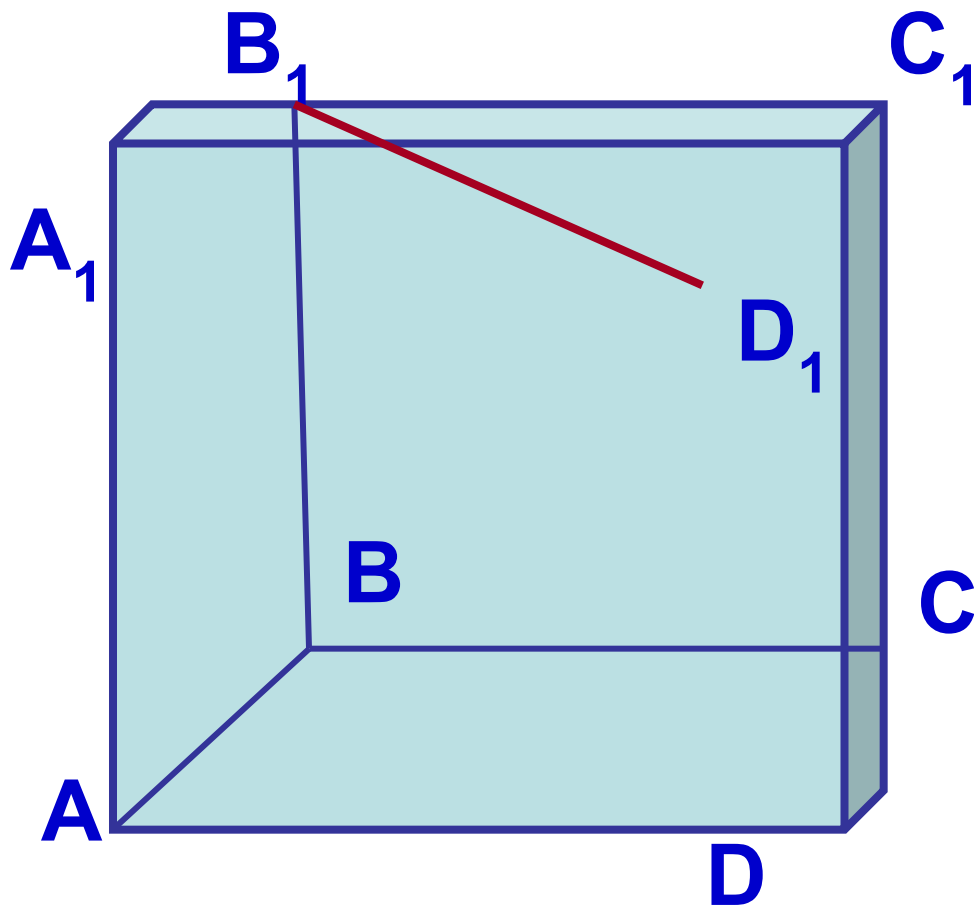
# Параллельность прямой и плоскости



**E и F – середины  
AD и CD  
P и K середины  
AB и BC**

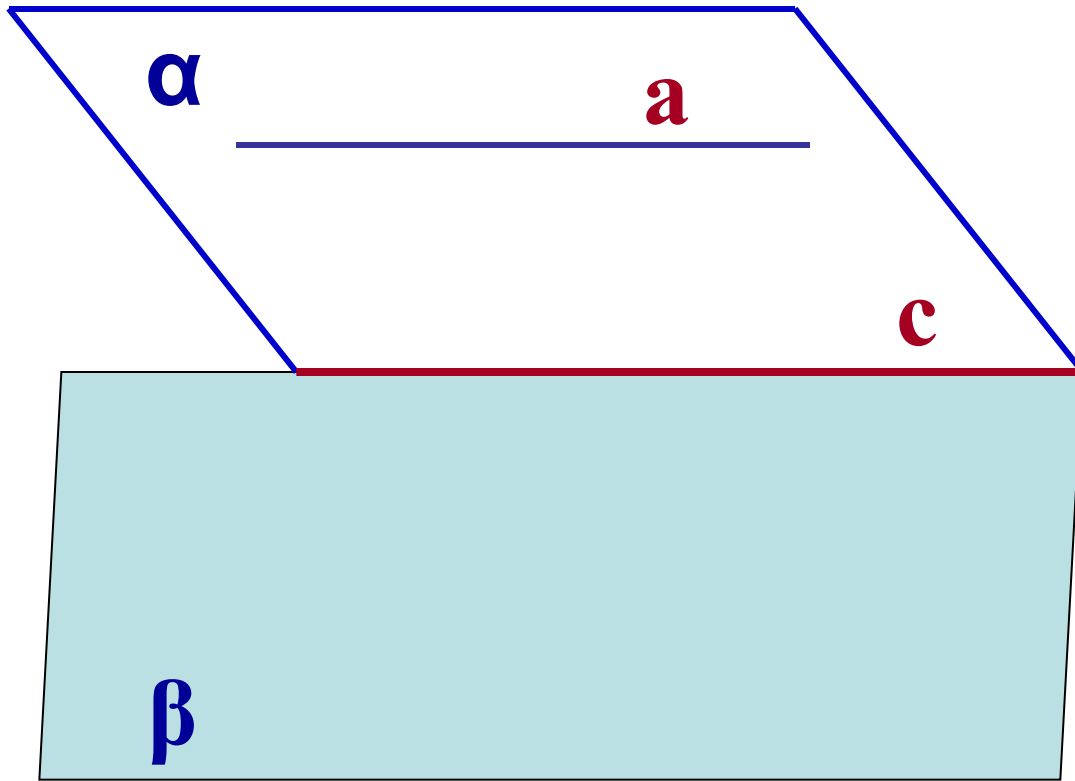
**Доказать:  
EF  $\parallel$  (ABC)  
PK (ADC).**

## Задача 2



**Доказать:**  
 **$AA_1 \parallel (CDD_1)$**   
 **$B_1D_1 \parallel (ABC)$**

# Свойства



**Дано:  $a \in \alpha$ ,  $a \parallel \beta$ ,  
 $\alpha \cap \beta = c$**

