Закон больших чисел

Неравенство Чебышева

Пусть СВ X имеет конечные м.о. m и дисперсию D

Тогда $\forall\alpha > 0$

$$\boxed{P\left(\left|X - m\right| \geq \alpha\right) \leq \frac{D}{\alpha^2}} \qquad (1)$$

$$\boxed{P\left(\left|X - m\right| < \alpha\right) > 1 - \frac{D}{\alpha^2}} \qquad (2)$$

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{P}} X \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} P\left(\left|X_n - X\right| < \varepsilon\right) = 1$$

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \forall\delta > 0 \quad \exists n_0 : \ \forall n > n_0 \ \Rightarrow$$

$$P\left(\left|X_n - m\right| < \varepsilon\right) > 1 - \delta$$

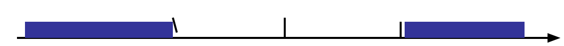
Доказательство неравенство Чебышева

Пусть СВ X непрерывна. Тогда

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| x - m_X \right|^2 f(x)dx \geq$$

$$\geq \int_A \left| x - m_X \right|^2 f(x)dx \geq \int_A \alpha^2 f(x)dx =$$

$$A = \left\{ x \,\middle|\, \left| x - m_X \right| \geq \alpha \right\}$$



m_X

$$= \alpha^2 P(X \in A) = \alpha^2 P\left(\left| X - m_X \right| \geq \alpha \right) \Rightarrow$$

$$\boxed{P\left(\left| X - m_X \right| \geq \alpha \right) \leq \frac{D(X)}{\alpha^2}} \quad \forall \alpha > 0$$

Задача Игральную кость подбрасывают наудачу 350 раз. Оценить вероятность того, что среднее арифметическое выпавших очков отклонится от математического ожидания по абсолютной величине не более, чем на 0,2.

Пусть X_k - число очков, выпавших в k -ом опыте.

$$X_k \sim Uniform(6) \qquad M(X_k) = 3.5, \quad D(X_k) = \frac{35}{12}$$

Обозначим $Y = \frac{1}{350}\sum_{k=1}^{350} X_k \qquad M(Y) = 3.5,\ D(Y) = \frac{1}{n}\cdot\frac{35}{12}$

Способ 1: Согласно неравенству Чебышева

$$P(|Y - m_Y| < \alpha) > 1 - \frac{D(Y)}{\alpha^2}$$

$$P(|Y - 3.5| < 0.2) > 1 - \frac{35}{12 \cdot 350 \cdot 0.04} \approx 0.79$$

Задача. Игральную кость подбрасывают наудачу 350 раз. Оценить вероятность того, что среднее арифметическое выпавших очков отклонится от математического ожидания по абсолютной величине не более, чем на 0,2.

Пусть X_k - число очков, выпавших в k -ом опыте.
Тогда

$$M(X_k)=3.5,\quad D(X_k)=\frac{35}{12}\qquad Y=\frac{1}{350}\sum_{k=1}^{350}X_k$$

Обозначим $Y=\frac{1}{350}\sum_{k=1}^{350}X_k$ $\quad M(Y)=3.5,\ D(Y)=\frac{1}{n}\cdot\frac{35}{12}$

Способ 2: по центральной предельной теореме

$$Y\sim N(m_Y,\sigma_Y)\qquad P(|Y-m_Y|<\varepsilon)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_Y}\right)$$

$$P(|Y-3.5|<0.2)=2\Phi\left(\frac{0,2\cdot\sqrt{12\cdot 350}}{\sqrt{35}}\right)=2\Phi(2.19)\approx 0.99$$

Закон больших чисел

Теорема Чебышева (1867г.)

