

Теорема Безу. Схема Горнера

*Алгебра и начала математического
анализа – 10*



Этьенн Безу́ (1730 – 1783) – французский математик, член Парижской академии наук

Преподавал математику в Училище гардемарин (1763) и Королевском артиллерийском корпусе (1768).

Основные его работы относятся к алгебре (исследование систем алгебраических уравнений высших степеней, исключение неизвестных в таких системах и др.)ю

Автор шести томного «Курса математики» (1764—1769), неоднократно пере издававшегося.

Теорема Безу: Остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $(x - a)$ равен $P(a)$

Доказательство.

Поделим с остатком многочлен $P(x)$ на двучлен $(x - a)$:

$$P(x) = Q(x)(x - a) + R(x)$$

Т.к. степень R меньше степени $(x - a)$, то $R(x)$ – многочлен нулевой степени, т.е.

$R(x) = R$ – число.

При $x = a$, имеем $P(a) = Q(a)(a - a) + R(a)$.

$$P(a) = R(a). \quad \text{что}$$

Теорема Безу: Остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $(x - a)$ равен $P(a)$

Следствия

- 1. Число a является корнем многочлена $P(x)$ тогда и только тогда, когда $P(x)$ делится без остатка на двучлен $(x - a)$
(отсюда, в частности, следует, что множество корней многочлена тождественно множеству корней соответствующего уравнения)*
- 2. Свободный член многочлена делится на любой целый корень многочлена с целыми коэффициентами
(если старший коэффициент равен 1, то все рациональные корни являются и целыми)*
- 3. Пусть α — целый корень приведённого многочлена $A(x)$ с целыми коэффициентами. Тогда для любого целого k число $A(k)$ делится на $\alpha - k$*
- 4. Если число a является корнем многочлена $P(x)$, то этот многочлен можно представить в виде произведения $(x - a) P_1(x)$, где $P_1(x)$ - многочлен $n-1$ -й степени.*

Приложения

Теорема Безу и следствия из неё позволяют легко находить рациональные корни уравнений с целыми (рациональными) коэффициентами.

$$x^3 - x^2 - 3x - 1 = 0.$$

Решение:

1. Делители свободного члена: ± 1 .

$$2. f(x) = x^3 - x^2 - 3x - 1$$

$$f(1) = -4;$$

$$f(-1) = 0.$$

Имеем, что число -1 – корень уравнения.

3. По теореме 2 левую часть уравнения можно представить в виде произведения $(x+1)P(x)$, где $P(x)$ – многочлен второй степени.

Для того чтобы найти многочлен $P(x)$, разделим $x^3 - x^2 - 3x - 1$ на $(x+1)$ «уголком»:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 - 3x - 1 & x + 1 \\ x^3 + x^2 & x^2 - 2x - 1 \\ \hline -2x^2 - 3x & \\ -2x^2 - 2x & \\ \hline -x - 1 & \\ -x - 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Итак, $x^3 - x^2 - 3x - 1 = (x+1)(x^2 - 2x - 1)$.

Из уравнения $(x+1)(x^2 - 2x - 1) = 0$ получаем

$$\begin{cases} x + 1 = 0, \\ x^2 - 2x - 1 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ x = 1 - \sqrt{2}, \\ x = 1 + \sqrt{2}. \end{cases}$$

Ответ: $-1; 1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}$.



Уильям Джордж Горнер (1786 – 1837)

Английский математик

Основные труды по теории алгебраических уравнений.

С его именем связана (1819) схема Горнера деления многочлена на двучлен .