**Доказать:  $a \parallel c$**



# Свойство 1

Если прямая, лежащая в одной из пересекающихся плоскостей, параллельна другой плоскости, то она параллельна их линии пересечения.

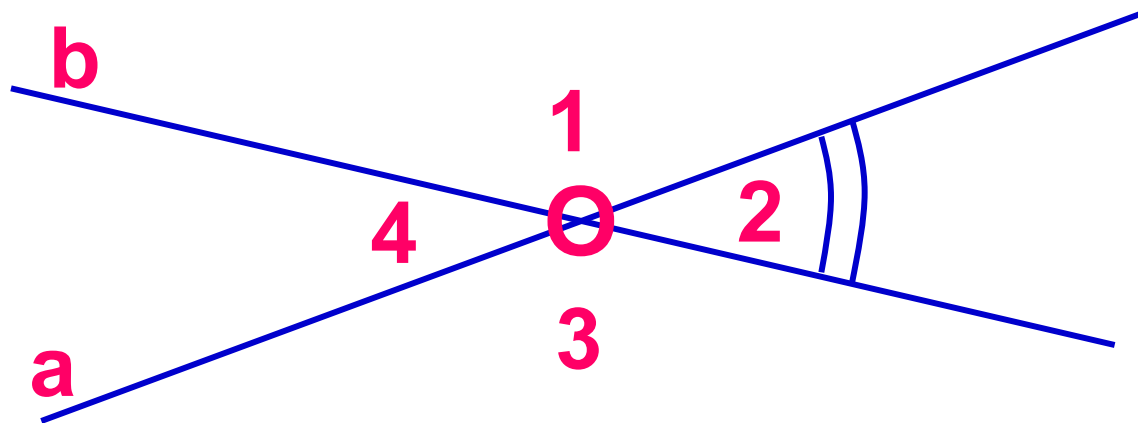
## Свойство 2

**Если одна из параллельных прямых параллельна данной плоскости, то вторая прямая либо лежит в этой плоскости, либо также параллельна данной плоскости.**

# УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ

1. Угол между пересекающимися прямыми.
2. Угол между скрещивающимися прямыми.

