Глава 5. Закон больших чисел и центральная предельная теорема

Предельные теоремы можно разделить на два типа.

1. Теоремы, которые устанавливают, что среднее значение достаточно большого числа СВ обладает достаточной устойчивостью и может быть предсказано с высокой степенью точности.
2. Теоремы, в которых устанавливается, что поведение средних величин в пределе может быть оценено законом распределения, близким к нормальному.

§5.1. Последовательности случайных величин и их сходимость

Пусть на вероятностном пространстве (Ω, F, P) определены случайные величины

Y (Y_1, Y_2,…, Y_n) со значениями

Y(ω) (Y_1(ω), Y_2(ω),…, Y_n(ω)).

1. Говорят, что последовательность Y_n сходится *по вероятности* (п.в.) к Y, если ∀δ>0:

(| Y_n -Y|≥δ)=0 - $(Y_n^{п.в.} - Y)$

2. Говорят, что последовательность Y_n сходится к Y *почти наверное* (п.н.) (с вероятностью 1, почти всегда, почти всюду на Ω, mod P), если

$$P(\overline{A}) = 1$$

.

Здесь $\overline{A}$ = {ω∈Ω: $\lim\limits_{n\to\infty}$ $Y_n(\omega)=Y(\omega)$}

Обозначим эту сходимость в виде $(Y_n^{п.н.} - Y)$

3. Говорят, что последовательность Y_n сходится к Y в *среднем квадратическом* (с.к.), если

$$\lim_{n\to\infty} M[(Y_n - Y^2)]=0$$

Сходимость Y_n к Y в среднем квадратическом обозначают Y= $\lim\limits_{n\to\infty} Y_n$

или $(Y_n^{с.к.} - Y)$

4. Говорят, что последовательность Y_n сходится к Y *по распределению* (п.р.), $(Y_n \xrightarrow{n.p.} Y)$, если $\lim_{n\to\infty} F_n(y)=F(y)$.

Здесь F_n, F – функции распределения Y_n и Y , причем сходимость (F_n) к F подразумевается для всех y, за исключением, может быть, точек разрыва F.

Теорема 5.1. Сходимости Y_n к Y, введенные определениями 1-4, связаны между собой соотношениями, показанными на рис..

