

Тема урока:

Метод математической ИНДУКЦИИ.



Утверждения



Общие

Все граждане России
имеют право на образование.

Во всяком параллелограмме
диагонали в точке пересечения
делятся пополам.

Все числа, оканчивающиеся
нулём, делятся на 5.

Частные

Петров имеет право на
образование.

В параллелограмме ABCD
диагонали в точке пересечения
делятся пополам.

140 делится на 5.

Дедукция –

переход от общих утверждений к частным.

Пример.

Все граждане России имеют право на образование.

Петров – гражданин России.

Петров имеет право на образование.



Индукция –

переход от частных утверждений к общим.

Пример.

140 делится на 5.

Все числа, оканчивающиеся нулём, делятся на 5.

140 делится на 5.

Все трёхзначные числа делятся на 5.



Знаменитый математик XVII в. П.Ферма
проверив, что числа



$$2^{2^0} + 1 = 3$$

$$2^{2^1} + 1 = 5$$

$$2^{2^2} + 1 = 17$$

$$2^{2^3} + 1 = 257$$

$$2^{2^4} + 1 = 65537$$

простые, сделал по индукции
предположение, что для всех
 $n=1,2,3,\dots$ числа вида

$$2^{2^n} + 1$$

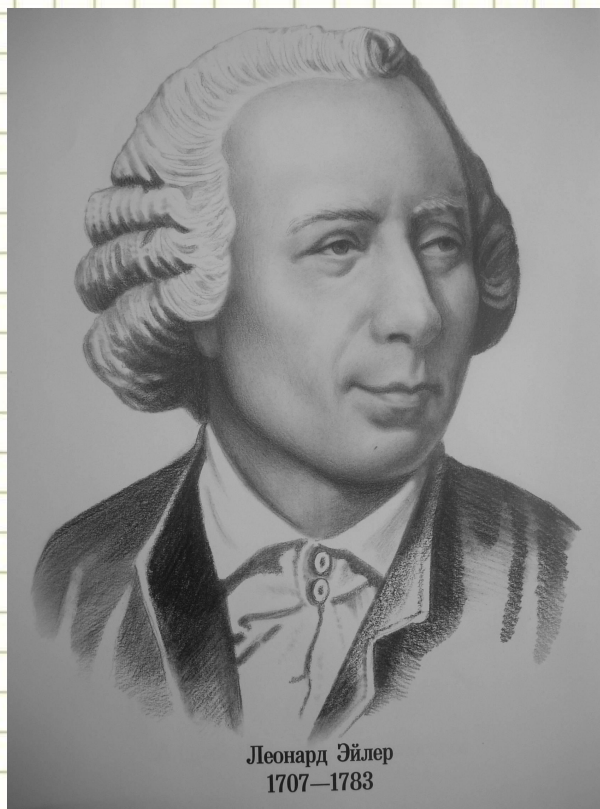
простые.



В XVIII веке Л.Эйлер нашел, что при $n=5$

$$2^{2^5} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417$$

составное число.



Принцип математической индукции

Утверждение $P(n)$ справедливо для всякого натурального n , если:

1. Оно справедливо для $n=1$ или для наименьшего из натуральных чисел при котором закономерность имеет смысл.
2. Из справедливости утверждения для какого либо произвольного натурально $n=k$ следует его справедливость для $n=k+1$.



Алгоритм доказательства методом математической индукции

1. Проверяют справедливость гипотезы для наименьшего из натуральных чисел при котором гипотеза имеет смысл (базис индукции).
2. Сделав предположение, что гипотеза верна для некоторого значения k , стремятся доказать справедливость ее для $k+1$ (индукционный шаг).
3. Если такое доказательство удалось довести до конца, то, на основе принципа математической индукции можно утверждать, что высказанная гипотеза справедлива для любого натурального числа n .



Суть доказательства

методом математической индукции:

1. **базис** проверить верность утверждения при $n = 1$
2. **индукционный шаг**
 - допустить, что утверждение верно при $n = k$
 - доказать, что утверждение верно при $n = k + 1$



Доказать, что $a^n > 0$, для любого натурального числа n и $a > 0$.

Доказательство:

1. Имеем $n=1$, $a > 0$. Следовательно, утверждение верно при $n=1$.
2. Пусть k -любое натуральное число и пусть утверждение справедливо для $n=k$, т.е. $a^k > 0$.

Докажем, что тогда утверждение справедливо и для следующего натурального числа $n=k+1$, т.е. что $a^{k+1} > 0$.

$$a^k \cdot a > 0.$$

Итак, утверждение истинно для любого натурального n .



Задача

Доказать, что любого натурального числа n сумма n первых нечетных натуральных чисел равна n^2 :

$$1+3+\dots+(2n-1) = n^2$$



Доказательство:

1. Проверим верность утверждения при $n=1$.

$$1 = 1^2$$

Следовательно, утверждение верно при $n=1$.

2. Пусть утверждение справедливо для $n=k$, т.е.

$$1+3+\dots+(2k-1) = k^2$$

Докажем истинность утверждения для $n=k+1$, т.е. что

$$1+3+\dots+(2k-1)+(2(k+1)-1) = (k+1)^2$$

$$1+3+\dots+(2k-1)+(2k+1) = k^2 + (2k+1) = (k+1)^2$$

Итак, утверждение истинно для любого натурального n .



Задача

Доказать, что для любого натурального числа n истинно утверждение

$$(8^n + 6) \div 7$$



Задача

Доказать, что сумма n первых чисел
натурального ряда равна

$$\frac{n(n+1)}{2}$$



Метод математической индукции
позволяет в поисках общего закона
испытывать возникающие при этом
гипотезы, отбрасывать ложные и
утверждать истинные.





«Понимание и умение правильно применять принцип математической индукции, является хорошим критерием логической зрелости, которая совершенно необходима математику».

А.Н. Колмогоров

