

Подготовка к ЕГЭ 2014 по математике

Решение задания С1

МБОУ «СОШ № 143»

Г. Красноярск

Князькина Т. В.

Способы отбора корней в тригонометрических уравнениях

Арифметический

Геометрический

Алгебраический

*Функционально-
графический*

Арифметический способ

перебор значений
целочисленного параметра и
вычисление корней.

Найдите все корни уравнения $\sin 2x = \cos x$, принадлежащие промежутку $\left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right]$.

$$\sin 2x = \cos x;$$

$$\cos x \cdot (2 \sin x - 1) = 0;$$

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin x = \frac{1}{2}; \end{cases}$$

1) $\cos x = 0$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n; n \in \mathbb{Z}.$$

Если $n=0$, то

$$x = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \in \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right].$$

Если $n=1$, то

$$x = \frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right].$$

Если $n=-1$, то

$$x = -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \in \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right].$$

Если $n=-2$, то

$$x = -\frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right].$$

$$2) \sin x = \frac{1}{2},$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \quad \text{или} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Если $n=-1$, то

$$x = -\frac{11\pi}{6}, -\frac{11\pi}{6} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right] \quad \text{или} \quad x = -\frac{7\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right].$$

Если $n=0$, то

$$x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \in \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right] \quad \text{или} \quad x = \frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right].$$

Если $n=1$, то

$$x = \frac{13\pi}{6}, \frac{13\pi}{6} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right] \quad \text{или} \quad x = \frac{17\pi}{6}, \frac{17\pi}{6} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right].$$

$$\text{Ответ: } -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}.$$

Алгебраический способ

- а) решение неравенства относительно неизвестного целочисленного параметра и вычисление корней;
- б) исследование уравнения с двумя целочисленными параметрами.

Решить уравнение : $\frac{\cos 7x}{\sin 5x - 1} = 0$.

$$\frac{\cos 7x}{\sin 5x - 1} = 0;$$

$$\begin{cases} \cos 7x = 0, \\ \sin 5x - 1 \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}, n \in Z, \\ x \neq \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}, k \in Z; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \\ 5x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z; \end{cases} \quad \frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7} \neq \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}; n, k \in Z;$$
$$\frac{1}{14} + \frac{n}{7} \neq \frac{1}{10} + \frac{2k}{5}; n, k \in Z;$$

Найдём все «неподходящие» n .

$$\frac{1}{14} + \frac{n}{7} = \frac{1}{10} + \frac{2k}{5}; n, k \in \mathbb{Z};$$

$$5 + 10n = 7 + 28k; n, k \in \mathbb{Z};$$

$$10n = 2 + 28k; n, k \in \mathbb{Z};$$

$$5n = 1 + 14k; n, k \in \mathbb{Z};$$

$$n = \frac{1 + 14k}{5}; n, k \in \mathbb{Z};$$

$$n = 2k + \frac{4k + 1}{5}; n, k \in \mathbb{Z};$$

$$\frac{4k+1}{5} = a, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad a \in \mathbb{Z}, \quad n = 2k + \frac{4k+1}{5}; n, k \in \mathbb{Z};$$

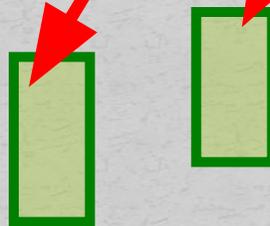
$$k = \frac{5a-1}{4};$$

$$k = a + \frac{a-1}{4};$$

$$\frac{a-1}{4} = t; \quad a \in \mathbb{Z}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

$$a = 4t + 1;$$

$$k = 5t + 1;$$



$$n = 14t + 3$$

$$t \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}.$$

Все «неподходящие» n

Итак,

$$\frac{\cos 7x}{\sin 5x - 1} = 0;$$

$$x = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}; \quad n \neq 14t + 3, t \in \mathbb{Z}.$$

