Метод Математической Индукции

Презентация подготовлена

учеником 9 «а» класса

МОУ «Гимназия № 20»

Хоченковым Константином

Метод математической индукции можно сравнить с прогрессом. Мы начинаем с низшего, в результате логического мышления приходим к высшему. Человек всегда стремился к прогрессу, к умению развивать свою мысль логически, а значит, сама природа предначертала ему размышлять индуктивно.

Цель работы:

- познакомиться с методом математической индукции, систематизировать знания по данной теме и применить её при решении задач и доказательстве теорем,
- обосновать и наглядно показать практическое значение метода математической индукции как необходимого фактора для решения задач,
- сформировать представления о математике как части общечеловеческой культуры.

Переход от общих утверждений к частным называется

дедукцией.

В математике часто приходится от частных утверждений переходить к общим, т.е. использовать метод, противоположный дедуктивному, который называется

индукцией.

Пример неполной индукции

$P(x)= x^2+ x+ 41$

$P(1)= 43;$ $P(2)=47;$ $P(3)= 53;$ $P(4)= 61;$ $P(5)= 71$

$P(0)=41;$ $P(-1)=41;$ $P(-2)=43;$ $P(-3)=47;$ $P(-4) =53$

Возникает гипотеза, что значение трехчлена $P(x)$ является простым числом при любом целом значении x.

Но высказанная **гипотеза ошибочна**, так как, например, $P(41)= 41^2+41+41=41\cdot 43$.

Вывод:

Метод неполной индукции, как мы видим, не приводит к вполне надежным выводам, но он полезен тем, что **позволяет сформулировать гипотезу**, которую потом можно доказать точным математическим рассуждением или опровергнуть.

Принцип математической индукции:

Если предположение, зависящее от натурального числа *n*, истинно для *n=1* и из того, что оно истинно для *n=k* (где *k*-любое натуральное число), следует, что оно истинно и для следующего числа *n=k+1*, то предположение истинно для любого натурального числа *n*.

Этапы решения:

1.база (показываем, что доказываемое утверждение верно для некоторых простейших частных случаев ($\boldsymbol{n} = 1$);

2.предположение (предполагаем, что утверждение доказано для первых $\boldsymbol{\kappa}$ случаев;

3.шаг (в этом предположении доказываем утверждение для случая $\boldsymbol{n = \kappa + 1}$**);**

4.вывод (**у**тверждение верно для всех случаев, то есть для всех $\boldsymbol{n}$*)*.

Пример 1. Найти сумму $Sn = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)}$

$$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}\ ;\ S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}\ ;\ S_3 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}.$$

Это позволяет высказывать **гипотезу (** предположение), что при любом натуральном n $Sn = \frac{n}{n+1}$.

Для проверки этой гипотезы воспользуемся методом математической индукции.

1) При n = 1 гипотеза верна, так как $S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$.

Гипотеза должна быть верной и при $n = k+1$, то есть

$$S_{k+1} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}.$$

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$S_{k+1} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2} -$$

Неравенство Бернулли

Доказать, что для любого натурального числа n и любого действительного числа $a > -1$ имеет место неравенство, называемое ***неравенством Бернулли*** (названо в честь швейцарского математика XVII в. Якова Бернулли)***:***
$(1+a)^n \geq 1 + an.$

1) Если $n=1$, то очевидно, что неравенство верно: $(1+a)^1 \geq 1+a.$
2) Предположим, что неравенство верно при $n=k$: $(1+a)^k \geq 1 + ak.$

$$(1+a)^{k+1} \geq 1+ak+a+a^2k.$$

$$(1+a)^{k+1} \geq a(k+1).$$

Полученный результат показывает, что неравенство верно и при $n=k+1.$

Второй вариант метода математической индукции.

Некоторые утверждения справедливы не для всех натуральных *n*, а лишь для натуральных *n*, начиная с некоторого числа *p*.

Утверждение верно при всех натуральных значениях п ≥ р, если:
1)оно верно при n =р (а не при $n = 1$, как было сказано выше);
2)из справедливости этого утверждения при $n = k$, где $k \geq p$ (а не $k \geq 1$, как сказано выше), вытекает, что оно верно и при $n = k + 1$.

Докажите, что для любого $n > 1$ справедливо равенство

$$(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})...(1-\frac{1}{n^2}) = \frac{n+1}{2n}$$

Мы должны доказать, что $P_n = \frac{n+1}{2n}$.

Для n=1 формула не верна (1- 1) = 1(неверно).

1) Проверим, что эта формула верна для n = 2. $1-\frac{1}{4} = \frac{2+1}{2\cdot 2}$, $\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$ - верно.