## Угол между пересекающимися прямыми

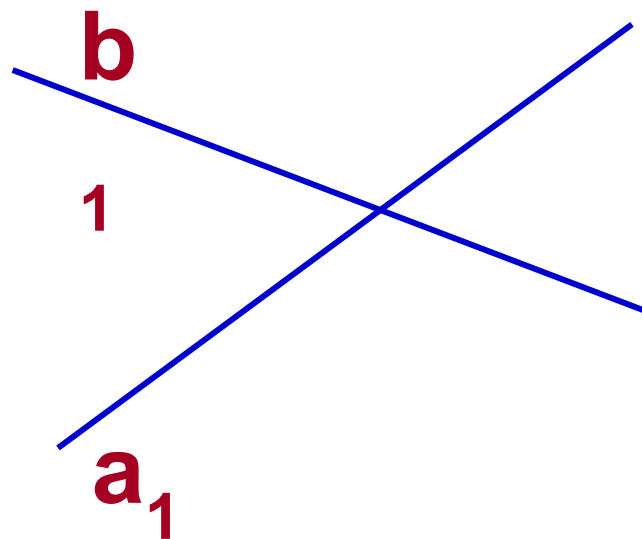
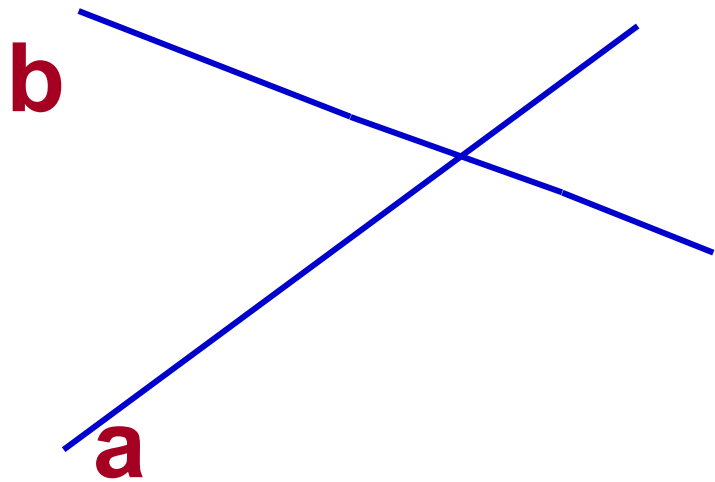


$$a \cap b = O \quad \angle(a; b) = \angle 2 = \angle 4$$

Углом между пересекающимися прямыми называется угол наименьшей градусной меры.

## Угол между скрещивающимися прямыми

Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, параллельными данным скрещивающимся.



$$\angle(a, b) = \angle(a_1, b)$$

# Решение задач

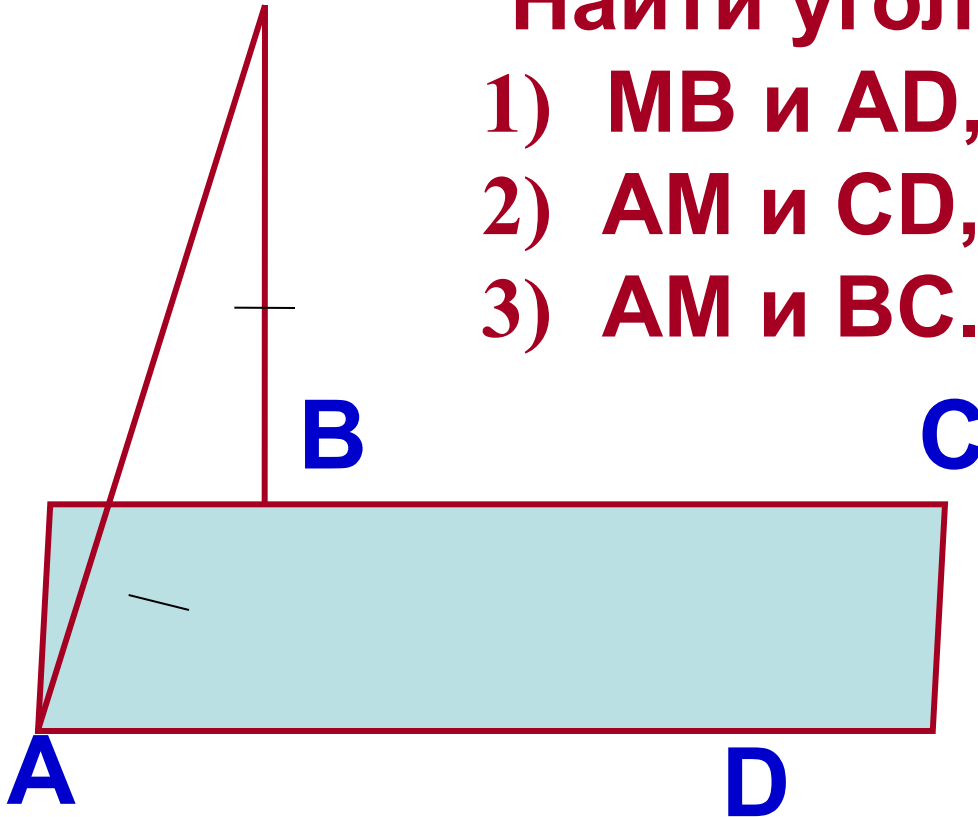
1.