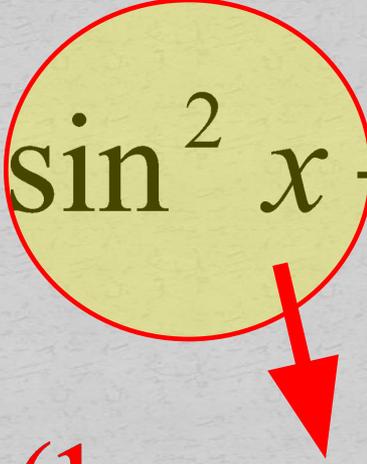
Ответ: $\frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}; \quad n \neq 14t + 3, t \in \mathbb{Z}.$

Решить уравнение

$$2 \sin^2 x + 3 \cos x - 3 = 0.$$

**Укажите корни,
принадлежащие отрезку $[4\pi; 5\pi]$.**

$$2 \sin^2 x + 3 \cos x - 3 = 0;$$


$$2 \cdot (1 - \cos^2 x) + 3 \cos x - 3 = 0;$$

$$2 - 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 3 = 0;$$

$$-2 \cos^2 x + 3 \cos x - 1 = 0;$$

$$2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0;$$

$$2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0;$$

$$\begin{cases} \cos x = \frac{1}{2}, \\ \cos x = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$x = \frac{13\pi}{3}.$$

$$x = 4\pi.$$

$$3) x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$4\pi \leq \frac{4\pi}{3} + 2\pi n \leq 5\pi, n \in \mathbb{Z};$$

$$4 \leq \frac{4}{3} + 2n \leq 5, n \in \mathbb{Z};$$

$$2 \leq n \leq \frac{11}{2}, n \in \mathbb{Z};$$

$$4 - \frac{4}{3} \leq 2n \leq 5 - \frac{4}{3}, n \in \mathbb{Z};$$

$$2 \leq n \leq 2\frac{1}{3}, n \in \mathbb{Z};$$

$$\frac{24}{3} \leq 2n \leq \frac{25}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$1\frac{5}{6} \leq n \leq 2\frac{1}{6}, n \in \mathbb{Z};$$

Ответ $n=2$
 $\frac{13\pi}{3} + 2\pi n,$

$2\pi n, n \in \mathbb{Z};$
 $\frac{13\pi}{3}, 4\pi.$

нет значений.

Геометрический способ:

- а) изображение корней на тригонометрической окружности с последующим их отбором на заданном промежутке;
- б) изображение корней на координатной прямой с последующим отбором с учетом имеющихся ограничений.

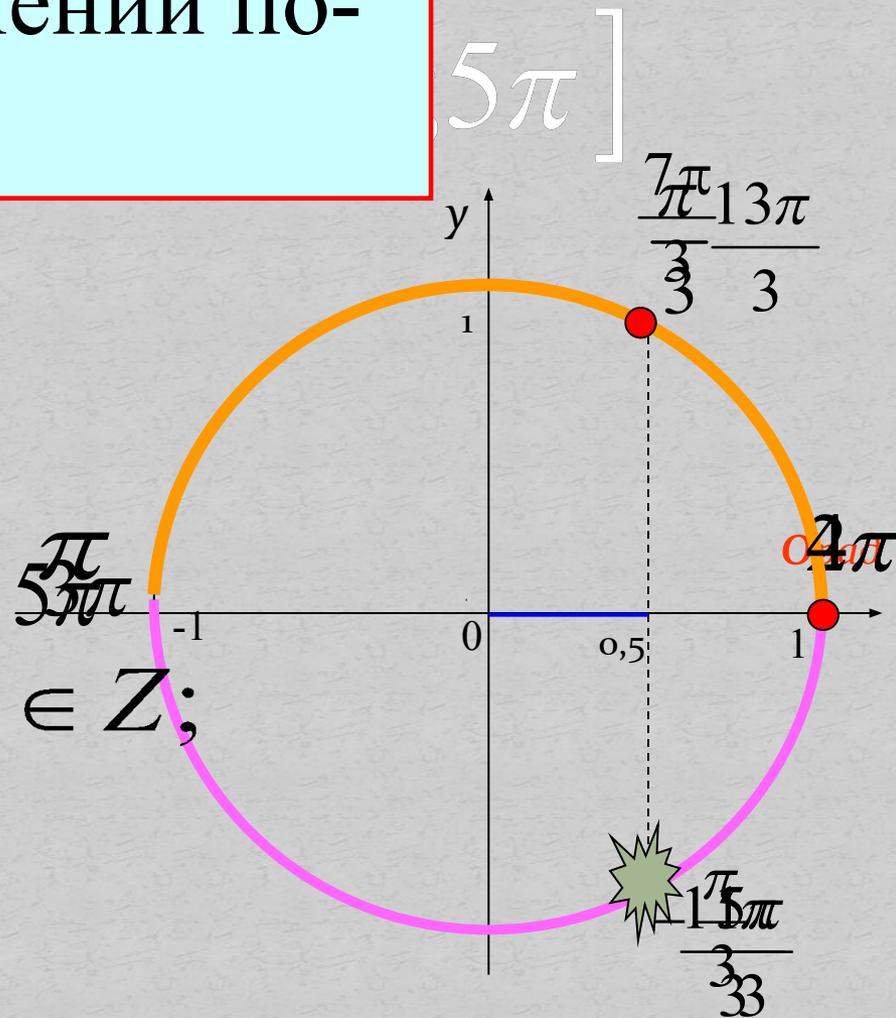
$$2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0;$$

