I. Закон больших чисел.

§1. Независимые одинаково распределенные с.в.

Независимость с.в.

Опр. С.в. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ –наз. независимыми (в совокупности), если для любых чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$P\{X_1 < x_1, X_2 < x_2, \ldots, X_n < x_n\} = P\{X_1 < x_1\} \cdot P\{X_2 < x_2\} \cdot \ldots \cdot P\{X_n < x_n\}.$$

§2. Сходимость последовательности с.в. по вероятности.

Опр. Последовательность с.в. $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ сходится по вероятности к числу a, если для любого $\varepsilon>0$

$$P\{|X_n - a| < \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

I. Закон больших чисел (З.Б.Ч.).

§1. Теорема (З.Б.Ч. В форме Чебышева, 1886 г.)

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ - последовательность независимых с.в. с м. о. $E(X_i) = a_i$ и дисперсии их ограничены одной и той же const : $D(Xi) < c$.

Пусть

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad \overline{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Тогда при $n \to \infty$ последовательность с.в. $\{\overline{X}_n\}$ сходится по вероятности к числу $\overline{a}$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$

$$P\{|\overline{X}_n - \overline{a}| < \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to\infty]{P} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Следствие (З.Б.Ч. для независимых одинаково распределенных с.в.)

- Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ – последовательность независимых одинаково распределенных с.в с м. о. $E(X_i) = a$ и конечными дисперсиями $D(X_i) = \sigma^2 < \infty$.

  Тогда при $n \to \infty$ последовательность с.в. $\{\overline{X}_n\}$ сходится по вероятности к числу a, т.е. для любого $\varepsilon > 0$

  $P\{|\overline{X}_n - a| < \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\longrightarrow}} a.$$

§2. Теорема Бернулли (1713г.)

- Суть теоремы: частота появления события A при возрастании n приближается к вероятности p события A.

<u>Теорема.</u> Последовательность $\left\{\frac{m}{n}\right\}$ при $n \to \infty$ сходится по вероятности к *p*, т.е. для любого *ε>0*

$$P\{|\frac{m}{n} - p| < \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

II. Центральная предельная теорема (ЦПТ)

§1. Теорема

Пусть X_1, X_2,…, X_n,… - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с м. о. $E(X_i)$=a и конечной дисперсией $D(X_i)$=σ^2.

Рассмотрим случайные величины

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \qquad \text{и} \qquad Z_n = \frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Пусть $F_n(x)$ – функция распределения с. в. Z_n.

Тогда для любого $x \in R$ $\quad F_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} F_0(x)$, где

$F_0(x)$ - функция стандартного нормального распределения.

При больших *n* для $x \in R$ $F_n(x) \approx F_0(x)$,

т.е. $Z_n \mathrel{\tilde{\in}} N(0,1)$.

Следовательно,

$$S_n \mathrel{\tilde{\in}} N(na, \sigma\sqrt{n})$$

§ 3. Вероятность попадания с.в. S_n в $[x_1, x_2)$.

- Если n — велико, то $S_n \,\widetilde{\in}\, N(na, \sigma\sqrt{n})$.

$$P\{x_1 \le S_n < x_2\} \approx$$

$$\approx \Phi\left(\frac{x_2 - na}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - na}{\sigma\sqrt{n}}\right).$$

Задача 1.

- На пункт МЧС вызовы в течение суток поступают по закону Пуассона с параметром λ=64 и в разные сутки их количество не зависит друг от друга.

Определить вероятность того, что в течение года (365 дней) общее число вызовов будет в пределах от 23000 до 23500.

Решение.

С.в. X_i- число вызовов за i-е сутки (i=1,2,…,365).

По условию с.в. X_i имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda = 64$.

$$a = E(X_i) = \lambda = 64 \qquad и \qquad \sigma^2 = D(X_i) = \lambda = 64;$$

$$\sigma = 8;$$

$X_1, X_2, \ldots, X_{365}$ - независимые одинаково распределенные с.в.

$$S_n = \sum_{i=1}^{365} X_i$$ - общее число вызовов за год

$$P\{23000 \le S_n \le 23500\} \approx$$

$$\approx \Phi\left(\frac{23500 - 365 * 64}{8 * \sqrt{365}}\right) - \Phi\left(\frac{23000 - 365 * 64}{8 * \sqrt{365}}\right) \approx$$

$$\approx \Phi\left(\frac{140}{152,84}\right) - \Phi\left(\frac{-360}{152,84}\right) \approx$$

$$\approx \Phi(0,92) + \Phi(2,35) \approx$$

$$\approx 0,3212 + 0,4905 = 0,8117.$$

Пример 2.

Решение:

Имеем $n = 100, \quad a = 100, \quad \sigma = 6.$

S_n=$\sum_{i=1}^{100} X_i; \quad P\{0 \leq S_n \leq 10030\} =?$

Ответ: 0,691.

Пример 3

Двое играют в кости. Игральная кость у каждого своя. Каждый игрок бросает свою игральную кость 12 раз. Выигрывает тот, у кого сумма выпавших очков больше. Игрок **A** в сумме получил 54 очка. Следует ли его заподозрить в употреблении фальшивой кости?