2) Пусть формула верна для n = k, т.е. $P_k = (1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})...(1-\frac{1}{k^2}) = \frac{k+1}{2k}$

3) Докажем, что это тождество верно и для n = k + 1, т.е.

$$P_{k+1} = (1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})\ldots(1-\frac{1}{(k+1)^2}) = \frac{k+2}{2(k+1)}$$

$$P_{k+1} = P_k \cdot (1-\frac{1}{(k+1)^2}) = \frac{k+1}{2k}\cdot\frac{(k+1)^2-1}{(k+1)^2} = \frac{k+1}{2k}\cdot\frac{k\cdot(k+2)}{(k+1)^2} = \frac{k+2}{2(k+1)}$$

Докажем, что $2^n > 2n + 1$ при любом натуральном $n \geq 3$.

1) При $n = 3$ неравенство верно. $2^3 > 2 \cdot 3 + 1$.

2) Предположим, что $2^k > 2k + 1$ $(k \geq 3)$.

3) Докажем, что $2^{k+1} > 2(k + 1) + 1$.
$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2(2k + 1) = (2k + 3)(2k - 1) > 2k + 3$, так как $2k - 1 > 0$ при любом натуральном значении k. Следовательно, $2^n > 2n + 1$ при всех $n \geq 3$.

Доказательство формулы

Докажем ,что:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^3$$, n – натуральное число.

При n=1 обе части равенства обращаются в единицу

Формула верна при n=k, т.е.

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2.$$

Прибавим к обеим частям этого равенства $(k+1)^3$ и преобразуем правую часть. Тогда получим

$$1^3+2^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2+(k+1)^3=(k+1)^2\cdot\left(\frac{k^2}{4}+k+1\right)=$$

$$=\left(\frac{k+1}{2}\right)^2\left(k^2+4k+4\right)=\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$$

Делимость (Мех.мат. МГУ):

Докажите, что при любом натуральном числе n $\quad 9^{n+1} - 8n - 9$ кратно 16.

1) Проверим, что данное утверждение верно при $n=1$:

$$9^{2} - 8 - 9 = 81 - 8 - 9 = 64, \quad 64 \vdots 16.$$

При $n=1$ утверждение верно.

2) Предположим, что данное утверждение верно, при $n = k$:

$$(9^{k+1} - 8k - 9) \vdots 16.$$

И, докажем, что данное утверждение верно при $n = k+1$:

$$(9^{k+2} - 8(k+1) - 9) \vdots 16.$$

$$9^{k+2} - 8(k+1) - 9 = 9^{k+1} \cdot 9^{1} - 8k - 8 - 9 = 9^{k+1} \cdot 9 - 8k - 17 =$$
$$= 9(9^{k+1} - 8k - 9) + 64k + 64 = 9(9^{k+1} - 8k - 9) + 64(k+1) =$$
$$= 9(9^{k+1} - 8k - 9) + 64(k+1).$$

$\vdots 16 \qquad \vdots 16$

Следовательно: $\quad (9(9^{k+1} - 8k - 9) + 64(k-1)) \vdots 16.$

Четность и нечетность выражений

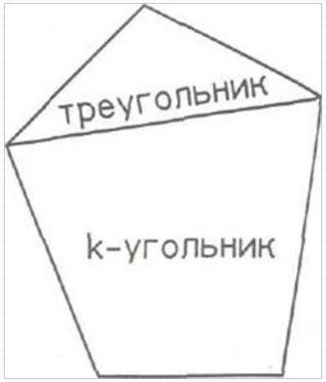
Если n – натуральное число, то число $n^2 - n$ четное

1)При n=1 $1^2 - 1 = 0$ - четное число.

2)Предположим, что $k^2 - k$ - четное число. Так как $(k+1)^2 - (k+1) - (k^2 - k) = 2k$, а 2k – четное число, то и $(k+1)^2 - (k+1)$ четное.

Итак, четность $n^2 - n$ доказана при n=1, из четности $k^2 - k$ выведена четность $(k+1)^2 - (k+1)$..Значит, $n^2 - n$ четно при всех n.

Докажем, что сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна $\pi(n\text{-}2)$.



1. Минимальное число углов — три. Поэтому начнем доказательство с n = 3. Получаем, что для треугольника формула дает π (3~2) = π Утверждение для n = 3 справедливо.

2. Допустим, что формула
верна при n=k. Докажем, что она верна для любого выпуклого (к +1) -угольника. Разобьем (к +1) -угольник диагональю так, что получим k-угольник и треугольник.
Так как формула верна для треугольника и k-угольника, получаем π (к - 2) + π = π (к -1).

Итак, индукция (от лат. *inductio* — наведение, побуждение) — одна из форм умозаключения, приём исследования, применяя который от знания отдельных фактов приходят к общим положениям.

Метод математической индукции является одной из теоретических основ при решении задач на суммирование, доказательстве тождеств, доказательстве и решении неравенств, решении вопроса делимости, при изучении свойств числовых последовательностей, при решении геометрических задач и т. д.