Выполним отбор корней в
предыдущем уравнении по-
другому!

$$x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ : } \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \frac{13\pi}{3}; 4\pi.$$



Решить уравнение

$$2 \sin 2x + \cos x + 4 \sin x + 1 = 0.$$

Укажите корни,
принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2} \right]$.

$$2 \sin 2x + \cos x + 4 \sin x + 1 = 0;$$

$$2 \cdot 2 \sin x \cdot \cos x + \cos x + 4 \sin x + 1 = 0;$$

$$4 \sin x \cdot \cos x + \cos x + 4 \sin x + 1 = 0;$$

$$\cos x \cdot (4 \sin x + 1) + (4 \sin x + 1) = 0;$$

$$(4 \sin x + 1) \cdot (\cos x + 1) = 0;$$

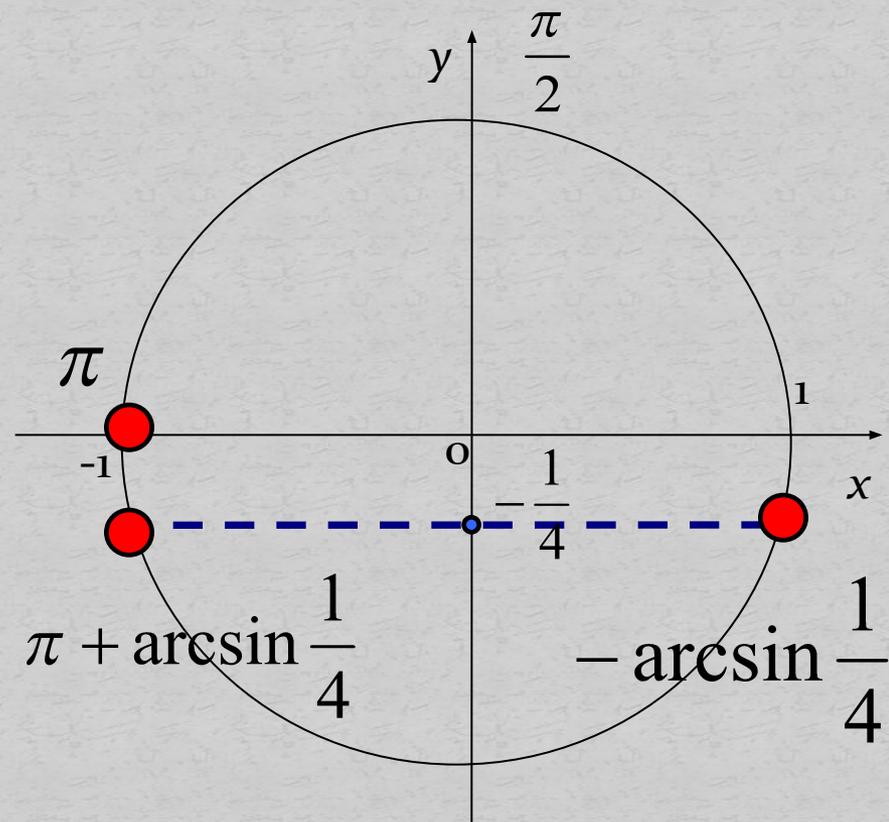
$$\left[\begin{array}{l} 4 \sin x + 1 = 0, \\ \cos x + 1 = 0, \end{array} \right. \text{общий множитель}$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = -\frac{1}{4}, \\ \cos x = -1; \end{array} \right.$$