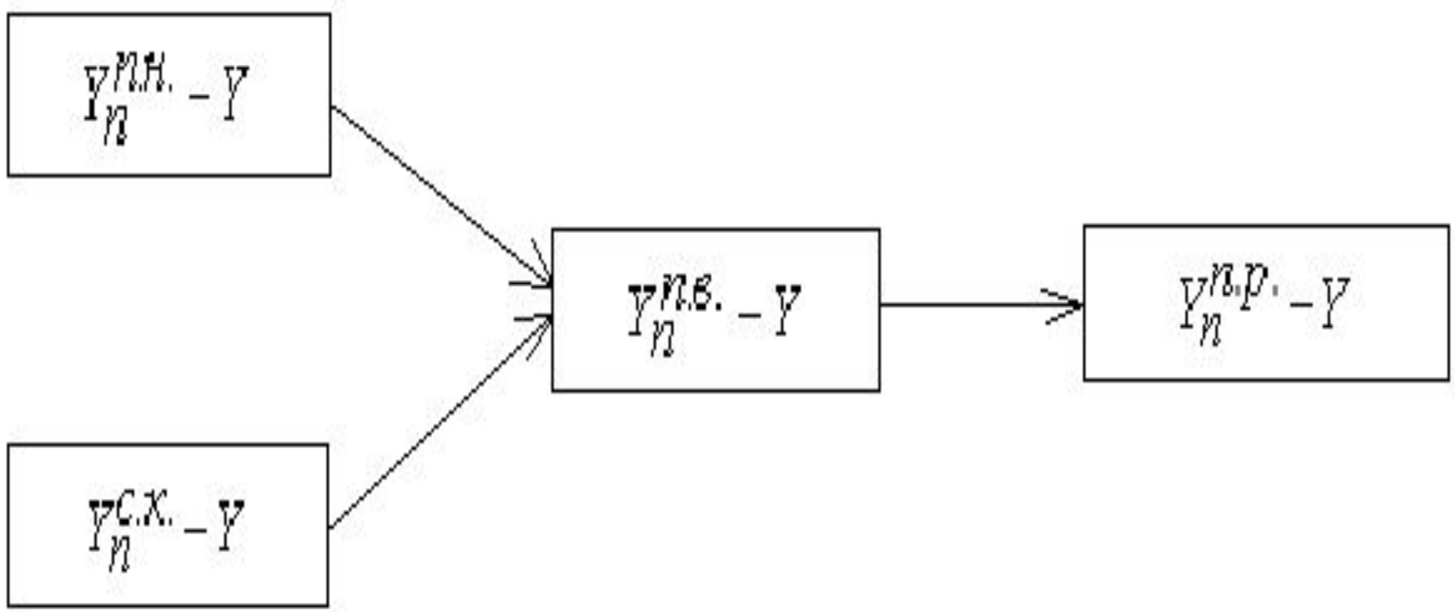

Рис.1

Теорема 5.2. $(Y_n^{n.p.} - Y)$ $\wedge$[P(Y=C)=1] $\Rightarrow$ $(Y_n^{n.в.} - Y)$.

Следующая теорема решает вопрос о сходимости последовательности значений функции, соответствующих элементам сходящейся вероятности последовательности СВ-н. Эта теорема, в частности, имеет важное применение в математической статистике.

Теорема 5.3. Если g – непрерывная функция и

$(Y_n^{n.в.} - Y)$, то $g(Y_n)^{n.в.} - g(Y)$

.

Эта теорема справедлива и в случае, когда g представляет собой непрерывную функцию более чем одного аргумента. Например, если g - непрерывная функция двух аргументов, то

$$(X_n \xrightarrow{п.в.} X) \qquad (Y_n \xrightarrow{п.в.} Y) \qquad \left(g(X_n, Y_n) \xrightarrow{п.в.} g(X,Y)\right)$$

Теорема 5.4. Пусть последовательность $\{X_n\}$ сходится по распределению к случайной величине X с функцией распределения F(x) и последовательность $\{Y_n\}$ сходится по вероятности к постоянной величине $\alpha>0$. Тогда последовательность $\{Z_n\}$, где $Z_n = X_n/Y_n$, сходится по распределению к СВ Z с функцией распределения $P(Z<z)=F(\alpha z)$.

§5.2.Неравенство Чебышева

СВ X с МО $M[X]=m_x<\infty$ и дисперсией $D[X]=D_x<\infty$.

Вероятность того, что отклонение СВ X от ее МО m_x *по абсолютной величине больше числа ε, ограничена сверху величиной* D_x/ε^2, *т.е.*

$P\{|X-m_x|\geq\varepsilon\}<D_x/\varepsilon^2$ *или*

$P\{|X-m_x|<\varepsilon\}\geq 1 - D_x/\varepsilon^2$.

Доказательство: P{|X-m_x|≥ε}= $\sum_{|x_i - m_x| \geq \varepsilon} p_i$

D_x= $\sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} |x_i - m|^2 p_i > \sum_{|x_i - m_x| \geq \varepsilon} |x_i - m_x|^2 p_i \geq \varepsilon^2$

$\sum_{|x_i - m_x| \geq \varepsilon} p_i = \varepsilon^2 P\{|X - m_x| \geq \varepsilon\}$

§5.3. Теорема Чебышева

Теорема: При достаточно большом числе опытов n среднее арифметическое □x значений x_1, …, x_n СВ X сходится по вероятности к ее МО m_x, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|\bar{x} - m_x| < \varepsilon\} = 1$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Доказательство: x_1, …, x_n – независимы, $M[X_i]=m_x$; $D[X_i]=D_x$

$$Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$m_y = M[Y] = M\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n} M\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[X_i] = \frac{1}{n} n m_x = m_x$$

$$D_y = D[Y] = D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n^2} D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D[X_i] = \frac{1}{n^2} n D_x = \frac{1}{n} D_x$$

Т.к. $m_y = m_x < \infty$, $D_y = 1/n D_x < \infty$. то

$$\lim_{n\to\infty} P\{\left|Y - m_x\right| < \varepsilon\} \geq 1$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|X_i - m_x\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

Обобщенная теорема Чебышева.