**М**

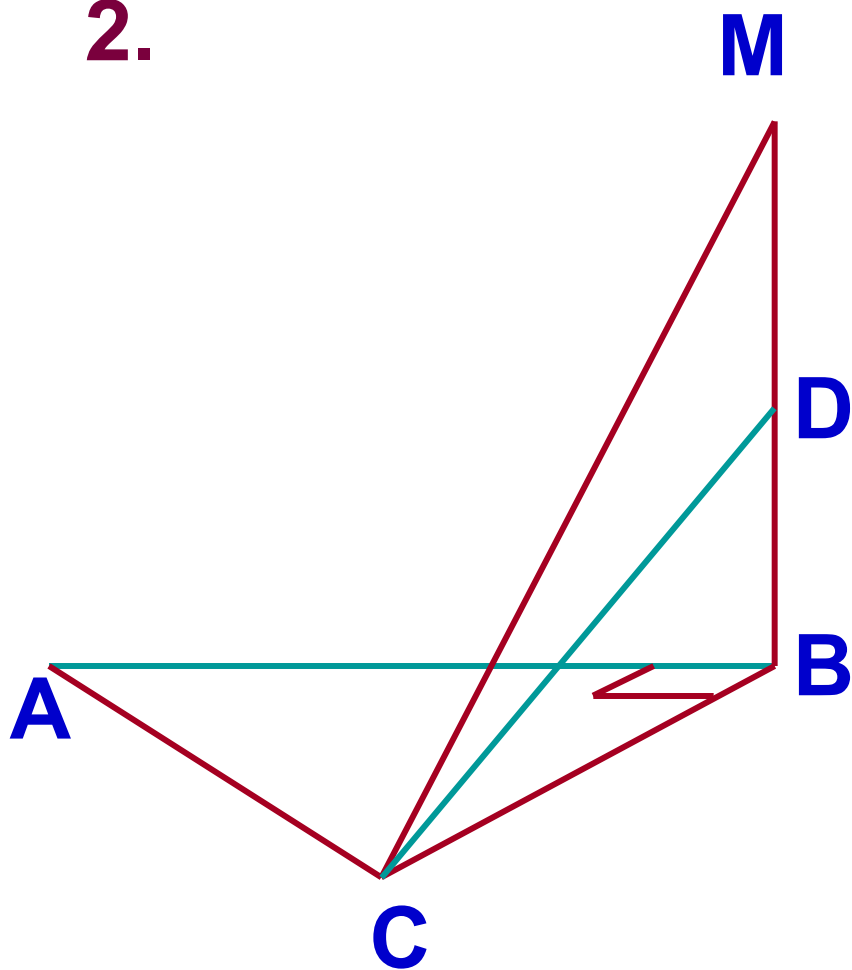
**ABCD – прямоугольник.**

**Найти угол между прямыми:**

- 1) **MB и AD,**
- 2) **AM и CD,**
