

Теорема синусов

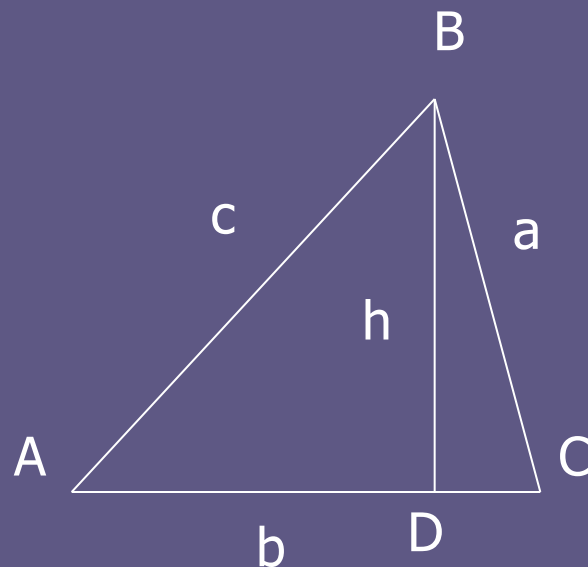
Теорема

- Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов

Доказательство

- Пусть в треугольнике ABC $AB=c, BC=a, AC=b$
- Докажем, что

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$



- По теореме о площади треугольника

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C, S = \frac{1}{2} bc \sin A, S = \frac{1}{2} ac \sin B$$

Из первых двух равенств получаем

$$\frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A$$

Откуда

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

- Аналогично из второго и третьего равенств следует

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

Итак,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

- Теорема доказана

*Расширенная
теорема синусов*

Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной окружности

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

где R – радиус описанной окружности