общий множитель

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = -\frac{1}{4}, \\ \cos x = -1; \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi n, \\ x = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \\ x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$



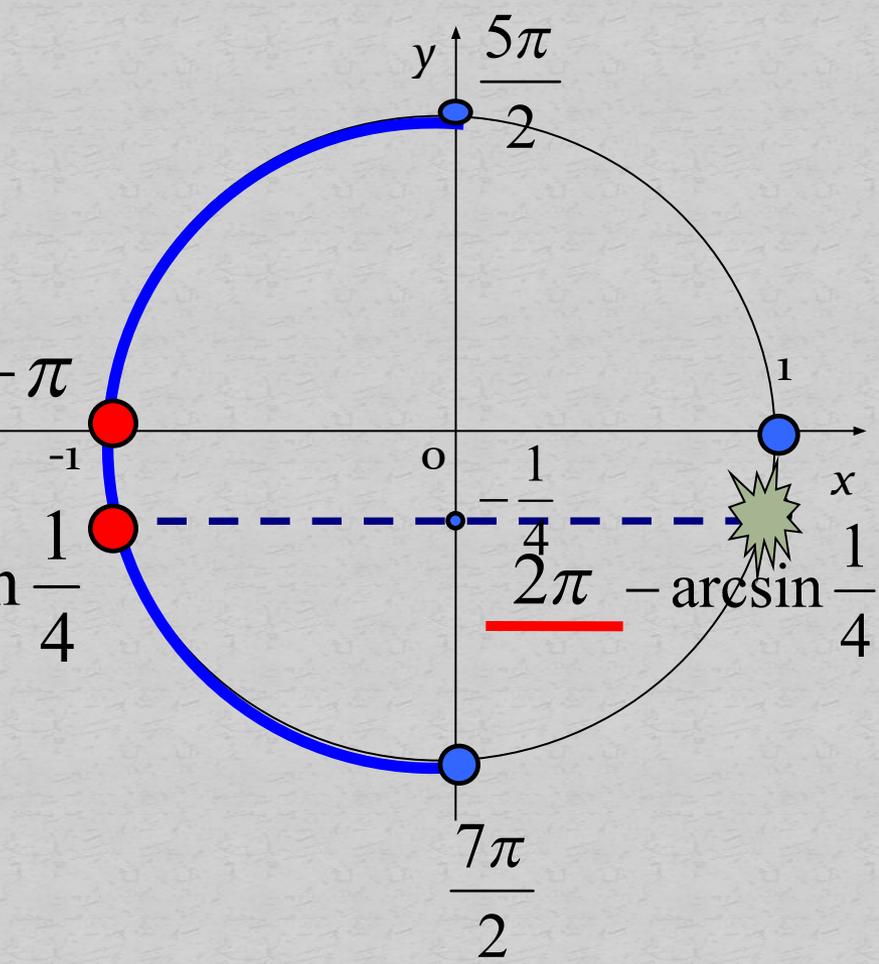
$$\left[\begin{array}{l}
 x = -\arcsin \frac{1}{4} + 2\pi n, \\
 x = 3\pi + \arcsin \frac{1}{4}, \\
 x = \pi + \arcsin \frac{1}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \\
 x = 3\pi, \\
 x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.
 \end{array} \right. \quad \text{?} \quad \rightarrow \quad \left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2} \right]$$