- 3) **AM и BC.**



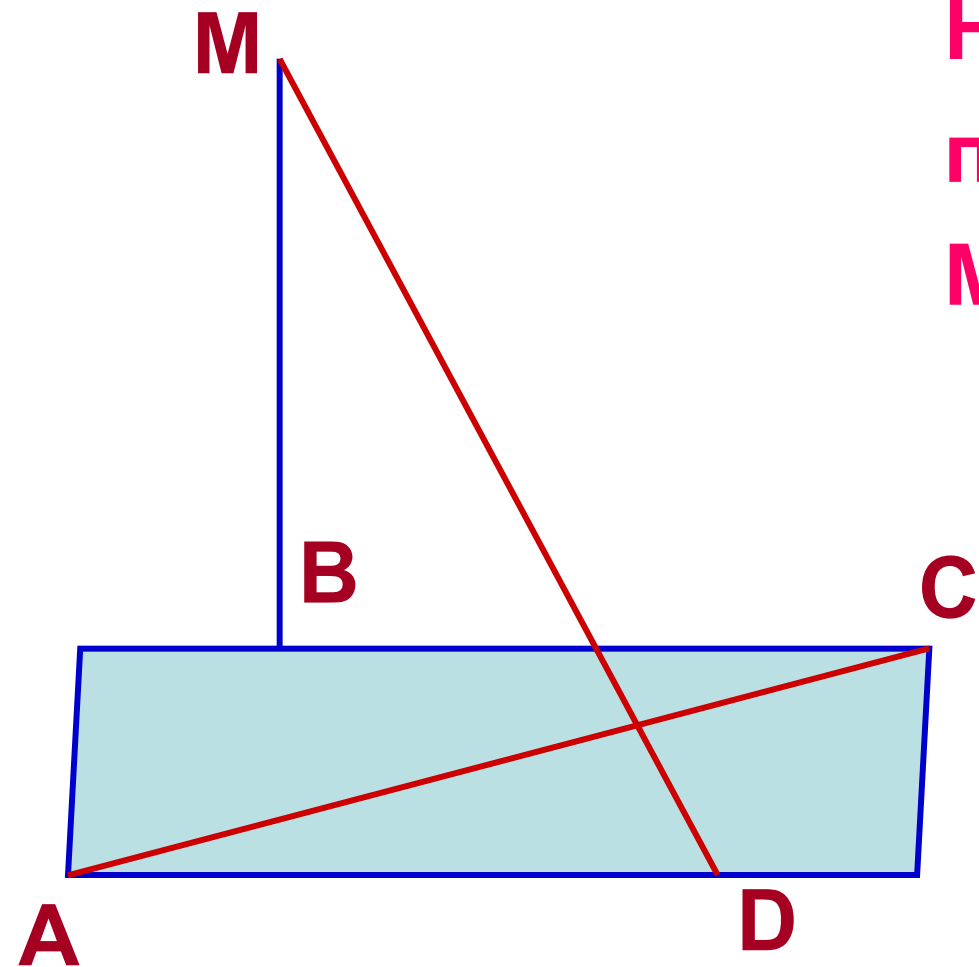
2.



Найти угол между  
прямыми  
AB и CD.

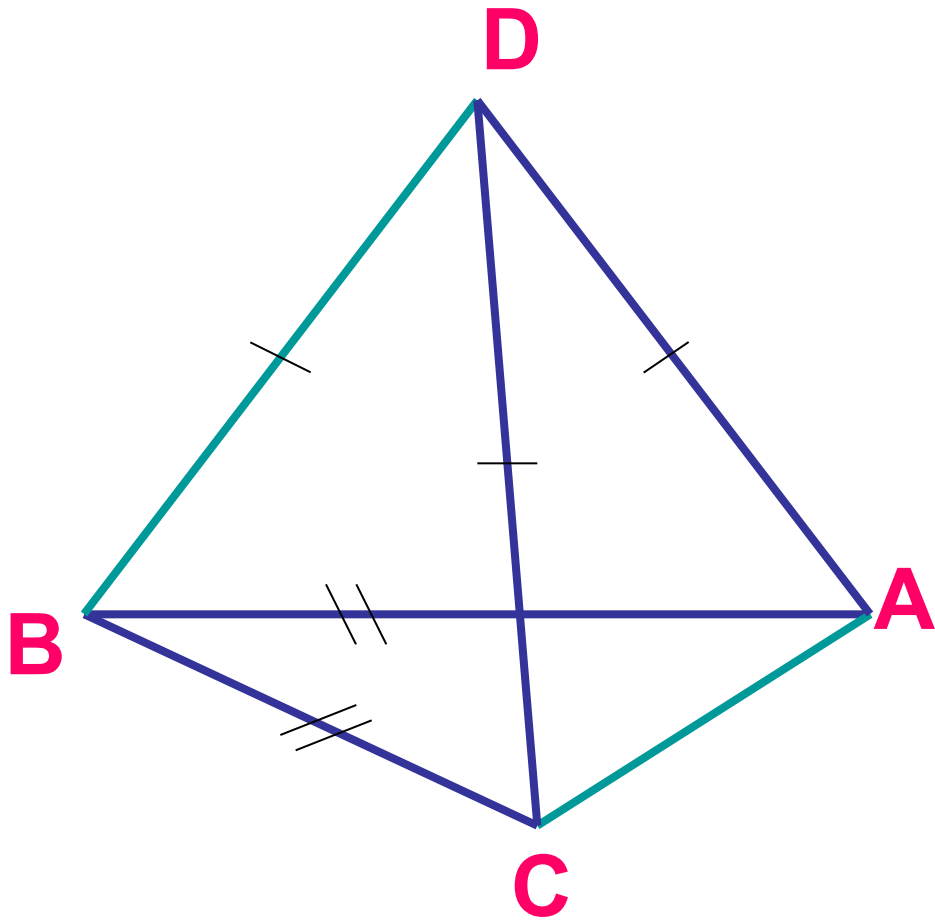
3.