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – последовательность независимых случайных величин с $m_{xi} < \infty$ и $D_{xi} < L$, $i = 1, \ldots, n$, тогда при неограниченном увеличении $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{x_i}\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

Доказательство: Пусть Y= $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Тогда

$$m_y = M[Y] = M\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n} M\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[X_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{x_i} < \infty$$

$$D_y = D[Y] = D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n^2} D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D[X_i] < \frac{1}{n^2} nL < \infty$$

Применим неравенство Чебышева:

$$P\{\left|Y - m_y\right| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{1}{n\varepsilon^2} D_y$$

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{x_i}\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{1}{n\varepsilon^2} L$$

Отсюда следует справедливость теоремы:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{x_i}\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

§5.4. Центральная предельная теорема

Теорема Ляпунова. Если случайные величины в последовательности X_1, X_2,...,X_n,... независимы, одинаково распределены и имеют конечное математическое ожидание m_x и дисперсию σ_x^2, то для любого действительного x

$$F(x) \to \Phi(x) + \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

где

$$F(x) = P\left[\frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - m_x}{\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}} < x\right]$$

– функция распределения случайной величины

$$\frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - m_x}{\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}}$$

§5.5. Теорема Бернулли

Теорема Бернулли. При неограниченном числе независимых опытов $n\to\infty$ частота появления события A: $p^*=m/n$ (m – число появления события A) сходится по вероятности к его вероятности p:

$$\lim_{n\to\infty} P\{|p^*-p|<\varepsilon\}=1$$

Доказательство: Пусть X_i – дискретная случайная величина с $M[X]=m_{xi}$ и $D[X]=D_{xi}$ характеризующая появление события A в i-м опыте, закон распределения которой определяется рядом

X_i	0	1
$P(X_i)$	$1 - p_i = q_i$	p_i

где X_i =0 означает, что событие A не произошло, а X_i =1 означает, что событие A произошло.

Определим m_{xi} и D_{xi} :

$$m_{xi} = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p;$$

$$D_{xi} = (0-p)^2 q + (1-p)^2 p = p^2 q + q^2 p = pq(p+q) = pq < 1/4.$$

Таким образом, математическое ожидание и дисперсия являются ограниченными величинами. Так как

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{m}{n} = p^*,$$

то по т.Чебышева

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|X_i - m_x\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

или

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|p^* - p\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

Теорема Бернулли используется для обоснования замены вероятностей событий частотой их появления. Теорема Бернулли не позволяет утверждать, что неравенство

$$\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon$$

будет выполняться для достаточно больших чисел *n*. Она лишь утверждает, что выполнение такого неравенства при достаточно большом числе *n* будет очень вероятным.

Теорема Бернулли утверждает устойчивость частоты при постоянных условиях опыта.

§5.6. Теорема Пуассона

При переменных условиях опыта свойства устойчивости частоты доказывается теоремой Пуассона.

Теорема: При неограниченном числе независимых опытов $n \to \infty$ частота появления события A сходится по вероятности к среднему арифметическому вероятностей $p_i = P(A_i)$ появления события A i-м опыте:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|p^* - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

Доказательство: Появления события *A* в *i*-м опыте характеризуется законом распределения, который определяется рядом:

X_i	0	1
$P(X_i)$	$1 - p_i = q_i$	p_i

где X_i =0 означает, что событие *A* не произошло, а X_i =1 означает, что событие *A* произошло.

Определим m_{xi} и D_{xi} :

$$m_{xi} = 0 \cdot q_i + 1 \cdot p_i = p_i;$$

$$D_{xi} = (0 - p_i)^2 q_i + (1 - p_i)^2 p_i = p_i^2 q_i + q_i^2 p_i = p_i q_i (p_i + q_i) = p_i q_i < 1/4.$$

Т.о., случайная величина X_i удовлетворяет условиям обобщенной т.Чебышева. Так как

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{m}{n} = p^*$$ и $$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{x_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i$$

то получим:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_{xi}\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

или

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left| p^* - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i \right| < \varepsilon \right\} = 1$$

что завершает доказательство.