Ответ : $-\arcsin \frac{1}{4} + 2\pi n,$

$\pi + \arcsin \frac{1}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$

$\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$

$3\pi + \arcsin \frac{1}{4}; 3\pi.$



Решить уравнение

$$2 \sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 3 \cos^2 x = 0.$$

Укажите корни,
принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right]$.

$$2 \sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 3 \cos^2 x = 0.$$

$$2 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 3 = 0;$$

$$\operatorname{tg} x = 1,$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{3}{2};$$

Разделим на $\cos^2 x; \cos^2 x \neq 0.$

то уравнение

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$x = -\operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\left[x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \right.$$

$$\left. x = -\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{2}\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \right]$$

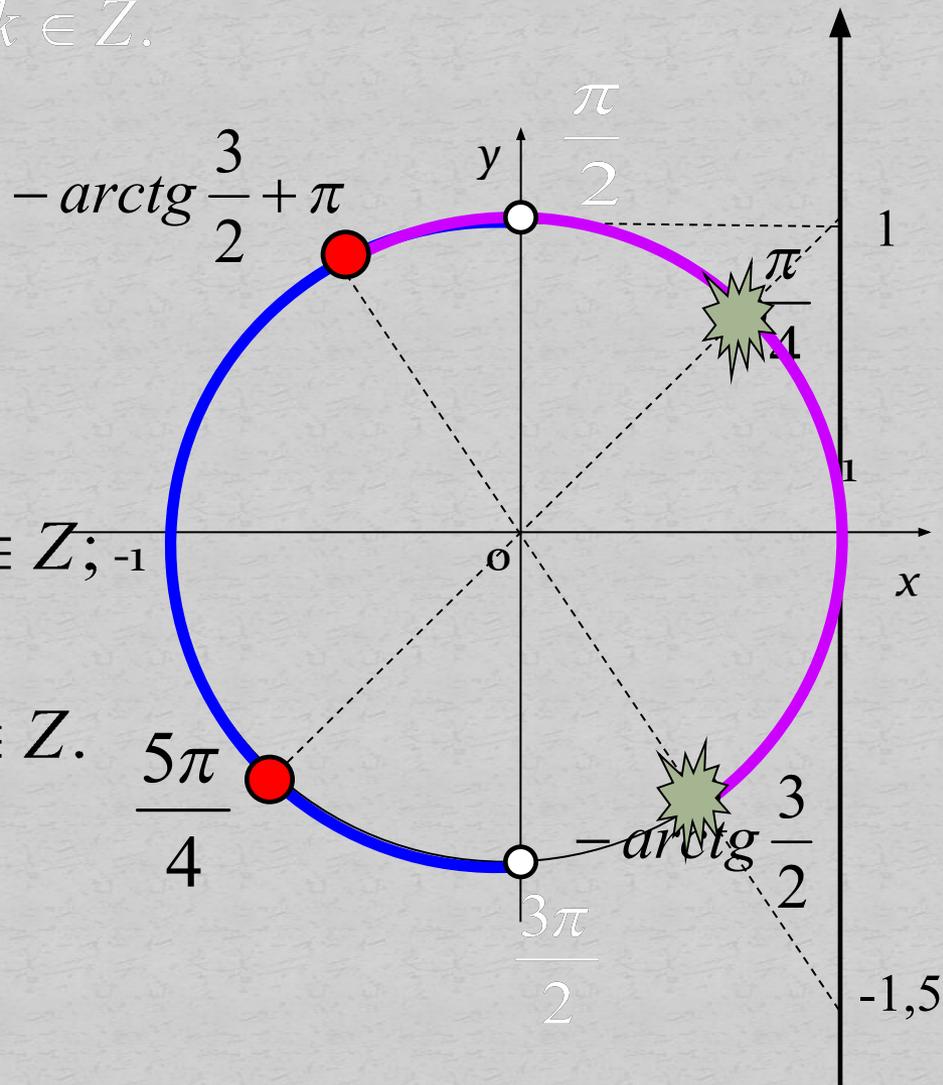


$$\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right]$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$