ABCD – ромб.  
Найти угол между  
прямыми  
MD и AC.





4.



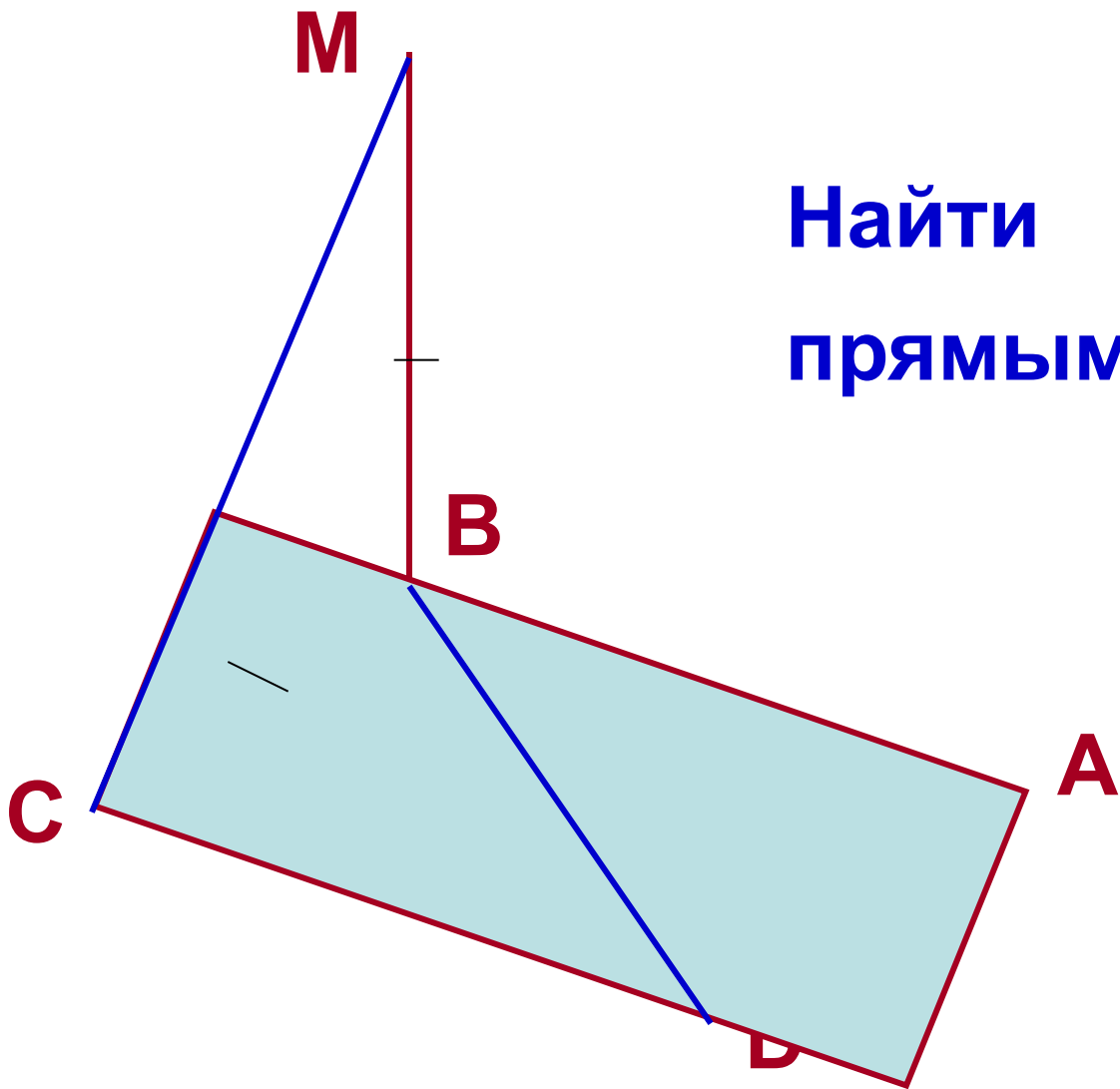
Точка D лежит вне плоскости ABC.