Частный случай: уравнение четвертой степени

$$P(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$$

x_0	Коэффициент при x^4	Коэффициент при x^3	Коэффициент при x^2	Коэффициент при x	Свободный член
	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
	$b_0 = a_0$ коэффициент при x^3	$b_1 = b_0x_0 + a_1$ коэффициент при x^2	$b_2 = b_1x_0 + a_2$ коэффициент при x	$b_3 = b_2x_0 + a_3$ свободный член	$b_4 = b_3x_0 + a_4$ остаток

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{Делимое} & & = \text{делитель} & * & \text{частное} & + & \text{остаток} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \underline{a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4} & = & (x - x_0) & * & \underline{(b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3)} & + & \underline{b_4} \\
 \text{многочлен 4-й степени} & & & & \text{многочлен 3-й степени} & & \text{остаток}
 \end{array}$$

Решение уравнений высших степеней (деление многочлена с помощью схемы Горнера)

Рассмотрим решение уравнений высших степеней, используя метод деления многочлена с помощью **схемы Горнера**:

Если $p_0x^n + p_1x^{n-1} + \dots + p_{n-1}x + p_n = (b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + b_{n-2}x + b_{n-1})(x - a)$, то

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} & p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_{n-1} & p_n \\ \hline a & b_0 = p_0 & b_1 = p_1 + b_0 \cdot a & b_2 = p_2 + b_1 \cdot a & b_3 = p_3 + b_2 \cdot a & \dots & b_{n-1} = p_{n-1} + b_{n-2} \cdot a & b_n = p_n + b_{n-1} \cdot a \end{array} \quad |$$

Решить уравнение $P(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$.

Решение:

Делители свободного члена: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$.

$$P(1) = 1 - 1 - 8 + 12 \neq 0,$$

$$P(-1) = -1 - 1 + 8 + 12 \neq 0,$$

$$P(2) = 8 - 4 - 16 + 12 = 0$$

Число 2 является корнем уравнения.

Поделим $P(x)$ на $x-2$

	1	-1	-8	12
2	1	1	-6	0

$$P(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12 = (x - 2)(x^2 + x - 6), \text{ т.е.}$$

$$(x - 2)(x^2 + x - 6) = 0,$$

Имеем:
$$\begin{cases} x - 2 = 0, \\ x^2 + x - 6 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2, \\ x = -3, \\ x = 2. \end{cases}$$

Ответ: 2, -3.

Решите уравнение $x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6 = 0$.

Решение:

Делители свободного члена: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

$$P(1) = 1 + 5 + 5 - 5 - 6 = 0$$

	1	5	5	-5	-6
1	1	6	11	6	0
-1	1	5	6	0	

$$(x-1)(x^3 + 6x^2 + 11x + 6) = 0$$

$$P(-1) = 1 - 5 + 5 + 5 - 6 = 0$$

$$(x-1)(x+1)(x^2 + 5x + 6) = 0$$

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$x_1 = -3; \quad x_2 = -2$$

Ответ: 1; -1; -3; -2.

$$x^4 - 4x^3 - 13x^2 + 28x + 12 = 0.$$

Решение:

Делители свободного члена: ± 1 ; ± 2 ; ± 3 ; ± 4 ; ± 6 ; ± 12 .

$$P(1) = 1 - 4 - 13 + 28 + 12 \neq 0,$$

$$P(-1) = 1 + 4 - 13 - 28 + 12 \neq 0,$$

$$P(2) = 16 - 32 - 52 + 56 + 12 = 0,$$

т.е. число 2 является корнем уравнения

	1	-4	-13	28	12
2	1	-2	-17	-6	0
-3	1	-5	-2	0	

$$\text{Имеем } P(x) = (x-2)(x^3 - 2x^2 - 17x - 6) = 0$$

$P(-3)=0$, т.е. число -3 является корнем уравнения

$$P(x) = (x-2)(x+3)(x^2 - 5x - 2) = 0$$

$$\begin{cases} x-2=0, \\ x+3=0, \\ x^2-5x-2=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ x=-3, \\ x=\frac{5+\sqrt{33}}{2}, \\ x=\frac{5-\sqrt{33}}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $-3, 2, \frac{5-\sqrt{33}}{2}, \frac{5+\sqrt{33}}{2}$.

Задачи для самостоятельного решения.

Решите уравнения с помощью схемы Горнера:

1. $4x^4 - 4x^3 - 9x^2 + x + 2 = 0,$

2. $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0,$

3. $x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 12x + 16 = 0,$

4. $x^3 + 4x^2 - 7x - 10 = 0,$

5. $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0.$