$-\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{2}\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$

$\frac{5\pi}{4}; \pi - \operatorname{arctg}\frac{3}{2}.$



Отбор корней на координатной прямой.

$$\frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{3}} = 0.$$

Решение :

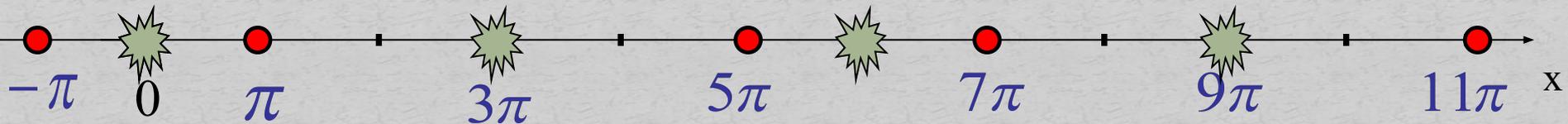
$$\begin{cases} \cos \frac{x}{2} = 0, \\ \sin \frac{x}{3} \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pi + 2\pi k, k \in Z, \\ x \neq 3\pi n, n \in Z. \end{cases}$$

$$T\left(\cos \frac{x}{2}\right) = 4\pi,$$

$$T\left(\sin \frac{x}{3}\right) = 6\pi.$$

Наим. общий период :

$$T_{\text{общ}} = 12\pi.$$



ОТВЕТ :

$$-\pi + 6\pi m, \pi + 6\pi m, m \in Z.$$

Функционально-графический способ

выбор корней с использованием графика простейшей тригонометрической функции.

Решите уравнение

$$\frac{\sin 2x - \sqrt{2} \sin x - \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2} \sin x - 1} = 0;$$

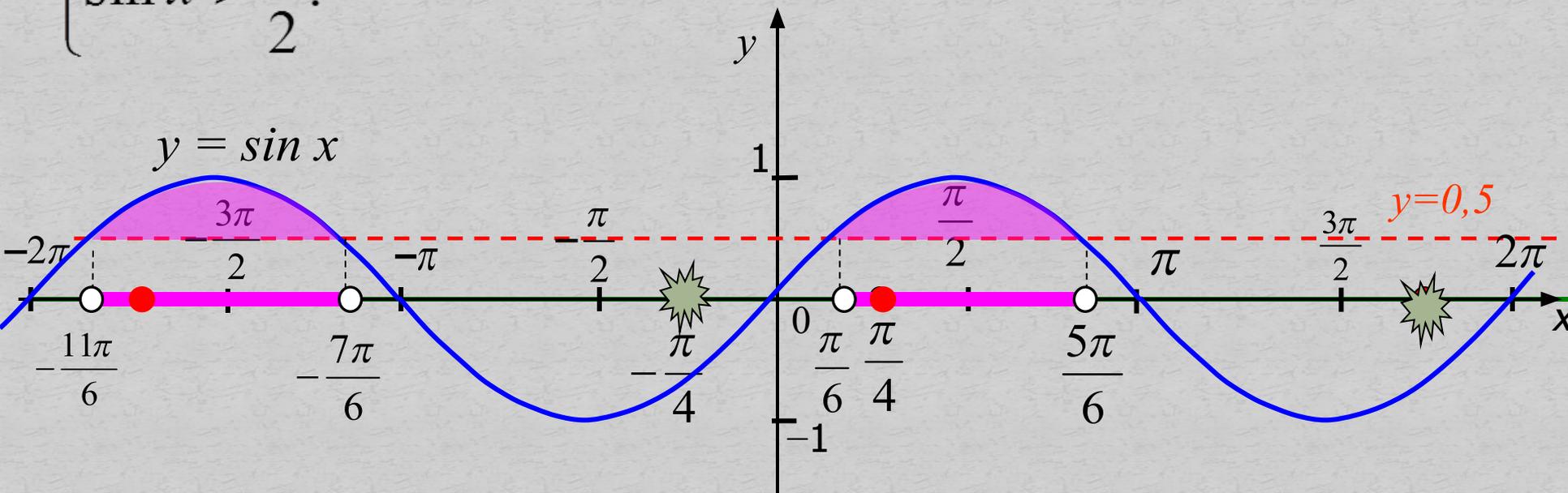
$$\frac{2 \sin x \cdot \cos x - \sqrt{2} \sin x - \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2} \sin x - 1} = 0;$$