Найти угол между прямыми AC и BD.

5.

$ABCD$  – квадрат.

Найти угол между  
прямыми  $CM$  и  $BD$ .



# Параллельность плоскостей

1. Определение.
2. Признак.
3. Свойства.

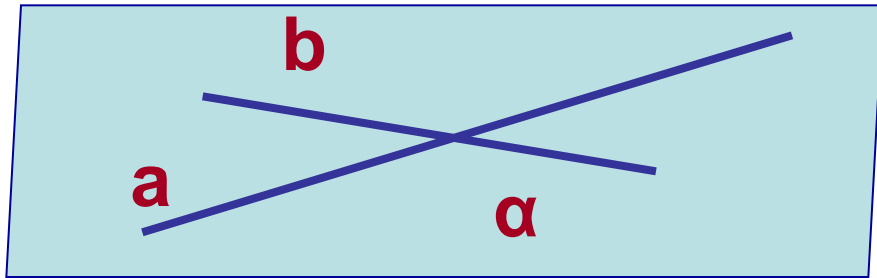
## ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Плоскости называются параллельными, если они не имеют общих точек.

## ПРИЗНАК

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны соответственно двум прямым другой плоскости, то плоскости параллельны.

# Признак



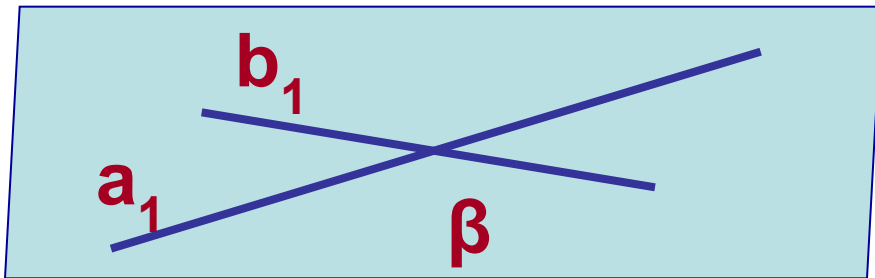
Дано: плоскости  $\alpha$  и  $\beta$ ,

$a \cap b, a_1 \cap b_1$ ,

$a$  и  $b$  лежат в  $\alpha$ ,

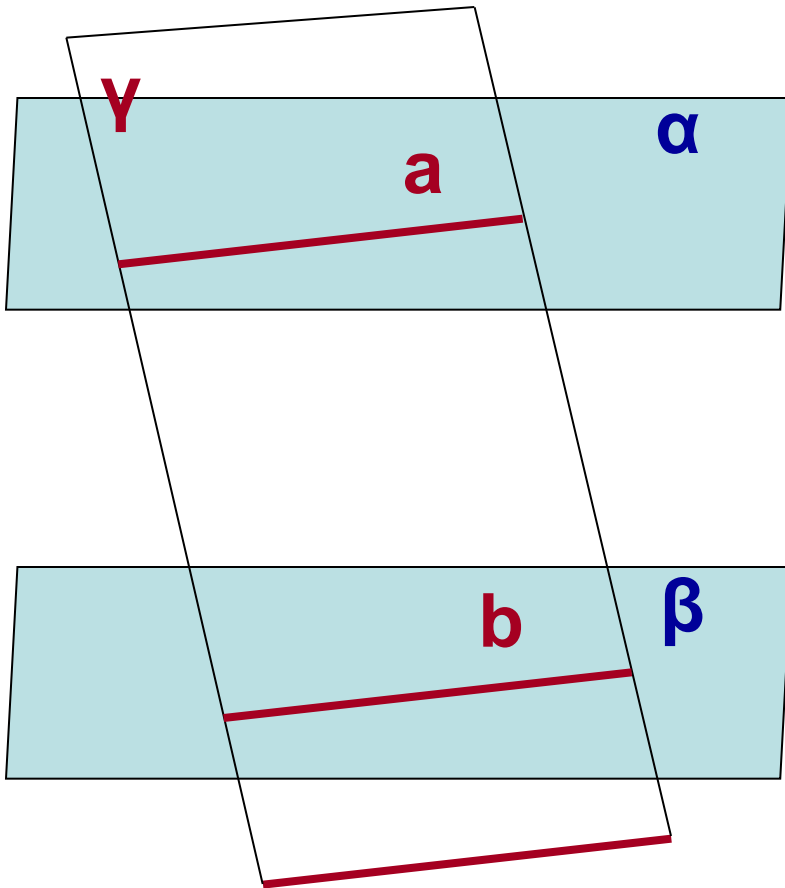
$a_1$  и  $b_1$  лежат в  $\beta$ .