Пусть $\{X_k\}$ - последовательность независимых СВ с конечными м.о. m_k и дисперсиями $D_k \le d$ $(k \in N)$

Тогда $$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to\infty]{\text{P}} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} m_k$$

<u>Следствие.</u> Пусть СВ $\{X_k\}_{k\in N}$ независимы и одинаково распределены с м.о. $m < +\infty$ и дисперсией $D < +\infty$

Тогда $$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to\infty]{\text{P}} m$$

Доказательство теоремы Чебышева

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \qquad M(Y_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M(X_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} m_k$$

$$D(Y_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D(X_k) \le \frac{1}{n^2}\cdot nd = \frac{d}{n}$$

$$(2) \Rightarrow \quad P\left(\left|Y_n - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} m_k\right| < \varepsilon\right) > 1 - \frac{D(Y_n)}{\varepsilon^2} > 1 - \frac{d}{n\varepsilon^2}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall \delta = \frac{d}{n\varepsilon^2} > 0 \quad \exists n_0 : \; \forall n > n_0 \;\; \Rightarrow$$

$$P\left(\left|Y_n - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} m_k\right| < \varepsilon\right) > 1 - \delta \;\; \Rightarrow \qquad Y_n \xrightarrow[\substack{n\to\infty\\ 6}]{\mathrm{P}} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} m_k$$

Закон больших чисел

Теорема Бернулли

Пусть *p* - вероятность наступления события А, а *p** - относительная частота события А в схеме из *n* испытаний Бернулли.

Тогда

$$p^* \xrightarrow[n\to\infty]{P} p$$

X_k - индикатор события А в *k* -ом опыте.

$$M(X_k) = p \qquad D(X_k) = pq < 1$$

X - число успехов в схеме из n испытаний Бернулли

$$X \sim Bin(n,\ p)$$

$$p^* = \frac{X}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

По ЗБЧ

$$p^* \xrightarrow[n\to\infty]{P} p$$

Закон больших чисел

Теорема Пуассона

Пусть p_k - вероятность наступления события А в k-ом опыте, а p^* - относительная частота события А в обобщенной схеме из n испытаний Бернулли.

Тогда
$$p^* \xrightarrow[n\to\infty]{P} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_k$$

X_k - индикатор события А в k-ом опыте

$$M(X_k) = p_k \qquad D(X_k) = p_k q_k < 1$$

X - число успехов в обобщенной схеме из n испытаний

$$p^* = \frac{X}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \qquad M(X_k) = \frac{1}{n}\sum_k p_k \qquad D(X_k) = \frac{1}{n^2}\sum_k p_k q_k < 1$$

Закон больших чисел

Относительная частота

По ЦПТ *p** - относительная частота события А в схеме из *n* испытаний Бернулли асимптотически нормальна

$$p^* = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

$$M\left(p^*\right) = p \qquad D\left(p^*\right) = \frac{pq}{n} \qquad \Rightarrow \qquad p^* \sim N\left(p, \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)$$

$$P\left(\left|p^* - p\right| < \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right)$$

$$\gamma = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right)$$

γ – доверительная вероятность

Задача Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,6. Найти наименьшее количество независимых выстрелов по мишени, чтобы с вероятностью не меньшей 0,99 частота попаданий в мишень отклонялась от вероятности по абсолютной величине не более, чем на 0,02.

$$p^* = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \qquad M\left(p^*\right) = 0{,}6;\ D\left(p^*\right) = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}4}{n}$$

Способ 1: Согласно неравенству Чебышева

$$P\left(\left|p^* - p\right| \le \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{D\left(p^*\right)}{\varepsilon^2} \ge 0{,}99$$

$$1 - \frac{0{,}24}{n \cdot (0{,}02)^2} \ge 0{,}99 \qquad n \ge 60000$$

Задача Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,6. Найти наименьшее количество независимых выстрелов по мишени, чтобы с вероятностью не меньшей 0,99 частота попаданий в мишень отклонялась от вероятности по абсолютной величине не более, чем на 0,02.

$$p^* = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \qquad M\left(p^*\right) = 0{,}6; \; D\left(p^*\right) = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}4}{n}$$

Способ 2: по центральной предельной теореме

$$p^* \sim N\left(p, \sqrt{\frac{pq}{n}}\right) \qquad P\left(\left|p^* - p\right| < \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right)$$

$$2\Phi\left(\frac{0{,}02 \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{0{,}24}}\right) \ge 0{,}99 \qquad \frac{0{,}02 \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{0{,}24}} \ge 2{,}58 \qquad \sqrt{n} \ge 63{,}2$$

$$n \ge 3993{,}8 \qquad 3994$$