$$\frac{(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}) \cdot (2 \sin x - 1)}{\sqrt{2} \sin x - 1} = 0;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin x = \frac{1}{2}; \\ \sin x > \frac{1}{2}; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \\ \sin x > \frac{1}{2}. \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \\ \sin x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$



Ответ: $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Дано уравнение:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) = \cos x$$

а) Решите уравнение.

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку

$$\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$$

Решение:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) = \cos x$$

$$\sin 2x = \cos x$$

$$2\sin x \cos x = \cos x$$

$$2\sin x \cos x - \cos x = 0$$

$$\cos x (2\sin x - 1) = 0$$

Тогда **$\cos x = 0$**

или **$\sin x = 0,5$**

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_1 = \arcsin a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Обе формулы можем объединить в одну:

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

имеет решение при $-1 \leq a \leq 1$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \quad \text{или} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Таким образом: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Найдём корни уравнения, принадлежащие отрезку

$$\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$$

Итак, первый корень:

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

Решаем неравенство:

$$\begin{aligned} \frac{5\pi}{2} &\leq \frac{\pi}{2} + \pi k \leq 4\pi \\ \frac{5\pi}{2} &\leq \frac{\pi}{2} + \pi k \leq 4\pi \quad \Big| -\frac{\pi}{2} \\ \frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{2} &\leq \pi k \leq 4\pi - \frac{\pi}{2} \\ 2\pi &\leq \pi k \leq 3,5\pi \quad \Big| \cdot \frac{1}{\pi} \\ 2 &\leq k \leq 3,5 \end{aligned}$$

Так число **k** целое, то **k₁ = 2** **k₂ = 3**

Находим корни, принадлежащие интервалу:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 3\pi = \frac{7\pi}{2}$$

Следующий корень:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

Решаем неравенство:

$$\frac{5\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi k \leq 4\pi$$

$$\frac{5\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi k \leq 4\pi \quad | \quad -\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \leq 2\pi k \leq 4\pi - \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{14\pi}{6} \leq 2\pi k \leq \frac{23\pi}{6} \quad | \quad \cdot \frac{1}{2\pi}$$

$$\frac{7}{6} \leq k \leq \frac{23}{12}$$

$$1\frac{2}{12} \leq k \leq 1\frac{11}{12}$$

Для полученного неравенства целого числа **k** не существует.

Следующий корень:

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Решаем неравенство:

$$\frac{5\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \leq 4\pi$$

$$\frac{5\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \leq 4\pi \quad \left| -\frac{5\pi}{6} \right.$$

$$\frac{5\pi}{2} - \frac{5\pi}{6} \leq 2\pi k \leq 4\pi - \frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{10\pi}{6} \leq 2\pi k \leq \frac{19\pi}{6} \quad \left| \cdot \frac{1}{2\pi} \right.$$

$$\frac{5}{6} \leq k \leq \frac{19}{12}$$

$$\frac{5}{6} \leq k \leq 1\frac{7}{12}$$

Так как число **k** целое, то **k = 1**.

Находим корень принадлежащий интервалу:

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi \cdot 1 = \frac{5\pi}{6} + \frac{12\pi}{6} = \frac{17\pi}{6}$$

Ответ:

$$\frac{5\pi}{2}, \frac{17\pi}{6}, \frac{7\pi}{2}$$

ресурсы:

- **<http://alexlarin.net/ege/2012/C12012.pdf>**
- **2. ЕГЭ-2012. Математика: типовые экзаменационные варианты: 30 вариантов/ под ред. А.Л. Семёнова, И.В. Ященко.-М.: Национальное образование, 2011. (ЕГЭ -2012. ФИПИ – школе).**