Доказать:  $\alpha \parallel \beta$



# Свойства

1. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии пересечения плоскостей параллельны.

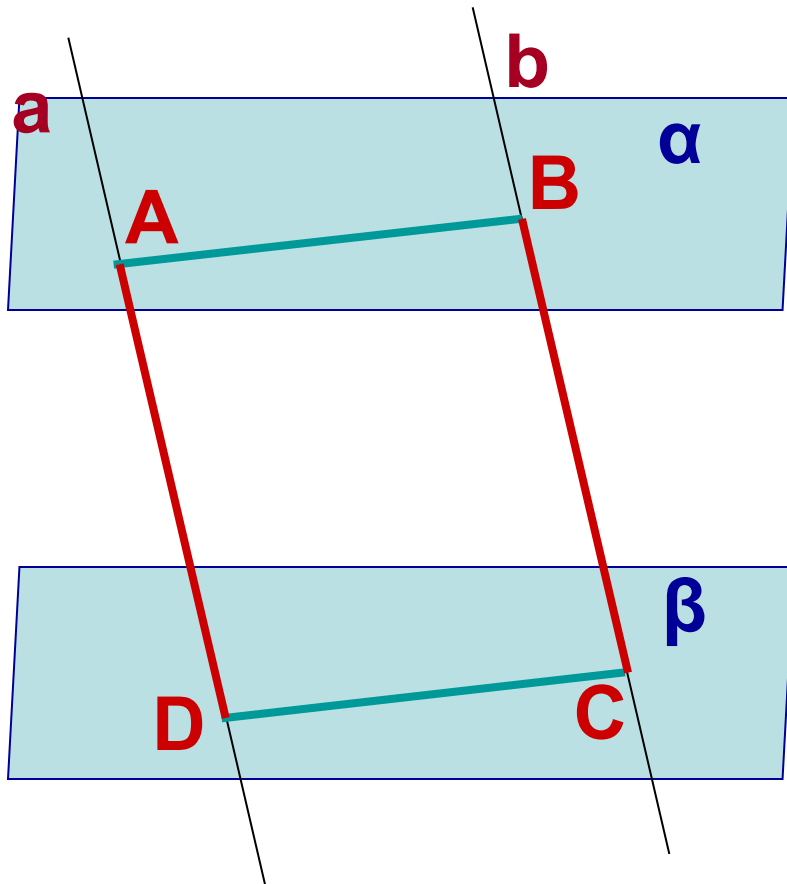


Дано:  $\alpha \parallel \beta$ ,  $\gamma \cap \alpha = a$ ,  
 $\gamma \cap \beta = b$ .

Доказать:  $a \parallel b$

# Свойства

2. Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны.



Дано:  $\alpha \parallel \beta$ ,  $a \parallel b$ .

Доказать:  $AD = BC$

# Свойства

3. Если прямая пересекает одну из параллельных плоскостей, то она пересекает и другую.

4. Если плоскость пересекает одну из параллельных плоскостей, то она пересекает и вторую плоскость.

5. В пространстве через точку, не лежащую на данной плоскости, можно провести плоскость, параллельную данной, притом только одну.